S. DROBOT i M. WARMUS (Wrocław)

ANALIZA WYMIAROWA W BADANIU WYRYWKOWYM TOWARÓW

I. Uwagi metodologiczne

Badanie wyrywkowe towarów polega na tym, że badamy określoną próbkę wybraną z partii towaru i z wyników tego badania wyznaczamy pewną cechę całej partii.

Teoria badania wyrywkowego opiera się zazwyczaj na rachunku prawdopodobieństwa i statystyce matematycznej. W celu rozwiązania najważniejszych zagadnień spotykanych w teorii badania wyrywkowego przyjmuje się pewne hipotezy natury statystycznej lub ekonomicznej i następnie korzysta się z tego faktu, że zagadnienie dotyczy wielkiej liczby przedmiotów. Masowość zjawiska jest podstawą do stosowania rachunku prawdopodobieństwa wraz z jego doskonale rozwiniętym aparatem.

Ta metoda postępowania, uświęcona tradycją, ma jednak niektóre wady.

Przede wszystkim w jej stosowaniu trzeba koniecznie przyjąć już na samym początku rachunku pewne zupełnie sprecyzowane hipotezy statystyczne, ekonomiczne, a nieraz i inne; następnie za pomocą rachunku prawdopodobieństwa rozwiązuje się postawione zagadnienie i otrzymuje konkretne i ściśle określone rezultaty. Jeżeli rezultaty te lub hipotezy, które leżą u ich podstaw, chociażby tylko częściowo zakwestionujemy, to całe rozwiązanie stanie się bezużyteczne i jeżeli zechcemy je poprawić, będziemy musieli całą teorię konstruować od początku, a zagadnienia odpowiadające innym hipotezom jeszcze raz rozwiązać.

A sam sposób rozwiązywania zagadnień — i to jest właśnie druga wada metod dotąd używanych — jest często dość skomplikowany i wymaga nieraz mocniejszych środków matematycznych. Wskutek tego ze względów technicznych nie zawsze można wprowadzać do rachunku wszystkie hipotezy, które dobrze charakteryzują zjawisko, lecz musi się z konieczności przyjąć pewne schematy, nieraz dość uproszczone. Otrzymane tą drogą wyniki są przeważnie sztywne, a jeżeli doświadczenie nie potwierdzi ich w całości, stają się bezużyteczne w całości i nie można z tych wyników uratować ani części.

Zresztą — a to jest już trzecia wada — w dotychczas używanych teoriach badania wyrywkowego niedostatecznie uwzględniano rolę eksperymentu i doświadczeń znawców-praktyków, ponieważ nie była jasna. Z metod dotychczas używanych nie widać wyraźnie, czy i w jaki sposób można wyniki otrzymane z teorii porównywać z rzeczywistością. Różnic poglądów między różnymi autorami dotyczących szczegółów teorii przeważnie nie rozstrzyga się za pomocą doświadczenia, lecz pozostawia w sferze osobistych przekonań.

Celem niniejszej pracy jest przedstawić teorię badania wyrywkowego wolną od wyżej wymienionych wad. Teoria ta nie jest oparta na rachunku prawdopodobieństwa. Statystyka matematyczna ma w niej wprawdzie do spełnienia pewne zadanie, ale inne niż dotychczas. Teoria, którą przedstawiamy, jest teorią *fenomenologiczną*.

Każdy badacz rzeczywistości, również ten, który stosuje rachunek prawdopodobieństwa do zagadnień przyrodoznawstwa, techniki, ekonomii lub innych, opiera się w swej pracy na przekonaniu, że istnieje obiektywna zależność między poszczególnymi elementami badanego zjawiska[1]). Zależność tę można wykryć metodami rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, ale można to zrobić nieraz i bez nich.

Aby jaśniej i konkretniej przedstawić tę myśl i jej konsekwencje, zatrzymajmy się na pewnym przykładzie. Przyjrzyjmy się mianowicie dla porównania takiej teorii opisującej realne zjawiska jak termodynamika. Rozwój historyczny tej nauki wyglądał, z grubsza mówiąc, w następujący sposób: Najpierw poznano pewne fakty i związki między nimi, opisane w sposób fenomenologiczny. A więc, na przykład, poznano prawa Boyle'a i Mariotte'a o gazach, następnie pierwszą i drugą zasadę termodynamiki. Teoria fenomenologiczna tych zjawisk nie korzystała w ogóle z własności atomistycznych materii i z metod probabilistycznych. Była to jednak teoria konsekwentna i — co najważniejsze — zgodna w swych wynikach w dostatecznym stopniu dokładności z doświadczeniem. Wiadomo, że zastosowanie rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej do termodynamiki pozwoliło spojrzeć na znane fakty od innej strony i dało wgląd w pewne subtelniejsze zjawiska, ale fakty opisane przez termodynamikę fenomenologiczną pozostały prawdziwe, chociaż tylko w sensie statystycznym. Dla celów praktycznych w fizyce i technice termodynamika fenomenologiczna nie straciła jednak niemal nic na swej wartości, a nawet jej podstawy teoretyczne zostały pogłębione.

---

[1]) Patrz [1], str. 15.

W teorii badania wyrywkowego towarów zastosowano od razu metody statystyczne. Pod tym względem historia rozwoju tej nauki różni się od historii termodynamiki. Subtelne metody rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej okazują się jednak nieraz za delikatne do takich grubych zagadnień, jakie spotyka się w badaniu wyrywkowym towarów. A nadto mają wady, o których już mówiliśmy. Z tego powodu wydaje się, że jest rzeczą ważną — co najmniej dla celów praktycznych — zbudować teorię fenomenologiczną badania wyrywkowego towarów.

Zasadniczą ideą, na której opieramy tę teorię, jest przekonanie, że *badanie wyrywkowe towarów jest zjawiskiem w dostatecznym stopniu zdeterminowanym.* Przyjmujemy, że istnieje pewien określony obiektywny związek między badaną cechą próbki a odpowiadającą jej cechą całej partii towaru. Założenia o tym związku sformułujemy w rozdziale II w sposób ogólny i, jak się nam wydaje, dobrze oddający rzeczywistość. Ogólne zasady tej teorii, które sformułujemy w rozdziale II, będą przypominały swoim charakterem zasady termodynamiki lub mechaniki klasycznej.

Na podstawie tak sformułowanych zasad będziemy mogli bez użycia metod probabilistycznych rozwiązać najważniejsze zagadnienia spotykane w teorii badania wyrywkowego, na przykład będziemy mogli wyprowadzić wzory na liczność próbki. Rachunki potrzebne do rozwiązania tych zagadnień są zupełnie proste i wymagają znajomości chyba tylko algebry elementarnej. Metoda, którą będziemy się posługiwali, nazywa się *analizą wymiarową*[2]). Pozwoli ona nam rozwiązać wiele kwestii zasadniczych w sposób ogólny, jednolity, a równocześnie bardzo prosty.

Na zakończenie tego rozdziału zwrócimy uwagę na pewną okoliczność ważną dla niematematyków. Zarówno analiza wymiarowa jak teoria badania wyrywkowego, którą rozwiniemy, są teoriami abstrakcyjnymi zbudowanymi aksjomatycznie. Abstrakcja w matematyce bynajmniej nie oznacza oderwania się od rzeczywistości, lecz polega na tym, że z wielu różnych zjawisk wydobywamy ich wspólne własności i badamy związki między tymi własnościami. Dzięki temu metoda abstrakcyjna ma niezwykłą siłę i ogólność. Ale ma równocześnie i niebezpieczne cechy. Pojęcia podstawowe i postulaty abstrakcyjnych teorii matematycznych są sformułowane zazwyczaj bardzo prosto i poglądowo. Ta poglądowość oraz uleganie potocznemu znaczeniu używanych terminów utrudnia nieraz w wysokim stopniu dostrzeganie całej ogólności teorii i może doprowadzić do mylnych wniosków.

---

[2]) Patrz [2], str. 233-272.

II. Ogólne zasady teorii

Sformułujemy teraz pojęcia zasadnicze i postulaty teorii badania wyrywkowego towarów. Będzie to podstawą dalszych rozumowań potrzebnych do rozwiązywania poszczególnych zagadnień konkretnych. Pojęcia i postulaty teorii badania wyrywkowego możemy wprowadzać na różne sposoby, zależnie od tego, jaki stopień ogólności chcemy osiągnąć. Ograniczymy się tutaj tylko do jednego z możliwych sposobów, który jest w wielu przypadkach wystarczający dla praktyki. Celem naszym jest bowiem przede wszystkim pokazanie, jak można zbudować konsekwentną teorię fenomenologiczną badania wyrywkowego, a nie rozwijanie tej teorii w największej ogólności. A więc pojęcia i postulaty, które przyjmiemy, mają raczej charakter przykładu i bynajmniej nie wyczerpują wszystkich możliwości. Na niektóre tylko, niezbyt istotne zresztą, możliwości uogólnień zwrócimy przy sposobności uwagę. Istotniejsze i głębsze uogólnienia powinny być przedmiotem osobnej pracy.

Partią towaru nazywamy zbiór Ω przedmiotów, który ma następujące własności:

Niech $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ będą podzbiorami zbioru Ω, czyli częściami partii towaru; przyjmujemy, że umiemy dodawać te części partii towaru i że wynikiem tego dodawania jest zawsze znowu część partii (lub cała partia). Dodawanie to oznaczamy symbolem $\cup$.

Zakładamy, że dla wszystkich części każdej partii towaru są określone dwie miary, które oznaczamy literami N i W, i które spełniają następujące warunki:

1° Miary N i W są wielkościami mianowanymi.

2° Miary N wszystkich części tej samej partii towaru mają wspólny wymiar i miary W wszystkich części tej samej partii towaru mają wspólny wymiar.

3° Wielkości N i W są wymiarowo niezależne.

4° Jeżeli Ω_1 i Ω_2 są częściami rozłącznymi tej samej partii towaru Ω, to

$$4' \qquad N(\Omega_1 \cup \Omega_2) = N(\Omega_1) + N(\Omega_2),$$

$$4'' \qquad W(\Omega_1 \cup \Omega_2) = W(\Omega_1) + W(\Omega_2).$$

Wielkość $N(\Omega)$ nazywamy *licznością partii* Ω, a wielkość $W(\Omega)$ nazywamy *wartością partii* Ω. Analogicznie wielkość $N_1 = N(\Omega_1)$ nazywamy *licznością części* Ω_1 partii towaru, a wielkość $W_1 = W(\Omega_1)$ — *wartością części* Ω_1 partii towaru.

Wyjaśnimy te pojęcia i przyjęte postulaty na przykładach. Zgodnie z naszymi założeniami jest partią towaru na przykład 20 wagonów węgla. Za dodawanie $\cup$ dwóch części tej partii, na przykład 3 i 5 wagonów węgla, uważajmy ich zsypanie. Za liczność N tej partii (lub jej części) uważajmy ciężar węgla, z którego partia (lub jej część) się składa. Wymiarem liczności N jest na przykład kG lub tona. Za wartość W tej partii lub jej części uważajmy równoważnik pieniężny, tzn. wartość w potocznym sensie tego wyrazu. Na przykład wartość 20 wagonów węgla wynosi 15 000 zł. Wymiarem wartości W jest więc złoty. Sprawdzamy, że tak przyjęte liczności N i wartość W partii węgla spełniają wszystkie warunki 1^0-4^0.

