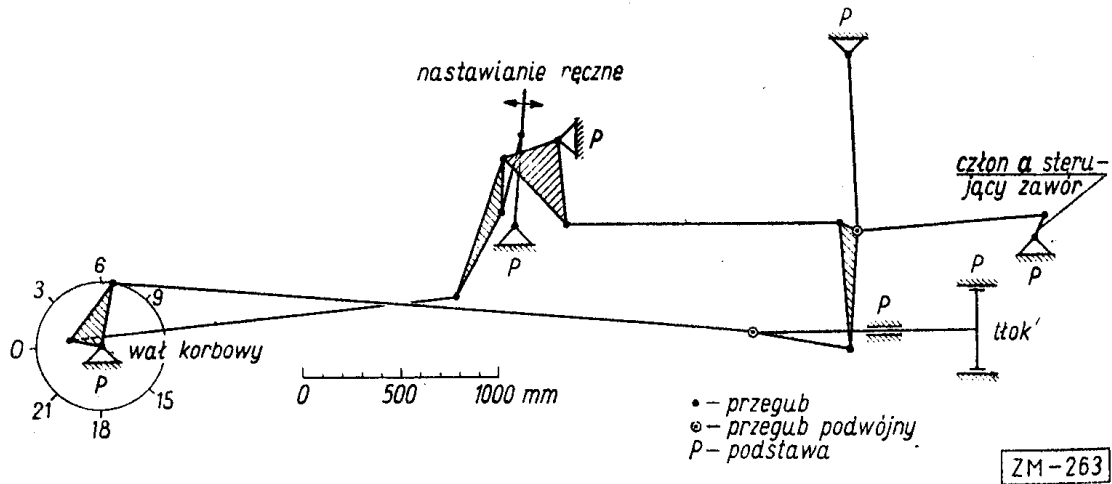


J. ODERFELD (Warszawa)

O PEWNYM ZASTOSOWANIU RACHUNKU WYRÓWNAWCZEGO DO KINEMATYKI MECHANIZMÓW

1. Zagadnienie techniczne. Niniejsza praca wynika z potrzeb techniki. Należało przeprowadzić pełną analizę kinematyczną stawidla parowozowego pokazanego schematycznie na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat stawidla parowozowego zewnętrznego systemu Bakera, przystosowany do rozrządu zaworowego systemu Lentza

Do dyspozycji były klasyczne metody teorii mechanizmów, analityczne lub wykreślne. Zawiłość konstrukcji wyłączyła od razu ściśle metody analityczne.

Klasyczne rozwiązanie wykreślne ściłą metodą, tzw. planów prędkości i przyspieszeń, wymagało dla każdego położenia mechanizmu dokładnie 82 elementarnych operacji graficznych. Pod tym pojęciem rozumiem prowadzenie linii równoległej bądź prostopadłej lub odmierzanie odcinka linii prostej. Pomijając już znużenie tej roboty, którą trzeba by było powtórzyć kilkadziesiąt razy dla różnych położenia mechanizmu, dokładność jej była z góry wątpliwa. Rzeczywiście, doświadczenie pokazało, że przyspieszenia pewnego punktu tego mechanizmu znalezione metodą wykreślną w dwóch położeniach, w których ze względów teore-

tycznych powinny były być prawie równe, różniły się o 100⁰%. W dodatku zaś, wobec zawilosci konstrukcji, trudno było ją skontrolować i uznać którykolwiek z wyników za wiarogodny.

Podobnie zły wynik rokowały inne tzw. ścisłe metody wykreślne, których ścisłość dotyczy tylko założeń teoretycznych, ale które są zwykle tym mniej dokładne praktycznie, im są bardziej zawile.

W odwodzie pozostały jeszcze przybliżone metody wykreślne, w szczególności znana metoda toru odcinającego. Polega ona krótko mówiąc na tym, że przyspieszenie pewnego punktu wyznacza się przez aproksymację łuku toru za pomocą wieloboku cięciw. Uwzględnia się przy tym zawsze 3 sąsiednie punkty wycechowane na torze. Dokładnością tej metody zajmowałem się w [1] i wyznaczyłem warunki użycia optymalne co do dokładności, wychodząc jednak z założenia, że wyznaczanie punktów na torze nie jest obciążone błędami. Założenie to jest dosyć realne w prostym przypadku, nie stosuje się jednak do tak zawitych mechanizmów jak stawidło z rysunku 1.

