COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXI 1970 FASC. 1

ЗАМЕЧАНИЯ О ПОПОЛНЕНИИ НОРМИРОВАННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТРУКТУР (1)

Б. З. ВУЛИХ (ЛЕНИНГРАД)

Напечатанная в томе 19 Вашего журнала статья Togo Nishiura, *Completions of normed linear lattices*, стр. 271-275, в значительной своей части пересекается с рядом работ советских математиков, которые повидимому не были известны ее автору. В частности, проблемы, поставленные в статье T. Nishiura, уже решены.

1. Теорема A о сохранении топологической полноты при порядковом пополнении банаховой структуры была доказана Г. Я. Лозановским в 1964 году и опубликована в [1].

2. Проблема 2 (P 642) о сохранении структурной полноты при пополнении по норме порядково полной нормированной структуры решена отрицательно в 1963 году А. И. Векслером [2]. Отсюда немедленно вытекает и отрицательное решение проблемы коммутирования.

3. Пример C, приведенный T. Nishiura, весьма близок к тому, который дан А. И. Векслером в работе [2] и с помощью которого А. И. Векслер дал решение проблемы 2. Замечание о том, что оператор вложения исходной структуры в ее пополнение по норме может не быть порядково непрерывным, также содержится в работе [2].

4. Первая часть проблемы 1 (P 641) об единственности монотонного распространения нормы с нормированной структуры на ее порядковое пополнение решена отрицательно В. А. Соловьевым в 1965 году [3]. Там же указан ряд условий, обеспечивающих единственность распространения нормы. В докладе на семинаре в Ленинградском Университете В. А. Соловьев сообщил пример, показывающий, что вторая часть проблемы 1 решается положительно: с помощью небольшого видоизменения одного из примеров, неоднократно встречавшихся в [3], он указал нормированную структуру, которая не плотна в своем порядковом пополнении при естественном

(1) Из писем в редакцию от 24. 10. 1968 и 12. 2. 1969.

распространении нормы, но оказывается плотной при некотором другом распространении нормы. Именно рассматривается пространство c сходящихся числовых последовательностей $x = \{\xi_n\}$ с нормой

$$\|x\| = \sup \frac{|\xi_n|}{n} + \lim |\xi_n|.$$

Его порядковое пополнение $\hat{c} = m$. Введем две нормы в m:

$$\|\hat{x}\|_1 = \sup \frac{|\xi_n|}{n} + \overline{\lim}\, |\xi_n|$$

(это — естественное распространение нормы из c),

$$\|\hat{x}\|_2 = \sup \frac{|\xi_n|}{n} + |\hat{x}(q_0)|,$$

где q_0 — фиксированная точка из чеховского нароста дискретного пространства N натуральных чисел, $q_0 \in \beta N \setminus N$ (это — некоторое другое распространение нормы из c).

Оказывается, что $(c, \|\cdot\|)$ не плотно в $(m, \|\cdot\|_1)$. Действительно, для $\hat{x}_0 = (1, 0, 1, 0, \ldots)$ и любого $x \in c$ имеем $\|\hat{x}_0 - x\|_1 \geqslant \frac{1}{2}$. С другой стороны, для любого $\hat{x} \in m$ $(\hat{x} = \{\xi_n\})$ положим

$$x_n = \left(\xi_1, \ldots, \xi_n, \hat{x}(q_0), \hat{x}(q_0), \ldots\right)$$

($\hat{x}(q)$ — реализация элемента $\hat{x}$ в виде непрерывной функции на пространстве βN). Тогда $x_n \in c$ и $\|x_n - \hat{x}\|_2 \to 0$. Следовательно, $(c, \|\cdot\|)$ плотно в $(m, \|\cdot\|_2)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. З. Вулих и Г. Я. Лозановский, *О метрической полноте нормированных и счетно-нормированных структур*, Вестник Ленинградского университета 19 (1966), стр. 12-15.

[2] А. И. Векслер, *О двух вопросах теории полуупорядоченных пространств*, Сибирский математический журнал 5 (1964), № 4, стр. 952-954.

[3] В. А. Соловьев, *О распространении монотонной нормы с нормированной структуры на ее пополнение по Дедекинду*, там же 7 (1966), № 6, стр. 1360-1369.