Weźmy inny przykład. Uważajmy za partię towaru 1000 beczek wina, z których *nie wszystkie* beczki zawierają wino *tego samego gatunku*. Za dodawanie $\cup$ uważajmy zlewanie wina, na przykład 20 litrów i 30 litrów, niekoniecznie z tej samej beczki. Za liczność N uważajmy ilość litrów wina. Wymiarem liczności N jest więc litr. Za wartość W tej partii lub jej części uważajmy równoważnik pieniężny, tzn. wartość w potocznym sensie tego wyrazu. Na przykład niech 1000 beczek wina będą warte 750 000 zł. Wymiarem wartości W jest więc złoty. Otóż tak określone wielkości N i W *nie* spełniają wszystkich warunków 1^0-4^0, a mianowicie nie jest spełniony warunek $4''$. W handlu winem przyjęto bowiem, że za mieszaninę dwóch gatunków win płaci się nie zawsze tyle, ile wynosi suma wartości składników tej mieszaniny. Często przez zmieszanie dwóch drogich gatunków win można otrzymać gatunek kiepski i małowartościowy. Teoria, którą rozwiniemy, nie stosuje się więc do takich towarów, jak wspomniane 1000 beczek wina *różnego gatunku*.

Można by postulaty teorii tak sformułować, by obejmowały również i takie przypadki, jak powyższy. Nie robimy tego jednak tutaj, ponieważ, jak wspomnieliśmy, zależy nam jedynie na przedstawieniu metody, a nie na zwiększaniu jej ogólności. Zresztą wydaje się nam, że w wielu praktycznych przypadkach badania wyrywkowego ma się do czynienia tylko z takimi towarami, jak np. węgiel, które spełniają wszystkie postulaty naszej teorii.

Zanim sformułujemy dalsze pojęcia i postulaty, uczynimy pewną uwagę metodologiczną. W każdej teorii aksjomatycznej nazwy są rzeczą czysto umowną i nie należy ulegać sugestii znaczenia potocznego tych nazw. A więc wyraz „wartość” może być użyty w tej teorii zarówno w swoim znaczeniu potocznym jak przenośnym. Istotne jest tylko to, czy pojęcie, które oznaczamy tym wyrazem, spełnia przyjęte przez nas warunki. Wartością partii może wobec tego być, na przykład, jej równoważnik pieniężny (np. partia rudy ma wartość 100 000 złotych), ale może być też co innego, na przykład ilość czystego produktu (np. całkowita ilość żelaza w rudzie wynosi 1000 ton). W najczęściej spotykanych zagadnieniach praktycznych za wartość partii uważa się właśnie równoważnik pieniężny tej partii. Ta okoliczność tłumaczy nazwę tego pojęcia, ale bynajmniej nie ogranicza jego ogólności.

Nazwa „liczność” jest również umowna. Na przykład za liczność partii węgla możemy przyjąć jego ciężar, za liczność partii drewna jego objętość, za liczność partii cegieł liczbę sztuk. Dla ogólności przyjęliśmy nazwę „liczność” niezależnie od poszczególnych konkretnych interpretacji.

Wymiar liczności N partii towaru lub jej części będziemy oznaczali symbolem „SZTUKA”. A więc

$$[N] = \text{SZTUKA}.$$

Wymiar wartości W partii towaru lub jej części będziemy oznaczali symbolem „ZŁOTY”. A więc

$$[W] = \text{ZŁOTY}.$$

Powyższe nazwy „SZTUKA” i „ZŁOTY” są oczywiście również zupełnie umowne.

Jeżeli, na przykład, za liczność partii węgla przyjmiemy ciężar tej partii, to byłoby może praktyczniej wymiar liczności nazwać toną. Jeżeli, na przykład, za liczność partii drzewa przyjmiemy objętość tej partii, to byłoby może praktyczniej wymiar liczności nazwać m^3. Jeżeli, na przykład, za liczność partii cegieł przyjmiemy ilość cegieł w tej partii, to jest praktycznie nazwać wymiar liczności „sztuką”. Dla ogólności rozumowania przyjmiemy jednak nazwę „SZTUKA”, niezależnie od poszczególnych konkretnych interpretacji.

Podobnie przedstawia się sprawa z nazwą „ZŁOTY”. Jeżeli, na przykład, za wartość partii jaj będziemy uważali równoważnik pieniężny tej partii, to jest praktycznie wymiar wartości nazwać złotym. Jeżeli zaś, na przykład, za wartość tejże partii jaj będziemy uważali ilość jaj świeżych, to byłoby praktyczniej nazwać wymiar wartości tej partii „jajo świeże”. Dla ogólności rozumowania przyjmiemy jednak nazwę „ZŁOTY”, niezależnie od poszczególnych konkretnych interpretacji.

Nazwy te są potrzebne jedynie dla ustalenia terminologii przy rozwiązywaniu różnych zagadnień. Po rozwiązaniu tych zagadnień możemy w obliczeniach praktycznych używać dowolnie nazwanych jednostek zgodnie z charakterem samego zagadnienia, albo nawet w ogóle nie używać jednostek.

Wprowadzamy teraz dalsze pojęcia. *Próbką* towaru nazywamy pewien wyróżniony podzbiór ω partii towaru. Próbka towaru powinna mieć następujące własności:

Niech $\omega_1, \omega_2, \ldots$ będą podzbiorami zbioru ω czyli częściami próbki towaru; przyjmiemy, że umiemy dodawać te części próbki i że wynikiem tego dodawania jest zawsze znowu część próbki (lub cała próbka). Dodawanie to oznaczymy symbolem $\vee$.

Dodawanie $\vee$ części próbki nie musi być takie samo, jak dodawanie $\cup$ części partii.

Zakładamy, że dla wszystkich części każdej próbki z tej samej partii towaru określono dwie *miary*, które oznaczymy literami n i w, i które spełniają następujące warunki:

5° Miary n i w są wielkościami mianowanymi.

6° Miary n wszystkich części tej samej próbki mają wspólny wymiar i miary w wszystkich części tej samej próbki mają wspólny wymiar.

7° Wielkości n, w, N, W są wymiarowo niezależne.

8° Jeżeli ω_1 i ω_2 są częściami rozłącznymi tej samej próbki ω, to

8′ $n(\omega_1 \vee \omega_2) = n(\omega_1) + n(\omega_1)$,

8″ $w(\omega_1 \vee \omega_2) = w(\omega_1) + w(\omega_2)$.

Wielkość $n(\omega)$ nazywamy *licznością próbki* ω, a wielkość $w(\omega)$ nazywamy *wartością próbki* ω.

Wyjaśnimy te pojęcia i przyjęte postulaty na przykładach. Zgodnie z naszymi warunkami porcja węgla o objętości 1 cm³, pobrana w odpowiedni sposób z partii 20 wagonów węgla, zmielona i zbrykietowana, jest próbką. Za dodawanie $\vee$ dwóch części tej próbki możemy uważać zbrykietowanie dwóch brykiecików w jeden. Za liczność n tej próbki uważajmy objętość tego brykiecika. Wymiarem liczności n jest na przykład cm³. Za wartość w tej próbki uważajmy ilość ciepła, którą uzyskuje się przez spalenie tej próbki. Wymiarem wartości w jest więc np. kaloria. Sprawdzamy, że jeżeli za liczność N partii węgla przyjmiemy ciężar tej partii, a więc za wymiar liczności N przyjmiemy np. tonę, i jeżeli za wartość W partii węgla przyjmiemy jej równoważnik pieniężny, a więc za wymiar wartości W przyjmiemy np. złoty, to liczność n i wartość w próbki spełniają wszystkie postulaty 5°-8°, bo cm³, kal, tona i zł są wymiarowo niezależne.

Mogłoby się wydawać wątpliwe, czy postulat 7° musi być w tym przykładzie zawsze spełniony. Moglibyśmy przecież za liczność n próbki uważać nie *objętość* brykiecika mierzoną w cm³, lecz jego *ciężar*, mierzony np. w gramach; w ten sposób wielkość N (mierzona w tonach) i wielkość n (mierzona w gramach) byłyby wymiarowo zależne, ponieważ tona $= 10^6$ gramów, i postulat 7° nie byłby spełniony. Otóż nawet w tym przypadku będziemy uważali liczność n próbki za wielkość *wymiarowo niezależną* od liczności N partii. Dla uniknięcia nieporozumień moglibyśmy wtedy oznaczyć wymiar $[N]$ liczności partii symbolem TONA, a wymiar $[n]$ liczności próbki symbolem g, aby podkreślić *niezależność* wymiarową tych wielkości. Istotna jest tutaj ta okoliczność, że nigdy nie będziemy korzystali w takich przypadkach z tego, że 1 TONA $= 10^6$ gramów.

Kształt wzorów, które wyprowadzimy, nie będzie zależał od tego, czy próbkę węgla mierzymy w cm^3 czy w gramach, a partię w tonach lub kilogramach, ani też od tego, ile gramów próbki mieści się w Tonie towaru. Praktycznie rzecz biorąc, nie wiadomo przecież dokładnie, ile gramów węgla jest w 20 wagonach i nigdy takich obliczeń się nie dokonuje. My zaś nie będziemy ich dokonywali ze względów zasadniczych, ponieważ liczność N partii i liczność n próbki uważamy za wielkości wymiarowo niezależne. Tego właśnie wymaga postulat 7°.

Wymiar liczności n próbki będziemy oznaczali symbolem „sztuka". A więc

$$[n] = \text{sztuka}.$$

Wymiar wartości w próbki będziemy oznaczali symbolem „złoty". A więc

$$[w] = \text{złoty}.$$

Powyższe nazwy „sztuka" i „złoty" są zupełnie umowne i nie należy poddawać się sugestii ich znaczeń potocznych.

Jeżeli na przykład za liczność próbki wziętej z partii liczącej 1500 kg drutu przyjmiemy długość drutu w próbce, to byłoby może praktyczniej wymiar liczności tej próbki nazwać cm. Jeżeli za liczność próbki wziętej z partii liczącej 10000 sztuk żarówek przyjmiemy ilość żarówek w próbce, np. 70 sztuk, to jest praktycznie nazwać wymiar liczności sztuką. Dla ogólności rozumowania przyjmiemy jednak nazwę „sztuka", niezależnie od poszczególnych konkretnych interpretacji.

Podobnie przedstawia się sprawa z nazwą „złoty". Jeżeli na przykład za wartość próbki wziętej z partii liczącej 10000 żarówek (jednakowej mocy) przyjmiemy czas ich świecenia aż do przepalenia się, to byłoby może praktyczniej wymiar wartości tej próbki nazwać godziną. Jeżeli za wartość próbki wziętej np. z 7000 metrów płótna będziemy uważali jej wartość w potocznym znaczeniu tego wyrazu, tzn. równoważnik pieniężny mierzony w złotych, to jest praktycznie wymiar wartości tej próbki nazwać „złoty".