Ostatecznie zdecydowałem się na postępowanie wykreślno-liczebne, które składa się z następujących etapów:

- (a) wyznaczenie położenia mechanizmu w chwilach równoodległych w czasie;
- (b) wyrównanie położenia za pomocą średniej ruchomej;
- (c) wyznaczenie prędkości i przyspieszeń za pomocą wzoru interpolacyjnego;
- (d) kontrola poprawności obliczeń;
- (e) oszacowanie błędu.

Etap (a) nie należy do zaproponowanej metody, gdyż i tak jest potrzebny do analizy funkcjonowania mechanizmu. Na przykład w rozważanym mechanizmie znajomość położenia jest potrzebna do wyznaczenia charakterystycznych punktów w wykresie rozrządu silnika. W etapie (a) celowe jest użycie metod wykreślnych lub modelowych, jako szybkich i zupełnie wystarczających w tym przypadku. W etapach dalszych korzystam tylko z metod numerycznych.

Teoria ogólna etapów (b) i (c) jest dobrze znana. Za mój wkład uważam tylko połączenie ich w nowy wzór interpolacyjny i ułożenie sprawnie działającego schematu postępowania oraz opracowanie etapów (d) i (e).

Notuję tu, że możliwe są różne kombinacje zaproponowanej metody numerycznej z metodami klasycznymi. Można na przykład metodą numeryczną wyznaczyć przyspieszenia w niektórych celowo wybranych punktach złożonego mechanizmu i, uważając je już za znane, zbudować bardzo proste plany przyspieszeń dla innych punktów.

W dalszych wywodach nie będę się zajmował takimi kombinacjami, ograniczając się tylko do uzasadnienia proponowanej metody i opisu techniki jej stosowania. Metoda jest ogólna; można ją stosować do każdego mechanizmu płaskiego lub przestrzennego; pozwala wyznaczać prędkości i przyspieszenia, zarówno liniowe, jak kątowe.

2. Średnia ruchoma. Średnia ruchoma jest pojęciem używanym w badaniu tzw. serii czasowych. Wystarczy więc tylko przypomnieć rzeczy zawarte w działach klasycznych, np. w [2].

Niech $u(t)$ będzie funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej t . Niech będzie dany ciąg $2m+1$ wartości zmiennej t

$$(1) \quad -m, -m+1, \dots, 0, \dots, m-1, m.$$

Staramy się aproksymować funkcję u za pomocą wielomianu

$$(2) \quad a_t = \sum_{j=0}^p a_j t^j,$$

dobierając jego współczynniki a_j tak, żeby dla wszelkiej wartości t równej k zachodziła zależność

$$(3) \quad \sum_{k=-m}^m [u(k) - a(k)]^2 = \min.$$

Poszukiwane współczynniki a_j spełniają wtedy układ równań liniowych

$$(4) \quad a_0 \sum_{k=-m}^m k^j + a_1 \sum_{k=-m}^m k^{j+1} + \dots + a_p \sum_{k=-m}^m k^{j+p} = \sum_{k=-m}^m u(k) k^j \quad (j = 0, 1, \dots, p).$$

Ponieważ sumy występujące po lewej stronie (4) nie zależą od $u(k)$, a sumy po prawej stronie są kombinacjami liniowymi $u(k)$, więc pierwiastki a_0, a_1, \dots, a_p otrzymamy jako kombinacje liniowe $u(k)$ ze stałymi współczynnikami.

Do dalszych celów wystarczy obliczyć tylko współczynnik a_0 równy $u(0)$, a więc stanowiący najlepszą (w podanym sensie) aproksymację $u(0)$.

Podobnie można postąpić w dowolnym punkcie t funkcji $u(t)$, jeśli tylko jest dany ciąg wartości tej funkcji w punktach $t-m, t-m+1, \dots, t, t+1, \dots, t+m$.

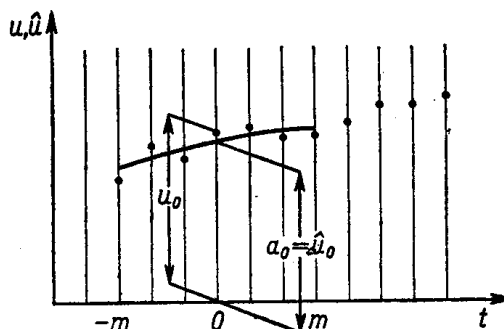
Funkcję $u(t)$, która dla każdego t przyjmuje wartość równą współczynnikowi a_0 obliczonemu dla tego właśnie t , nazywamy *średnią ruchomą*.