W większości przypadków założenie o niezależności wymiarowej między wartością próbki a wartością partii znajduje wyraz w tym, że na ogół w badaniu próbki wyznacza się bezpośrednio inną cechę niż ta, która nas interesuje w całej partii towaru. Na przykład w badaniu wyrywkowym węgla wyznacza się w laboratorium wartość opałową próbki a nie jej wartość pieniężną, gdyż wartość pieniężną określa personel handlowy. W badaniu wyrywkowym żarówek mierzy się w laboratorium czas świecenia tych żarówek a nie to, po ile złotych ma się żarówki sprzedawać.

Ale nawet w tych przypadkach, gdy badana cecha próbki jest ta sama co interesująca nas cecha całej partii (np. gdy badamy zawartość acetylenu w próbce karbidu, aby wyznaczyć zawartość acetylenu w partii karbidu), będziemy konsekwentnie i skrupulatnie odróżniali wymiar wartości partii od wymiaru wartości próbki. Czynimy to ze względów zasadniczych, tego bowiem wymaga postulat 7°. A więc w przykładzie z karbidem powinniśmy wymiar zawartości acetylenu w próbce karbidu oznaczyć inaczej, np. gram (przez małe g), niż wymiar zawartości acetylenu w partii karbidu, np. Kilogram (przez duże K), aby podkreślić, że nigdy nie będziemy przy wyprowadzaniu wzorów korzystali z tego, że $1\ \mathrm{Kg} = 10^3\ \mathrm{g}$.

Najistotniejszym z dotychczasowych założeń jest to, że wielkości: liczność N partii, wartość W partii, liczność n próbki i wartość w próbki są wymiarowo niezależne. Zakładamy nadto, że te cztery wielkości N, W, n, w tworzą układ jednostek teorii badania wyrywkowego w sensie określonym w analizie wymiarowej[3]).

Uwaga. Postulaty 1°-8°, za pomocą których wprowadziliśmy liczność i wartość próbki i partii, znane są w matematyce w abstrakcyjnej teorii miary. Partia i próbka towaru mogą być nawet czymś ogólniejszym niż zbiór, mogą to być elementy jakiegoś ciała Boole'a. Ze względów dydaktycznych nie wprowadzamy jednak tych uogólnień, które dla matematyka są oczywiste, chociaż, co warto zauważyć, nie są bez znaczenia dla praktyki. Na przykład może nie być obojętne, czy zanieczyszczenia węgla zaliczyć do partii towaru czy nie, jeżeli partię towaru będziemy uważali za zbiór. Jest to natomiast rzeczą obojętną, gdy partię towaru uważamy za element ciała Boole'a.

Na podstawie wprowadzonych powyżej pojęć i przyjętych postulatów zdefiniujemy dalsze pojęcia, które będą potrzebne w teorii.

Stosunek wartości W części Ω_0 partii (lub całej partii) do liczności N tejże części Ω_0 nazywamy *ceną C partii* lub *ceną handlową*:

$$\frac{W}{N} = C. \tag{1}$$

Stosunek wartości w części ω_0 próbki (lub całej próbki) do liczności n tejże części ω_0 nazywamy *ceną c próbki* lub *ceną laboratoryjną*:

$$\frac{w}{n} = c. \tag{2}$$

---

[3]) Patrz [2], str. 235.

Przyjęte przez nas definicje cen C i c można by uogólnić. Zamiast ceny globalnej można by wprowadzić „gęstość" wartości i na przykład przyjąć

$$W = \int_{\Omega_0} C\,dN, \qquad w = \int_{\omega_0} c\,dn,$$

gdzie $C(N)$ i $c(n)$ byłyby pewnymi zadanymi funkcjami mianowanymi, zależnymi odpowiednio od N i od n. Nie będziemy się jednak zatrzymywali na tych uogólnieniach, ponieważ łatwo je wykonać, jeżeli zajdzie potrzeba. Istotną rzeczą jest dla nas *wymiar* obu tych cen jednakowy dla różnych tych definicji.

Zgodnie z definicjami (1) i (2) ustalamy wymiar cen C i c, a mianowicie

(3) $$[C] = \text{ZŁOTY} \cdot \text{SZTUKA}^{-1}, \qquad [c] = \text{złoty} \cdot \text{sztuka}^{-1}.$$

Tak zdefiniowane pojęcia ceny partii i ceny próbki są znacznie ogólniejsze niż ich nazwa wskazuje. Zilustrujemy to na przykładach.

Jeżeli na przykład za wartość partii będziemy uważali jej ciężar, a za liczność jej objętość, to ceną partii będzie jej ciężar właściwy. Jeżeli za wartość partii będziemy uważali jej wartość pieniężną, a za liczność jej ciężar, to ceną partii będzie cena w potocznym znaczeniu tego wyrazu. Jeżeli za wartość próbki węgla będziemy uważali ilość ciepła wydzieloną przy spaleniu, a za liczność próbki objętość brykieciku, to ceną laboratoryjną będzie ilość ciepła na jednostkę objętości. Jeżeli na przykład za wartość próbki jaj będziemy uważali liczbę jaj świeżych, a za liczność próbki liczbę jaj w próbce, to za cenę próbki będziemy uważali frakcję jaj świeżych w próbce. W tym ostatnim przypadku moglibyśmy wymiar wartości próbki nazwać nie „złoty", lecz np. „jajo świeże", a wymiar liczności próbki nazwać nie „sztuka", lecz np. „jajo" i wtedy wymiar ceny próbki byłby „jajo świeże/jajo". Utrzymujemy jednak w teorii ogólnej — powtarzamy to jeszcze raz — przyjęte nazwy SZTUKA, ZŁOTY, sztuka, złoty. W zastosowaniach praktycznych można nazywać te wymiary inaczej, według upodobania.

Sformułujemy teraz dalsze założenia. Przyjmujemy mianowicie, że ustalono pewien sposób przerachowania ceny laboratoryjnej c na cenę handlową C. Dla uproszczenia założymy na przykład, że cena handlowa C jest funkcją liniową ceny laboratoryjnej c, to znaczy

(4) $$C = qc + C_0,$$

gdzie q i C_0 są wielkościami stałymi dla danej partii towaru. Z definicji (4) widać od razu, że wielkość C_0 ma wymiar ceny handlowej. Wielkość C_0 możemy interpretować np. jako stały koszt nakładowy. Wielkość q ma wymiar

(5) $$[q] \Rightarrow \text{ZŁOTY} \cdot \text{SZTUKA}^{-1} \cdot \text{złoty}^{-1} \cdot \text{sztuka}.$$

Wielkość q określoną wzorem (4) nazywamy *współczynnikiem przerachowania*.

Na przykład, niech wartość opałowa 1 cm³ węgla zbadana w laboratorium wynosi 30 kalorii, tak że cena laboratoryjna c próbki węgla wynosi 30 kaloria/cm³; stała cena nakładowa C_0 wynosi 4 Złoty/Tona (tzn. do ceny każdej tony węgla dolicza się 4 zł. np. za amortyzację urządzeń laboratorium), a współczynnik przerachowania q wynosi 2 Złoty · Tona^{-1} · kaloria^{-1} · cm³. Cena handlowa tej partii węgla wynosi

$$C = 2 \text{ Złoty} \cdot \text{Tona}^{-1} \cdot \text{kaloria}^{-1} \cdot \text{cm}^3 \cdot 30 \text{ kaloria cm}^{-3} + 4 \text{ Złoty} \cdot \text{Tona}^{-1} = $$
$$= 64 \text{ Złoty} \cdot \text{Tona}^{-1}.$$

Założenie wyrażone wzorem (4) nie jest oczywiście jedynym możliwym do pomyślenia i odpowiednim we wszystkich przypadkach spotykanych w praktyce. Można w tej sprawie przyjąć inne założenia. Na przykład uważajmy za cenę laboratoryjną c kwasu siarkowego jego stężenie; w praktyce przyjmuje się, że cena handlowa C tego kwasu *nie* jest funkcją liniową stężenia c. Zamiast zależności (4) można by wprowadzić inną, ogólniejszą, postaci

(4′) $$C = q_0 c^{m_0} + q_1 c^{m_1} + \ldots + C_0,$$

gdzie $q_0, q_1, \ldots$ i C_0 są pewnymi stałymi wielkościami mianowanymi, które by można było nazwać *współczynnikami przerachowania*, a $m_0, m_1, \ldots$ pewnymi stałymi liczbami rzeczywistymi. Wzór typu (4′) można zawsze dobrać do każdego praktycznego przypadku.

Nie będziemy jednak rozwijali teorii przy założeniu (4′) lecz dla konkretności ograniczymy się w dalszym ciągu do zależności (4), która odpowiada wielu przypadkom spotykanym w praktyce.

Określimy teraz *wartość średnią w partii* i *wartość średnią w próbce*.

Niech Ω_1 będzie częścią partii Ω. Jeżeli N_1 jest licznością części Ω_1, N licznością całej partii Ω, której wartością jest W, a C jest ceną partii, to wielkość

(6) $$\overline{W} = W \frac{N_1}{N} = C N_1$$

nazywamy *wartością średnią części Ω_1 w partii*. Na podstawie tej definicji wymiar wartości średniej $\overline{W}$ w partii jest

$$[\overline{W}] = [W] = \text{ZŁOTY}.$$

Jak widać ze wzoru (6), części o jednakowych licznościach mają tę samą wartość średnią w partii.

Analogicznie definiujemy *wartość średnią* $\overline{w}$ *części* ω_1 o liczności n_1 *w próbce* ω o liczności n i wartości w, gdy ceną próbki jest $c = w/n$:

$$\overline{w} = w\frac{n_1}{n} = cn_1. \tag{7}$$

Wartość średnia $\overline{w}$ w próbce ma więc wymiar

$$[\overline{w}] = [w] = \text{złoty}.$$

Jak widać ze wzoru (7), części o jednakowych licznościach mają tę samą wartość średnią w próbce.

Przechodzimy teraz do omówienia jeszcze innego pojęcia, mającego podstawowe znaczenie w teorii badania wyrywkowego, mianowicie do wielkości, która jest miarą *rozrzutu* wartości w partii lub w próbce. Zdefiniujemy szczegółowo tylko miarę rozrzutu wartości w partii, ponieważ dla próbki definicja jest zupełnie analogiczna.

Niech na przykład partia Ω towaru składa się z rozłącznych części $\Omega^1, \Omega^2, \ldots$ o jednakowych licznościach. A więc

$$\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \ldots$$

Niektóre z tych części mogą mieć jednakowe wartości. Niech N_1 będzie łączną licznością tych części, z których każda ma wartość W_1, a N_2 łączną licznością tych części, z których każda ma wartość W_2 itd. W ten sposób podzielimy wszystkie części partii na grupy. Niech będzie ν takich grup. Jeżeli więc N oznacza liczność całej partii Ω, to

$$N = N_1 + N_2 + \ldots + N_\nu.$$

Ponieważ założyliśmy, że liczności wszystkich części Ω^1, $\Omega^2, \ldots$ są jednakowe, więc z wzoru (6) wynika, że wartości średnie tych części w partii Ω są jednakowe. Oznaczmy tę wspólną wartość średnią literą $\overline{W}$.

Zdefiniujemy następującą wielkość mianowaną:

$$D = \sqrt{\frac{N_1(W_1 - \overline{W})^2 + N_2(W_2 - \overline{W})^2 + \ldots + N_\nu(W_\nu - \overline{W})^2}{N}}. \tag{8}$$

Jak łatwo spostrzec, wielkość D ma wymiar

$$[D] = \text{ZŁOTY}.$$

Dyspersją S *wartości w partii* nazywamy wielkość mianowaną

$$S = \frac{D}{\sqrt{N}}. \tag{9}$$

Tak określona miara rozrzutu jest odpowiednikiem używanej w statystyce dyspersji wartości średniej.

Z wzoru (9) wynika wymiar dyspersji:

$$[S] = \frac{\text{ZŁOTY}}{\sqrt{\text{SZTUKA}}}. \tag{10}$$

Definicja powyższa jest dla praktyki zupełnie wystarczająca. Można ogólniej określić miarę rozrzutu wartości w partii i pokazać, jakie fakty statystyczne są tu istotne[4]).

Podobnie definiujemy dyspersję s wartości w próbce, tworząc analogiczną do D wielkość d. Otrzymujemy w ten sposób

$$s = \frac{d}{\sqrt{n}}, \tag{11}$$

gdzie n jest licznością próbki. Wymiarem dyspersji s jest

$$[s] = \frac{\text{złoty}}{\sqrt{\text{sztuka}}}. \tag{12}$$

Zajmiemy się jeszcze pewnym szczególnym przypadkiem obliczenia dyspersji wartości w partii lub w próbce, mającym znaczenie w zastosowaniach.

Wzór (8) można napisać w postaci prostszej, jeżeli założymy, że $= 2$ i $W_2 = 0$, to znaczy, że w partii są tylko dwa rodzaje części: „dobre" o wartości W_1 każda i „złe" o wartości 0. Mamy wtedy bowiem

$$D = \sqrt{\frac{N_1(W_1 - \overline{W})^2 + (N - N_1)\overline{W}^2}{N}}, \qquad \overline{W} = \frac{N_1 W_1}{N},$$

po uporządkowaniu $D = W_1\sqrt{\Gamma(1-\Gamma)}$, gdzie $\Gamma = N_1/N$. Stąd

$$S = \sqrt{\Gamma(1-\Gamma)}\frac{W_1}{\sqrt{N}}.$$

Niech np. Ω będzie partią towaru o liczności N i niech wymiarem tej liczności będzie $[N] =$ SZTUKA. Niech miarą wartości w tej partii będzie liczba „SZTUK DOBRYCH". Zatem $W_1 = 1$ SZTUKA DOBRA. Wtedy Γ jest frakcją sztuk dobrych w partii.

Przypadek powyższy ma duże zastosowanie w badaniu wyrywkowym, w którym zasadą jest decyzja: przyjąć albo odrzucić. Czasem zamiast wartości o wymiarze SZTUKA DOBRA używa się innej wartości o wymiarze SZTUKA ZŁA. Wtedy Γ nazywa się *wadliwością partii.*

Analogiczny wzór zachodzi dla próbki.

---

[4]) Patrz [3], str. 19-26.

Na zakończenie tego rozdziału sformułujemy jeszcze niektóre pojęcia podstawowe i postulaty mające charakter ekonomiczny. Postulujemy przede wszystkim, że badanie wyrywkowe towarów kosztuje. Gdyby badanie odbywało się za darmo, nie trzeba by stosować badania wyrywkowego, lecz byłoby rozsądniej zbadać całą partię. Wprowadzamy zatem pojęcie podstawowe *kosztu badania B*. Pojęcie kosztu badania rozumiemy znacznie szerzej niż potoczne znaczenie tej nazwy wskazuje. Wszelką stratę ekonomiczną spowodowaną procesem badania będziemy uważali za koszt B. Zakładamy następnie, że *za koszt badania B płacimy tymi samymi środkami płatniczymi co za sam towar*. To założenie ma uzasadnienie wzięte z praktyki. Bardzo często mianowicie badanie towaru niszczy sam towar, tzn. zmniejsza jego wartość. Nieraz koszt badania jest związany ze stratą czasu, a w stosunkach ekonomicznych uznaje się przeważnie zasadę, że czas to pieniądz, która wprawdzie z punktu widzenia analizy wymiarowej może budzić zastrzeżenia (bo wymiary czasu i pieniądza są niezależne), ale w praktyce strata czasu powoduje często straty pieniężne. Na koszt badania mogą się składać jeszcze inne wydatki, na przykład zapłata za robociznę, amortyzacja urządzeń badawczych itp. Wszystkie te wydatki będziemy mierzyli tą samą jednostką co wartość towaru. Innymi słowy, zakładamy, że *wymiarem kosztu badania B jest* ZŁOTY, a więc

$$[B] = \text{ZŁOTY}.$$

Powiemy np., że wartość całej partii pewnego towaru jest 250 000 ZŁOTYCH, a badanie tej partii kosztuje 1000 ZŁOTYCH, a mianowicie takich samych ZŁOTYCH, jakimi płacimy za towar.

Ceną k badania próbki o liczności n nazywamy wielkość

$$k = \frac{B}{n}. \tag{13}$$

Cena k badania próbki ma zatem wymiar

$$[k] = \text{ZŁOTY} \cdot \text{sztuka}^{-1}. \tag{14}$$

Na tym kończymy niniejszy rozdział omawiający pojęcia podstawowe, postulaty i definicje pojęć potrzebnych do sformułowania ogólnych zasad teorii badania wyrywkowego towarów. Nie trudno spostrzec, że towar jest tutaj tylko konkretną interpretacją pewnego materiału doświadczalnego i że teorię, którą rozwijamy, można bez istotnych zmian zastosować do każdej *metody reprezentacji*.

III. O liczności próbki

Jednym z najważniejszych zagadnień w teorii badania wyrywkowego jest kwestia, jaka ma być liczność próbki. Tak postawione pytanie jest oczywiście niesprecyzowane dopóty, dopóki nie podamy warunków, jakie ma ta liczność spełniać. O warunkach tych pomówimy w rozdziale IV. W niniejszym zaś rozdziale pokażemy jednak w różnych konkretnych przypadkach, jak na podstawie naszej teorii można uzyskać kształt wzorów, które wyrażają liczność próbki, gdy tylko wiemy, od jakich wielkości ma zależeć liczność n, bez względu na to, jakie warunki poza tym ma spełniać ta liczność.

Przypominamy oznaczenia pojęć, którymi będziemy się posługiwali oraz ich wymiary.

TABLICA 1

L. p.	Nazwa wielkości	Oznaczenie	Wymiar			
			szt$^{\alpha_1}$	szt$^{\alpha_2}$	zł$^{\alpha_3}$	zł$^{\alpha_4}$
			α_1	α_2	α_3	α_4
1	Liczność partii	N	1	0	0	0
2	Liczność próbki	n	0	1	0	0
3	Wartość partii	W	0	0	1	0
4	Wartość próbki	w	0	0	0	1
5	Cena partii	C	-1	0	1	0
6	Cena próbki	c	0	-1	0	1
7	Współczynnik przerachow.	q	-1	1	1	-1
8	Rozrzut wartości w partii	S	$-1/2$	0	1	0
9	Rozrzut wartości w próbce	s	0	$-1/2$	0	1
10	Cena badania próbki	k	0	-1	1	0

Rozwiążemy dla przykładu niektóre zagadnienia dotyczące liczności n próbki. W zagadnieniach tych będziemy zakładali tylko, od jakich wielkości charakteryzujących partię lub próbkę ma zależeć liczność n próbki. Przyjmujemy przykładowo, że wielkościami tymi, od których może zależeć liczność n próbki, są niektóre z wielkości wyszczególnionych w tablicy 1. Można by oczywiście zdefiniować jeszcze inne wielkości oprócz wymienionych w tablicy 1 i również od nich uzależnić liczność n próbki, ale tego nie będziemy tu robili, ponieważ — jak wspominaliśmy — idzie nam jedynie o zilustrowanie metody, a nie o szczegółową dyskusję merytoryczną jej założeń i wyników. To ostatnie powinno być przedmiotem osobnych badań.

Pod względem wyboru różnych wielkości wypisanych w tablicy 1, od których uzależnimy wielkość próbki, podzielimy zagadnienia, jakie sformułujemy i rozwiążemy, na dwie grupy.

Do pierwszej grupy zaliczymy te zagadnienia, w których liczność n próbki zależy od jednego z rozrzutów s lub S i — oczywiście — jeszcze być może od innych wielkości z tablicy 1.

Do drugiej grupy zaliczamy te zagadnienia, w których wielkość n próbki nie zależy od żadnego z rozrzutów, ani s, ani S, natomiast może zależeć od innych wielkości (z tablicy 1).

Podział ten ma głębsze uzasadnienie. Jak wynika z rozważań rozdziału II, w zagadnieniach pierwszej grupy korzystamy z postulatów dotyczących miar rozrzutu, a w zagadnieniach drugiej grupy z nich nie korzystamy. Zagadnienia pierwszej grupy nazywamy *zagadnieniami typu statystycznego*, a drugiej grupy — *zagadnieniami typu niestatystycznego*.

W praktyce badania wyrywkowego stosuje się różne wzory na liczność n próbki. Niektóre z tych wzorów uzasadnia się metodami statystyki matematycznej i rachunku prawdopodobieństwa, a o innych mówi się, że są wzięte z doświadczenia. Celem niniejszego rozdziału jest wyprowadzenie metodami naszej teorii różnych wzorów na liczność n próbki; wśród nich będą również wszystkie znane nam wzory stosowane w praktyce, zarówno te, o których się mówi, że są wzięte z doświadczenia, jak i te, które uzasadnia się metodami statystyki matematycznej i rachunku prawdopodobieństwa; nadto wyprowadzimy jeszcze inne wzory.

Sformułujemy teraz i rozwiążemy dla przykładu niektóre zagadnienia pierwszej grupy, tzn. takie, że wśród wielkości, od których ma zależeć liczność n próbki, jest rozrzut s lub S.

1.1. Załóżmy, że liczność n próbki zależy tylko od liczności N partii, ceny badania k próbki, rozrzutu s wartości w próbce i współczynnika przeliczenia q. A zatem

$$n = \Phi(N, k, s, q), \tag{15}$$

gdzie Φ jest pewną funkcją mianowaną. Pytamy, jaki jest kształt funkcji Φ.

Przed rozwiązaniem zadania omówimy sens przyjętych założeń.

Jeżeli zakładamy, że liczność n próbki zależy od liczności N partii, to czynimy to widocznie dlatego, żeby dużą partię badać inaczej niż małą. Byłoby może lepiej uzależnić liczność n próbki nie tylko od liczności N partii, lecz również od ceny C partii, a tym samym od wartości partii $W = CN$. Zrobimy to jednak w następnym przykładzie.

Jeżeli zakładamy, że liczność n próbki zależy od ceny badania k, to widocznie dlatego, że liczymy się z kosztem badania $B = kn$ i nie chcemy, żeby ten koszt badania był np. zbyt duży i zniweczył efekt ekonomiczny samego badania. Możemy mieć również inne powody.

Jeżeli uzależniamy liczność n próbki od miary rozrzutu s wartości w próbce, to widocznie dlatego, że na podstawie wyników badania *próbki* chcemy mieć informacje o całej *partii*. Możemy to robić ze zwykłej ostrożności, z braku zaufania do kontrahenta lub z innych jeszcze powodów.

Wreszcie założenie, że argumentem funkcji Φ jest współczynnik przerachowania q, ma znaczenie dla samej techniki badania. Przypominamy jednak, że założenie (4) w rozdziale II było wzięte przykładowo.

Przechodzimy teraz do wyznaczenia kształtu funkcji Φ.

Sprawdzamy, że argumenty tej funkcji N, k, s, q są wymiarowo niezależne. Mianowicie obliczamy posługując się tablicą 1, że

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \neq 0.$$

Na podstawie twierdzenia π analizy wymiarowej[5]) jest więc

$$n = aN^{a_1}k^{a_2}s^{a_3}q^{a_4}, \tag{16}$$

gdzie a jest stałą liczbową dodatnią, a_1, a_2, a_3, a_4 liczbami rzeczywistymi, które należy obliczyć. Stąd wynika, że

$$[n] = [N]^{a_1}[k]^{a_2}[s]^{a_3}[q]^{a_4}.$$

Podstawiając za $[n]$, $[N]$, $[k]$, $[s]$, $[q]$ odpowiednie wymiary wzięte z tablicy 1 i porównując wykładniki przy jednostkach układu „SZTUKA, sztuka, ZŁOTY, złoty”, otrzymujemy następujące równania:

$$a_1 - a_4 = 0, \qquad a_2 + a_4 = 0, \qquad -a_2 - \frac{1}{2}a_3 + a_4 = 1, \qquad a_3 - a_1 = 0,$$

które mają rozwiązania

$$a_1 = a_3 = a_4 = \frac{2}{3}, \qquad a_2 = \frac{2}{3}.$$

Podstawiając je do (16) otrzymujemy ostatecznie

$$n = a\left(\frac{Nqs}{k}\right)^{2/3}, \tag{17}$$

gdzie a jest stałą liczbową dodatnią niezależną od N, q, s, k, o której na podstawie naszej teorii nic nie możemy powiedzieć. Wzór (17) w przy-

[5]) Patrz [2], str. 246.

padku $q=1$ ZŁOTY·SZTUKA^{-1}·złoty^{-1}·sztuka wyprowadził metodami statystyki matematycznej H. Steinhaus[6]) otrzymując

$$n=\left(\frac{Ns}{5k}\right)^{2/3}$$

Pozostaje więc nierozstrzygniętą kwestia, jak wyznaczyć stały współczynnik α. Sprawę tę, która dotyczy wszystkich wzorów wyprowadzonych metodami tej teorii, omówimy w rozdziale IV.

1.2. Rozpatrzmy teraz inne zadanie, ogólniejsze niż 1.1. Załóżmy, że liczność n próbki zależy nie tylko od liczności N partii, od ceny badania k, od rozrzutu s wartości w próbce i od współczynnika przerachowania q, lecz nadto jeszcze od ceny C partii. A zatem

$$n=\Phi(N,k,s,q,C), \tag{18}$$

gdzie Φ jest pewną funkcją mianowaną, której kształt mamy wyznaczyć.

Założenie, że liczność n próbki zależy również od ceny C partii, przyjmujemy widocznie dlatego, że partie droższe chcemy inaczej badać niż partie tańsze. Wspomnieliśmy o tym w zadaniu 1.1. O ile nam wiadomo, założenia takiego nie wprowadza się w teorii badania wyrywkowego opartej na statystyce matematycznej prawdopodobnie dlatego, że w rozwiązywaniu takiego zadania metodami statystyki matematycznej trudności rachunkowe byłyby zbyt duże.

Przechodzimy do wyznaczenia kształtu funkcji Φ. Ponieważ sprawdziliśmy już rachunkiem, że wielkości N,k,s,q są wymiarowo niezależne, więc według twierdzenia analizy wymiarowej cena C partii musi się wyrażać za pomocą N,k,s,q. Korzystając z tablicy 1 otrzymujemy po prostych rachunkach

$$C=\beta_1\left(\frac{kq^2s^2}{N}\right)^{1/3},$$

gdzie β_1 jest liczbą niemianowaną, która wynosi

$$\beta_1=CN^{1/3}(kq^2s^2)^{-1/3}. \tag{19}$$

Na mocy twierdzenia π analizy wymiarowej jest więc

$$n=\varphi(\beta_1)\left(\frac{Nqs}{k}\right)^{2/3}, \tag{20}$$

gdzie $\varphi(\beta_1)$ jest funkcją liczbową zmiennej liczbowej β_1, o której na podstawie naszej teorii nic nie możemy powiedzieć, chyba tyle tylko, że

[6]) Patrz [4], str. 3.

$\varphi(\beta_1)>0$. Ale nawet nie znając kształtu funkcji $\varphi(\beta_1)$ uzyskaliśmy ważny wynik, że funkcja ta zależy od specjalnego zespołu zmiennych napisanego w (19). Parametr

$$\beta_1 = CN^{1/3}k^{-1/3}q^{-2/3}s^{-2/3}$$

jest parametrem charakterystycznym tej metody badania. Innymi słowy, jeżeli przy badaniu różnych partii różnych towarów wielkości C, N, k, q, s będą różne, ale obliczony dla nich parametr β_1 będzie jednakowy, to współczynnik $\varphi(\beta_1)$ dla wszystkich tych partii będzie jednakowy. Parametr β_1 nazywamy *kryterium podobieństwa* partii towarów dla ustalonej metody badania, tzn. przy ustaleniu, od których wielkości (np. C, N, k, q, s) zależy metoda badania.

Możemy jednak przyjąć dość ogólne dodatkowe założenia o funkcji $\varphi(\beta_1)$ i wtedy otrzymamy jej dokładniejszą postać. Na przykład możemy założyć, że funkcję $\varphi(\beta_1)$ można rozwinąć w szereg potęgowy około punktu $\beta_1=0$ i ograniczyć się do kilku wyrazów tego szeregu. Jeżeli np. ograniczymy się tylko do pierwszych dwóch wyrazów, tzn. przyjmiemy

$$\varphi(\beta) = a_0 + a_1\beta_1,$$

gdzie a_0 i a_1 są pewnymi stałymi liczbami niemianowanymi, to z wzorów (19) i (20) otrzymamy

$$n = a_0\left(\frac{Nqs}{k}\right)^{2/3} + a_1\frac{NC}{k}. \tag{21}$$

Wzór (21) jest uogólnieniem wzoru (17) i przechodzi weń dla $a_1=0$, $a_0=a$. Godny uwagi jest drugi wyraz po prawej stronie wzoru (21). Korzystając z definicji (1) mamy

$$W = CN,$$

a więc wyraz dodatkowy $a_1 W/k$ jest proporcjonalny do wartości W partii i odwrotnie proporcjonalny do kosztów badania, co jest zgodne z intuicją.

Założenie o rozwijalności funkcji $\varphi(\beta_1)$ w szereg potęgowy nie jest oczywiście jedyne do pomyślenia. O kształcie funkcji $\varphi(\beta_1)$ można wnioskować na podstawie doświadczenia. Będzie o tym mowa w rozdziale IV.

Można by w ten sam sposób jak w zadaniach 1.1 i 1.2 przyjąć jako argumenty, od których ma zależeć liczność n próbki, oprócz N, k, q, s, C jeszcze inne wielkości, na przykład cenę nominalną C_0 partii, różną na ogół od ceny C wyznaczonej na podstawie badania próbki lub jeszcze inne. Otrzymalibyśmy tą samą metodą wzory, które by były dalszym uogólnieniem wzoru (20). Nie będziemy tego jednak robili i zajmiemy się innego rodzaju zagadnieniami pierwszej grupy.

1.3. Załóżmy, że liczność n próbki zależy od liczności N partii, ceny badania k i rozrzutu S wartości w partii.

Założenie to różni się od założeń zadania 1.1 przede wszystkim tym, że nie uwzględniamy rozrzutu s wartości w próbce, lecz rozrzut S wartości w całej partii. Jest to założenie ekonomicznie mniej ostrożne, niż założenie zadania 1.1, ponieważ na podstawie badania próbki możemy zmierzyć rozrzut s w próbce, ale nie rozrzut S w partii. Niektórzy przyjmują jednak, że znany jest skądinąd, na przykład na podstawie wielu poprzednich odbiorów od ustalonego kontrahenta, rozrzut S wartości w partii. Tak postępuje się np. w jednej z metod odbioru stosowanych w Stanach Zjednoczonych.

Założenia zadania 1.3 różnią się od założeń zadania 1.1 jeszcze tym, że nie przewidujemy zależności n od współczynnika przerachowania q. Można by sobie to intuicyjnie wytłumaczyć tym, że w założeniach tych nie przewidujemy właściwie rozrzutu s wartości badania poszczególnych sztuk w próbce. Ale takie tłumaczenie może się wydać niepewne, więc dla uniknięcia wątpliwości wprowadźmy współczynnik q jako argument, od którego również *a priori* może zależeć liczność n próbki i pozostawmy samemu formalizmowi rachunkowemu rozstrzygnięcie naszych wątpliwości.

A więc zakładamy, że

$$n = \Phi(N, S, k, q). \tag{22}$$

Aby wyznaczyć kształt funkcji Φ, stwierdzamy, że wielkości N, S, k, q są wymiarowo niezależne. Mianowicie obliczamy, posługując się tablicą 1, wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Jest więc, analogicznie jak w rozwiązaniu zadania 1.1,

$$[n] = [N]^{b_1}[S]^{b_2}[k]^{b_3}[q]^{b_4},$$

gdzie liczby rzeczywiste b_1, b_2, b_3, b_4 wyznaczamy w ten sposób, że podstawiamy za $[n], [N], [S], [k], [q]$ odpowiednie wymiary wzięte z tablicy 1 i porównujemy wykładniki przy jednostkach układu SZTUKA, sztuka, ZŁOTY, złoty. Otrzymujemy układ równań

$$b_1 - \frac{1}{2} b_2 - b_4 = 0, \qquad b_2 + b_3 + b_4 = 0, \qquad -b_3 + b_4 = 1, \qquad b_4 = 0,$$

którego rozwiązaniem jest

$$b_1 = \frac{1}{2}, \qquad b_2 = 1, \qquad b_3 = -1, \qquad b_4 = 0.$$

Wobec tego jest

$$n = \delta \frac{SN^{1/2}}{k}, \tag{23}$$

gdzie δ jest stałą liczbową dodatnią. Jak się okazało, liczność n próbki rzeczywiście nie zależy od współczynnika przeliczeniowego q.

Wzór (23) jest używany w praktyce i, jak nam wiadomo, nie uzasadnia się go metodami statystyki matematycznej.

Zwróćmy uwagę, że liczność n próbki obliczona z wzoru (17) jest, *caeteris paribus*, wyższego rzędu względem N niż liczność n próbki obliczona z wzoru (23), a stosunek obu tych liczności jest rzędu $N^{1/6}$. Jeżeli więc nie znamy rozrzutu S wartości w partii towaru, lecz tylko rozrzut s wartości w próbce, to musimy pobierać, ogólnie mówiąc, próbki większe. Za brak informacji o całej partii musimy płacić kosztem badania liczniejszych próbek. Jest to zgodne z intuicją.

1.4. Wzór (23) możemy uogólnić, zakładając podobnie jak w przykładzie 1.2, że n jest zależne nie tylko od N, S, k, lecz również od ceny C partii, tzn.

$$n = \Phi(N, S, k, C). \tag{24}$$

Wielkości N, S, k, C są wymiarowo zależne, ponieważ odpowiedni wyznacznik jest zerem:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Wobec tego wyrażamy C przez N, S, k i otrzymujemy

$$CN^{1/2}S^{-1} = \beta, \tag{25}$$

gdzie β jest liczbą niemianowaną. Rachunek przeprowadzony w zadaniu 1.3 daje więc uogólnienie wzoru (23):

$$n = \psi(\beta)\frac{SN^{1/2}}{k}, \tag{26}$$

gdzie $\psi(\beta)$ jest funkcją liczbową liczbowego parametru charakterystycznego β. Jeżeli założymy, że funkcja $\psi(\beta)$ daje się rozwinąć w szereg potęgowy i ograniczymy się do pierwszych dwóch wyrazów rozwinięcia, to otrzymamy

$$n = \delta_0 \frac{SN^{1/2}}{k} + \delta_1 \frac{CN}{k}, \tag{27}$$

gdzie δ_0 i δ_1 są stałymi liczbowymi.

W praktyce żąda się czasem, by wzór na liczność n próbki był taki, żeby: 1° gdy liczność N partii rośnie nieograniczenie, n było ograniczone, oraz 2° — co jest naturalne — gdy wartość $W=CN$ partii równa się zeru, n było równe zeru, ponieważ nie ma sensu badać towar bezwartościowy. Ze wzorów (25) i (26) wynika, że warunki te można napisać w następującej postaci:

$$\lim_{N\to\infty} \psi(\beta)\beta = \text{const} \neq 0, \qquad \psi(0)=0.$$

Jedną z najprostszych funkcji, które spełniają pierwszy z tych warunków, jest

$$\psi(\beta)\beta = \frac{\delta_4\beta^2+\delta_5\beta+\delta_6}{\delta_1\beta^2+\delta_2\beta+\delta_3},$$

gdzie $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_6$ są pewnymi stałymi liczbowymi. Z drugiego zaś warunku otrzymujemy, że musi być

$$\delta_5 = \delta_6 = 0,$$

i możemy zawsze przyjąć $\delta_4=1$. A zatem za funkcję $\psi(\beta)$ wybieramy

$$\psi(\beta) = \frac{\beta}{\delta_1\beta^2+\delta_2\beta+\delta_3}.$$

Podstawiając za β wartość ze wzoru (25) otrzymujemy na podstawie (26)

$$n = \frac{CNk}{\delta_1 C^2 N S^{-2} + \delta_2 C N^{1/2} S^{-1} + \delta_3},$$

co można jeszcze napisać w postaci

$$\frac{1}{n} = \delta_1\frac{kC}{S^2} + \delta_2\frac{k}{SN^{1/2}} + \delta_3\frac{k}{CN},$$

gdzie $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ są stałymi liczbowymi. Jeżeli przyjmiemy $\delta_1=\delta_3=0$, to otrzymamy wzór (23), jeżeli zaś przyjmiemy $\delta_2=0$, to otrzymamy wzór

$$\frac{1}{n} = \delta_3\frac{k}{CN} + \delta_1\frac{kC}{S^2}.$$

Jak nam zwrócił uwagę J. Oderfeld, wzór ten bywa używany w praktyce w postaci nieco mniej dokładnej.

Jeżeli wreszcie podstawimy $\delta_2=\delta_3=0$, to otrzymamy wzór

$$n = \delta_0\frac{S^2}{kC},$$

gdzie $\delta_0=1/\delta_1$ jest stałą liczbową. Wzór ten jest godny uwagi przez to, że nie zawiera w ogóle liczności N partii.

Można by wprowadzać w założeniach (22) lub (24) za argumenty jeszcze inne wielkości, zależnie od poglądów, i na drodze poprzednio wskazanej otrzymywać różne wzory. Nie będziemy tego jednak robili, ponieważ jest to kwestią tylko prostych rachunków.

1.5. Wyprowadzimy przykładowo jeden wzór przy bardzo uproszczonych założeniach typu statystycznego. Załóżmy mianowicie, że

$$n = \Phi(s, c), \tag{28}$$

czyli że liczność n próbki ma zależeć jedynie od rozrzutu s wartości w próbce i od ceny próbki, a nie ma zależeć ani od liczności N partii, ani od jej ceny, ani od ceny badania k.

Wtedy

$$n = \varepsilon\left(\frac{s}{c}\right)^2, \tag{29}$$

gdzie ε jest pewną stałą liczbą.

Wzór (29) uzasadnia się również metodami statystyki matematycznej.

1.6. Zatrzymamy się jeszcze na szczególnych przypadkach wyprowadzonych dotychczas wzorów. Jeżeli mianowicie za cenę próbki weźmiemy jej „dobroć" albo „wadliwość", zdefiniowaną w rozdziale II, to we wszystkich przykładach dotąd omówionych należy podstawić

$$s = \sqrt{\gamma(1-\gamma)}\,\frac{\text{sztuka dobra (zła)}}{\sqrt{\text{sztuka}}},$$

gdzie γ oznacza odpowiednio frakcję sztuk dobrych lub złych w próbce. Zupełnie analogicznie, jeżeli za cenę w partii weźmiemy „dobroć" albo „wadliwość" partii, to należy podstawić

$$S = \sqrt{\Gamma(1-\Gamma)}\,\frac{\text{SZTUKA DOBRA (ZŁA)}}{\sqrt{\text{SZTUKA}}}$$

gdzie Γ oznacza odpowiednio frakcję SZTUK DOBRYCH lub ZŁYCH w partii, zgodnie z wywodami w rozdziale II.

Przypadki te zachodzą w praktyce wtedy, gdy w badaniu wyrywkowym stosujemy zasadę: przyjąć albo odrzucić partię.

2.1. Przechodzimy teraz do zagadnień drugiej grupy, tzn. takich, że wśród wielkości, od których ma zależeć liczność n próbki, nie ma miary rozrzutu s ani S. Dla ilustracji rozpatrzymy tylko jeden przykład.

Załóżmy, że liczność n próbki zależy od liczności N partii, od ceny C partii i od ceny badania k, tzn.

$$n = \Phi(N, C, k). \tag{30}$$

Założenia te można zinterpretować w podobny sposób, jak to robiliśmy przykładowo w zadaniach poprzednich. Można by jeszcze jako argument funkcji Φ wprowadzić współczynnik przerachowania q, ale rachunek, podobnie jak w przykładzie 1.3, pokazałby, że przy tych założeniach n nie zależy od q. Z założenia (30) wynika w sposób, który już zilustrowaliśmy w poprzednich przykładach, wzór

$$n = a_1 \frac{NC}{k}, \tag{31}$$

gdzie a_1 jest pewną stałą liczbową. Wzór (31) można uważać również za szczególny przypadek wzorów (21) i (27). Wzór (31) ma zastosowanie w praktyce.

Na zakończenie tego rozdziału podamy jeszcze niektóre uwagi metodyczne. Nie staraliśmy się, by założenia, które sformułowaliśmy w rozwiązanych zagadnieniach, wyczerpywały wszystkie przypadki możliwe do rozważenia. Nie interpretowaliśmy również zbyt szczegółowo tych założeń, a nawet, być może, niektóre z naszych szkicowych interpretacji nie są zgodne z rzeczywistością. Celem naszym bowiem nie było rozwijanie samej teorii badania wyrywkowego i dyskusja merytoryczna jej różnych zagadnień oraz ich rozwiązań, lecz zilustrowanie na konkretnych przykładach metody rozwiązywania tych zagadnień.

Jak widać z tych przykładów, metoda ta jest, po pierwsze, bardzo prosta, ponieważ wymaga bardzo łatwych rachunków. Wydaje się nam, że pod tym względem różni się ona korzystnie od metod probabilistycznych, które wymagają nieraz mocnego aparatu matematycznego. Dzięki tej prostocie można postawić i zaatakować również takie zagadnienia, które traktowane za pomocą rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej byłyby bardzo trudne. Po wtóre, metoda nasza daje łatwą ewidencję założeń, które przyjmuje się przy sformułowaniu zagadnienia. Bardzo często praktyka lub wymagania ekonomiczne mogą te założenia nasunąć lub zinterpretować. W metodzie zaś opartej na rachunku prawdopodobieństwa skomplikowany aparat matematyczny zaciemnia czasem obraz całości.

Metoda nasza ma jednak i wady. Główną z tych wad jest to, że w otrzymanych wzorach występują nieoznaczone współczynniki liczbowe lub funkcje liczbowe argumentów liczbowych. Liczb tych sama teoria nasza dać nie może. Liczby te można i należy wziąć z doświadczenia. Kwestię tę omawiamy w rozdziale IV. W tych jednak przypadkach, gdy we wzorach, które wyprowadziliśmy, występują nieoznaczone funkcje liczbowe, metoda nasza pozwala określić parametry charakterystyczne zagadnienia. Przykład i rolę takiego parametru omówiliśmy np. w zagadnieniu 1.2.

IV. Cel badania i zgodność z doświadczeniem

We wszystkich wzorach, które wyprowadziliśmy dotąd w teorii badania wyrywkowego towarów, występują współczynniki liczbowe lub funkcje liczbowe zależne od argumentów liczbowych. Współczynników tych ani funkcji za pomocą analizy wymiarowej obliczyć nie można. Aby jednak otrzymane wzory były użyteczne dla praktyki, należy te współczynniki lub funkcje wyznaczyć. Celem niniejszego rozdziału jest przedstawić ideę, którą można i należy zrealizować, aby określić wartości liczbowe tych współczynników lub funkcji.

Aby dokładniej wyjaśnić naszą myśl przewodnią, przede wszystkim zwróćmy uwagę na jedną okoliczność, która na pierwszy rzut oka wydaje się dziwna. Mianowicie wszystkie wzory na liczność n próbki wyprowadziliśmy wyłącznie na podstawie założeń, od jakich wielkości ma ta liczność zależeć, ale nie robiliśmy żadnego innego założenia o tym, czego żądamy od tej liczności. Wobec tego na wszystkie te wzory możemy i powinniśmy narzucić jeszcze dodatkowo takie warunki, które by pozwoliły wyznaczyć współczynniki liczbowe.

Sformułujemy te warunki w najogólniejszych zarysach. Przede wszystkim powinny one sprecyzować dokładnie cel badania wyrywkowego i następnie powinny być takie, by prowadziły do wzorów zgodnych z rzeczywistością. To ogólnikowe sformułowanie wymaga oczywiście dokładniejszych wyjaśnień.

Przede wszystkim zajmiemy się celem badania wyrywkowego. Rozpatrzmy wpierw przykład. Gdy odbieramy partię węgla, to badamy tę partię wyrywkowo. W jakim celu to robimy? Możemy to robić na przykład w tym celu, żeby wiedzieć, z mniejszą lub większą dokładnością, ile ma zapłacić odbiorca za tę partię dostawcy, by odbiorca lub dostawca nie ponieśli przy takim odbiorze towaru zbyt wielkiej straty. Odbiór towaru wyrywkowego jest więc grą o pewną stawkę. Stawką tą jest zawsze pewna wielkość mierzona tymi samymi jednostkami co wartość partii towaru.

Z tych przykładowych spostrzeżeń wydobywamy przez abstrakcję następującą ich wspólną własność, którą będziemy uważali za postulat:

Jeżeli $N, n, W, w, C, c, q, k, S, s$ są wielkościami z tablicy 1, to w każdym badaniu wyrywkowym towarów jest zdefiniowana funkcja R zależna od wymienionych argumentów, być może tylko od niektórych,

$$R = \Phi(N, n, W, w, C, c, q, k, S, s), \tag{32}$$

która ma wymiar taki sam, jak wartość W partii, tzn.

$$[R] = \text{ZŁOTY}. \tag{33}$$

Funkcję R nazywamy *ryzykiem badania*.

O tym, jaki ma być kształt ryzyka R, mogą i powinni zadecydować kontrahenci badania lub, w ogóle, ekonomiści na podstawie zasad swoich teorii.

Analiza wymiarowa pozwala jednak wyprowadzić niektóre własności ryzyka R. Przede wszystkim zauważmy, że bez szkody dla ogólności możemy w (32) opuścić jako argumenty W i w, ponieważ zgodnie z definicjami (1) i (2) jest

$$W = CN \qquad \text{i} \qquad w = cn.$$

Wybierzmy teraz spośród pozostałych cztery wielkości wymiarowo niezależne, na przykład N, n, S, s. Na podstawie twierdzeń analizy wymiarowej wielokrotnie już stosowanych, możemy wyrazić pozostałe wielkości za pomocą N, n, S, s. Otrzymujemy w ten sposób następujące liczbowe parametry charakterystyczne ryzyka R:

$$\xi_1 = CN^{1/2}S^{-1}, \qquad \xi_2 = cn^{1/2}s^{-1}, \qquad \xi_3 = qN^{1/2}sn^{-1/2}S^{-1}, \qquad \xi_4 = knN^{-1/2}S^{-1}.$$

Ponadto

$$[R] = [N^{1/2}]\cdot[S].$$

Na podstawie twierdzenia π analizy wymiarowej jest zatem

$$R = \varrho(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)N^{1/2}S, \tag{35}$$

gdzie ϱ jest funkcją liczbową argumentów liczbowych $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$.

Funkcję ϱ powinni podać ekonomiści. Przyjmijmy jednak dla przykładu dość ogólne założenie, że funkcję ϱ można rozwinąć w szereg potęgowy zmiennych $\xi_1, \ldots, \xi_4$ i ograniczmy się tylko do wyrazów pierwszego stopnia, tzn. napiszmy

$$\varrho = \varrho_0 + \varrho_1\xi_1 + \varrho_2\xi_2 + \varrho_3\xi_3 + \varrho_4\xi_4, \tag{36}$$

gdzie $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_4$ są pewnymi stałymi liczbowymi, których wartości numeryczne powinni w każdym konkretnym przypadku ustalić ekonomiści.

Wstawiając wartości z (34) do (36), a otrzymany wynik do (35), mamy

$$R = \varrho_0 SN^{1/2} + \varrho_1 CN + \varrho_2 cn^{1/2}s^{-1}N^{1/2}S + \varrho_3 Nqsn^{1/2} + \varrho_4 kn. \tag{37}$$

Zilustrujmy powyższe założenie przykładami.

1. Rozważmy taką metodę badania wyrywkowego, w której uwzględniamy tylko wielkości następujące: liczność n próbki, liczność N partii, rozrzut S wartości w partii i cenę badania k. Załóżmy, że ryzyko R zależy również tylko od tych wielkości n, N, S, k. Wobec tego we wzorze (37) podstawimy $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = 0$ i otrzymamy

$$R = \varrho_0 SN^{1/2} + \varrho_4 kn.$$

Jak widzieliśmy w zadaniu 1.4 w rozdziale III, jeżeli liczność n próbki ma zależeć tylko od N, S i k, to

$$SN^{1/2} = \delta kn,$$

gdzie δ jest stałą liczbową, co oznacza, że w metodzie badania opisanej w zadaniu 1.4 rozdziału III ryzyko R jest proporcjonalne do kosztu badania kn.

2. Rozważmy teraz metodę badania wyrywkowego opisaną w zadaniu 1.1 rozdziału III, tzn. taką, że uwzględniamy tylko wielkości n, N, s, k, q. Z wzoru (37) otrzymamy

$$R = \varrho_3 Nqsn^{-1/2} + \varrho_4 kn. \tag{38}$$

Po podstawieniu tu wzoru (17) z rozdziału III

$$n = a\left(\frac{Nqs}{k}\right)^{2/3},$$

zauważymy, że i w tym przypadku ryzyko R jest proporcjonalne do kosztów badania kn, czyli

$$R = \gamma kn,$$

gdzie γ jest stałą liczbową.

Można by w ten sposób zbadać również i inne metody badania, rozpatrzone w rozdziale III. Nie będziemy jednak tego robili, gdyż już z tych przykładów widać, że pojęcie ryzyka R zasługuje na uwagę.

Po ustaleniu ryzyka R należy zdefiniować warunek, jaki to ryzyko ma spełniać w danej metodzie badania wyrywkowego. Warunkiem takim może być na przykład to, żeby ryzyko R było stałe, lub żeby nie przekraczało pewnej z góry ustalonej wartości, lub żeby osiągało minimum itp. Warunek, który narzucamy na ryzyko R, nazywamy *warunkiem ekonomicznym E*. Mogą i powinni go zdefiniować kontrahenci lub w ogóle ekonomiści.

Na podstawie powyższych wywodów możemy dokładniej sprecyzować cel badania. Cel badania wyrywkowego polega na tym, żeby na podstawie badania próbki wyznaczyć wartość partii, tak by ryzyko badania R spełniało warunek ekonomiczny E.

Przechodzimy teraz do wyjaśnienia, co rozumiemy przez powiedzenie, że wzory otrzymane w teorii badania wyrywkowego mają być zgodne z rzeczywistością. Ponieważ jednym z najważniejszych zagadnień teorii badania wyrywkowego jest wyznaczenie liczności n próbki, więc dla przykładu ograniczymy się tylko do wzorów, które wyprowadziliśmy w rozdziale III.

Jak już zaznaczaliśmy w rozdziale I i II, uważamy, że teoria badania wyrywkowego, jako nauka o zjawiskach obiektywnych i zdeterminowanych, może i powinna opierać się na doświadczeniu. Zdanie to podziela z pewnością bardzo wielu praktyków, którzy potrafią „na oko" ustalić liczność próbki zgodnie z celem badania. Mówią oni, że czynią to na podstawie długiego doświadczenia. Należy sobie jednak jasno zdać sprawę z tego, co rozumiemy przez to doświadczenie i sformułować zasady postępowania, które by pozwalały obiektywnie stwierdzić zgodność danego wzoru na liczność próbki z rzeczywistością, bez oparcia się o autorytet i bliżej niesprecyzowane „oko" znawców.

Aby jaśniej przedstawić naszą myśl, ograniczymy się do przykładu. Przypuśćmy, że badamy wyrywkowo partię węgla według metody opisanej w zagadnieniu 1.1 rozdziału III oraz w przykładzie 2 niniejszego rozdziału. Dokładniej mówiąc, rozpatrzymy następujące zagadnienie:

Dana jest partia węgla o znanej liczności N. Bierzemy z tej partii próbkę o liczności n i mierzymy rozrzut s wartości jednej sztuki w tej próbce. Współczynnik przerachunkowy q i cena badania k są znane. Znamy również ryzyko badania R, tzn. nie tylko wiemy, że ryzyko R wyraża się wzorem (38), lecz znamy także wartości liczbowe współczynników ϱ_3 i ϱ_4 na podstawie orzeczenia kontrahentów lub ekonomistów. Jest również ustalony warunek ekonomiczny E, na przykład, że ryzyko R ma osiągać minimum.

Pytamy, jaka ma być liczność n próbki, by były spełnione wszystkie powyżej wymienione wymagania.

Na podstawie wzoru (17) z rozdziału III wiemy, że bez względu na definicję ryzyka R i warunek ekonomiczny E liczność n próbki musi się wyrażać wzorem

$$n = a\left(\frac{Nqs}{k}\right)^{2/3},$$

gdzie a jest jakąś stałą liczbową. Pytanie sprowadza się więc do tego, jaka ma być wartość liczbowa współczynnika a.

Zadanie powyższe można by rozwiązać w następujący sposób. Ponieważ ryzyko R wyraża się wzorem (38), w którym teraz znane są już współczynniki ϱ_3 i ϱ_4, i ponieważ warunek ekonomiczny wymaga, by R było minimalne, więc obliczamy minimum funkcji $R(n)$. A zatem musi być

$$\frac{dR}{dn} = 0. \tag{39}$$

Istotną trudnością w takim rozwiązaniu jest to, że rozrzut s jest także funkcją n. Gdybyśmy założyli, że n wypadnie dostatecznie duże i że możemy wtedy przyjąć $ds/dn = 0$, to warunek (39) dałby

$$-\frac{1}{2}\varrho_3 Nqn^{-3/2} + \varrho_4 k = 0,$$

skąd

$$n = \frac{\varrho_3}{2\varrho_4}\left(\frac{Nqs}{k}\right)^{2/3}$$

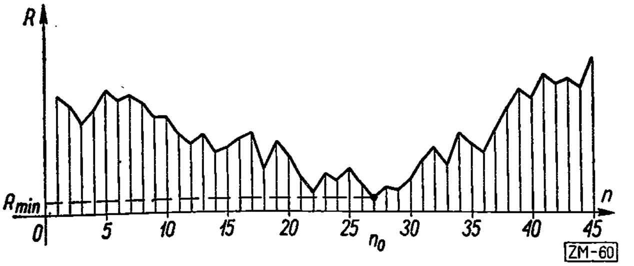
i współczynnik a we wzorze byłby wyznaczony, ponieważ liczby ϱ_3 i ϱ_4 znamy. Za pomocą podobnego rozumowania H. Steinhaus[7]) otrzymał wzór analogiczny do (17).

Pozostają jednak nierozstrzygnięte pewne wątpliwości. Po pierwsze, czy mamy prawo założyć, że s nie zależy od n, po drugie, jaką mamy gwarancję, że otrzymany wzór jest zgodny z rzeczywistością, a po trzecie, co to znaczy, że jest on zgodny z rzeczywistością. K. Wiśniewski[8]) przeprowadził niektóre doświadczenia w tym kierunku. Okazuje się jednak, że w tych doświadczeniach liczność n próbki nie przekraczała kilku sztuk. Czy można wobec tego uważać za uzasadnione założenie, że s nie zależy od n?

Uważamy, że współczynnik a można i należy wyznaczyć za pomocą doświadczenia. Schemat myślowy tego doświadczenia jest następujący. Z pewnej partii węgla o danej liczności N pobieramy próbki o różnych licznościach n, o ile możności jak najwięcej. Dla każdej próbki mierzymy rozrzut s wartości w próbce. Otrzymane z pomiarów wartości odkładamy na wykresie w układzie współrzędnych, którego osią odciętych jest n, a osią rzędnych

(40) $$R = \varrho_3 Nqsn^{1/2} + \varrho_4 kn.$$

Otrzymujemy w ten sposób „wykres” złożony z poszczególnych punktów:



Rys. 1

Jeżeli się okaże, że wykres ten ma wyraźne minimum dla $n = n_0$, to podstawimy do wzoru (17) za n wielkość n_0 i obliczymy współczynnik a.

Naiwne byłoby mniemanie, że liczbę a można wyznaczyć za pomocą *jednego* tylko pomiaru. Należy takie pomiary powtórzyć dla partii

[7]) Patrz [4], str. 3.
[8]) Patrz [5], str. 11-12.

węgla o innej liczności N i wyznaczyć dla niej w ten sam sposób współczynnik a. Takich pomiarów z różnymi licznościami N partii węgla należy wykonać możliwie dużo. Jeżeli się okaże, że za każdym razem wypadnie ta sama liczba a niezależnie od liczności N, współczynnika przerachowania q, miary rozrzutu s i ceny badania k, to wtedy będziemy mogli powiedzieć, że wzór (17) z tak wyznaczoną stałą a, uniwersalną dla wszystkich partii węgla, jest zgodny z rzeczywistością.

Otrzymamy równocześnie doświadczalne sprawdzenie łączne *wszystkich* założeń, które doprowadziły do wzoru (17). Są to zarówno te założenia, które przyjęliśmy w rozdziale II, gdy ustalaliśmy wymiar rozrzutu s, jak i te założenia, które przyjęliśmy o współczynnikach ϱ_3 i ϱ_4 potrzebnych do określenia ryzyka, a także i to założenie, że liczność n próbki zależy tylko od N, k, s, q.

Jeżeli się okaże, że liczba a nie jest dla różnych N, q, s, k taka sama, to jedyny wniosek, jaki można i należy wyprowadzić, jest taki, że wzór (17) nie jest zgodny z rzeczywistością, a więc niektóre z założeń, na których on się opiera, są fałszywe. Metoda analizy wymiarowej pozwala jednak za pomocą łatwego rachunku otrzymywać inne wzory.

Wydaje się, że praktyczne przeprowadzenie takich doświadczeń nie jest rzeczą trudną. A gdyby nawet wymagało więcej czasu i wysiłku, opłaciłoby się sowicie przez to, że jeżeli doświadczenie potwierdzi wzór (17), to wyznaczona w ten sposób stała liczbowa a byłaby najlepiej zgodna z rzeczywistością. W istocie rzeczy na tym opiera się doświadczenie praktyków, chociaż być może nie zawsze zdają sobie oni z tego sprawę.

Nie należy się spodziewać, że wyniki pomiarów, które mają ustalić, czy liczba a jest niezależna od N, q, s, k, ułożą się w „porządną" linię i dadzą naprawdę jedną dokładną wartość a dla wszystkich N, q, s, k. Każdy eksperymentator, mający do czynienia nawet z tak dobrze zdeterminowanymi zjawiskami jak zjawiska fizyczne, wie, że wyniki różnych pomiarów tej samej wielkości nie są naprawdę niezmienne, lecz wykazują pewne fluktuacje. Do opracowania wyników doświadczenia można i należy użyć metod statystyki matematycznej. W ten sposób statystyka matematyczna w tej teorii fenomenologicznej badania wyrywkowego, którą przedstawiliśmy, ma do spełnienia takie samo zadanie, jak w każdej nauce empirycznej, a mianowicie służy do opracowania wyników doświadczeń. Rola statystyki matematycznej została więc w tej teorii przesunięta, ale nie zupełnie wyeliminowana. Byłoby bezcelowe kusić się o to.

Na zakończenie podkreślamy, że głównym celem niniejszej pracy jest nie dyskusja merytoryczna nad różnymi zagadnieniami badania wyrywkowego, lecz przedstawienie metody. Z tego powodu niektóre zagadnienia potraktowaliśmy być może niedostatecznie wyczerpująco lub z nienajwiększą ogólnością.

Prace cytowane

[1] Б. В. Гнеденко, *Курс теории вероятностей,* ГИТЛ, Москва-Ленинград 1950.

[2] S. Drobot, *Analiza wymiarowa,* Zastosowania Matematyki 1 (1954), str. 233-272.

[3] S. Drobot and M. Warmus, *Dimensional analysis in sampling inspection of merchandise,* Rozprawy Matematyczne V, Warszawa 1954.

[4] H. Steinhaus, *Wycena statystyczna jako metoda odbioru towarów produkcji masowej,* Studia i Prace Statystyczne 2 (1950).

[5] K. Wiśniewski, *Metody statystycznej kontroli jakości w świetle doświadczeń,* Wiadomości PKN 10/51 (1951).

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła dnia 19. 6. 1952 r.

С. ДРОБОТ и М. ВАРМУС (Вроцлав)

АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТИ В ВЫБОРОЧНОМ ИСПЫТАНИИ ТОВАРОВ

РЕЗЮМЕ

Предметом настоящей работы является опыт теории выборочного испытания товаров основанный на применении анализа размерности. Взаимоотношение этой теории к теории выборочного испытания, основанной на математической статистике, аналогично, например, отношению феноменологической термодинамики к статистической.

Основными понятиями являются партия товара и выборка из этой партии. Величина N партии, величина n выборки, стоимость W партии и стоимость w выборки считаются размерно независимыми. Их размерности

$$[N] = \text{ШТУКА}, \quad [n] = \text{штука}, \quad [W] = \text{РУБЛЬ}, \quad [w] = \text{рубль}$$

образуют систему единиц. Далее определяются: цена C партии, цена c выборки и бухгалтерский коэффициент q, размерности которых следующие:

$$[C] = \text{РБ} \cdot \text{ШТ}^{-1}, \quad [c] = \text{рб} \cdot \text{шт}^{-1}, \quad [q] = \text{РБ} \cdot \text{ШТ}^{-1} \cdot \text{рб}^{-1} \cdot \text{шт}.$$

Затем определяются средняя стоимость W в партии и средняя стоимость w в выборке. И размерности получаются следующие:

$$[\overline{W}] = [W] = \text{РБ}, \quad [\overline{w}] = [w] = \text{рб}.$$

Дисперсия S стоимости в партии и соответсвенно s в выборке определены таким образом, что их размерности получаются такие:

$$[S] = \text{РБ} \cdot \text{ШТ}^{-1/2}, \quad [s] = \text{рб} \cdot \text{шт}^{-1/2}.$$

Вводится еще расценка k испытания, размерность которой

$$[k] = \text{РБ} \cdot \text{шт}^{-1}.$$

Применяя методы анализа размерности, можно на основе этих определений получить формулы на величину n выборки, если только известно, от каких размерных переменных эта величина зависит. Например, если

$$n = \Phi(N, k, q, s),$$

то функция Φ имеет следующий вид:

$$n = a\left(\frac{Nqs}{k}\right)^{2/3},$$

где a — безразмерный коэффициент. Аналогичные формулы получены при других гипотезах об аргументах функции Φ.

В методе определения безразмерных коэффициентов, выступающих в формулах на величину n выборки, существенную роль играет функция, называемая риском испытания

$$R = \Phi(N, n, W, w, C, c, q, k, S, s),$$

значения R которой имеют размерность РБ. В каждом методе выборочного испытания риск должен выполнять определенное экономическое требование, например должен достигать своего минимума. Если функция риска точно известна и экономическое требование дано, то безразмерные коэффициенты в формулах на величину выборки можно вычислить. Если же дело не так обстоит, то нужно и можно применить эмпирический метод, идейная схема которого излагается в конце настоящей работы.

S. DROBOT and M. WARMUS (Wrocław)

DIMENSIONAL ANALYSIS IN SAMPLING INSPECTION OF MERCHANDISE

SUMMARY

The authors present a tentative theory of sampling inspection of merchandise, which is based on the application of Dimensional Analysis. The relation of this theory to a theory based on mathematical statistics is analoguous to the relation of phenomenological thermodynamics to statistical thermodynamics.

The basic notions are a lot of goods and a sample of that lot. The size N of the lot, the size n of the sample, the value W of the lot and the value w of the sample are regarded as dimensionally independent quantities. Their dimensions

$$[N] = \text{PIECE}, \quad [n] = \text{piece}, \quad [W] = \text{GUINEA}, \quad [w] = \text{guinea},$$

form a system of units. Next he price C of the lot, the price c of the sample and the conversion factor q are determined; their dimensions are as follows:

$$[C] = \text{GUINEA}\cdot\text{PIECE}^{-1}, \quad [c] = \text{guinea}\cdot\text{piece}^{-1}, \quad [q] = \text{GUINEA}\cdot\text{PIECE}^{-1}\cdot\text{guinea}^{-1}\cdot\text{piece}.$$

The mean value $\overline{W}$ of the lot and $\overline{w}$ of the sample are defined in the following way:

$$[\overline{W}] = [W] = \text{GUINEA}, \qquad [\overline{w}] = [w] = \text{guinea}.$$

The dispersion S of values in the lot, and the dispersion s of values in the sample respectively are defined in the following way:

$$[S] = \text{GUINEA}\cdot\text{PIECE}^{-1/2}, \qquad [s] = \text{guinea}\cdot\text{piece}^{-1/2}.$$

Moreover, the inspection cost k is introduced and its dimension is

$$[k] = \text{GUINEA}\cdot\text{piece}^{-1}.$$

Applying the methods of Dimensional Analysis one can obtain, on the ground of these definitions, formulas of the size n of a sample if it is known upon what dimensional variables that size depends. For example if

$$n = \Phi(N, k, q, s),$$

then the function Φ has the form

$$n = a\left(\frac{Nqs}{k}\right)^{2/3}$$

where a is a dimensionless factor. It is easy to obtain analoguous formulas by making other assumptions with regard to the arguments of the function Φ.

In the method of determining dimensionless factors appearing in the formulas of the size n of a sample an essential role is played by a function R called the risk of inspection:

$$R = \Phi(N, n, W, w, C, c, q, k, S, s),$$

whose values have the dimension GUINEA. In every method of sampling inspection risk should answer certain economic conditions, e. g. it should reach the minimum. If the function R is known exactly and the economic condition is stated, then the dimensionless factors in the formulas of the size of a sample can be calculated. Otherwise it is necessary, and possible, to use an empirical method whose main idea is presented in the final section of the paper.