3. Wyrównywanie położenia. Przypuśćmy, że sposobem wykreślnym (lub innym) ustalono położenia, które zajmuje interesujący nas punkt mechanizmu w chwilach odległych o Δt , i że w każdej z tych chwil usta-

lono współrzędne tego punktu. W najogólniejszym przypadku potrzebne są 3 współrzędne. Jeśli mechanizm jest płaski, wystarczą 2 współrzędne, a jeśli tor punktu jest określony — nawet tylko jedna. Podobnie jedna współrzędna (kątowna) wyznacza chwilowe położenie członu znajdującego się w ruchu obrotowym (np. członu a na rysunku 1). Możemy więc wyznaczyć zmienność położenia w czasie, każdego interesującego nas punktu przez co najwyżej trzy ciągi $\{u'\}$, $\{u''\}$ i $\{u'''\}$ współrzędnych.

Dalsze rozważania wystarczy przeprowadzić dla jednego ciągu, który wobec tego będziemy oznaczali po prostu $\{u\}$.

Współrzędne są obarczone błędami, których nie znamy. Zastąpienie ciągu $\{u\}$ przez ciąg $\{\hat{u}\}$ wartości średniej ruchomej daje najlepszą (w sensie najmniejszej sumy kwadratów) aproksymację współrzędnych „surowych” przez współrzędne „wyrównane”, przy czym zmniejsza się średni błąd, jak to pokażemy w § 5. Geometryczną interpretację tego postępowania pokazuje rysunek 2. Przedstawiono na nim punkty obrazujące liczby z ciągu $\{u\}$ i ruchomy łuk paraboli o równaniu (2), która daje najmniejszą sumę kwadratów różnic między rzędnymi paraboli a rzędnymi punktów; a_0 jest rzędną paraboli w punkcie $t = 0$.



Rys. 2. Średnia ruchoma

Przed rozwiązaniem efektywnym trzeba się zdecydować na wybór m i p . Wybrałem $m = 3$ i $p = 3$ kierując się następującymi względami. Stopień p ruchomej paraboli nie powinien być niższy od 3, bo parabola drugiego stopnia nie może dobrze aproksymować krzywych w okolicy przegięcia, a przegięcia często zdarzają się w praktyce. Liczba $2m + 1$ punktów objętych każdorazowo łukiem paraboli powinna być dużo większa, powiedzmy dwa razy, od p ; w przeciwnym przypadku wyrównanie byłoby mało skuteczne, a w skrajnym przypadku, gdy $2m + 1 = p$, wcale nie byłoby wyrównania. Jednakże $2m + 1$ nie powinno być liczbą dużą w porównaniu z liczbą wyrazów w ciągu $\{u\}$, gdyż na ogół tym trudniej jest uzyskać dobre przybliżenie, im dłuższy jest ruchomy łuk paraboli pewnego stopnia. W praktyce najczęściej cechuje się na torze 24 punkty, więc $2m + 1$ równe siedmiu stanowi już około $\frac{1}{4}$ liczby wyrazów w ciągu współrzędnych.

Oczywiście te rozważania nie pretendują ani do ścisłości, ani do powszechności. Kierując się podanymi wskazówkami, może Czytelnik ułożyć wzory ostateczne dla innych m i p , niż przyjęto w tej pracy.

Niech współrzędne surowe będą

$$(5) \quad \dots, u_{-3}, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$$

Oznaczmy

$$(6) \quad s_1 = u_1 + u_{-1}, \quad s_2 = u_2 + u_{-2}, \quad s_3 = u_3 + u_{-3}.$$

Przy tych oznaczeniach po rozwiązaniu układu (4) otrzymujemy

$$(7) \quad \hat{u}_0 = \frac{1}{21}(7u_0 + 6s_1 + 3s_2 - 2s_3).$$

Stosując wzory (6) i (7) tyle razy, ile jest wyrazów w ciągu $\{u\}$, możemy wyrównać cały ciąg. Nie występują tu zwykle trudności interpolacyjne związane z brakiem na skrajach wyrazów poprzedzających lub następujących, gdyż ruch mechanizmów jest z reguły periodyczny z okresem T . Jeśli więc tak wybierzemy Δt , żeby $k = T/\Delta t$ było liczbą naturalną, i jeśli wyznaczymy k kolejnych wartości u , to przesuwając je o k miejsc będziemy mogli ustalić tyle wyrazów, ile trzeba do wyrównania.

4. Wyznaczanie prędkości i przyspieszeń. Mając już ciąg $\{\hat{u}\}$ wartości wyrównanych, możemy zastosować wzór interpolacyjny Stirlinga (por. np. [3]) do obliczenia przybliżonych prędkości i przyspieszeń.

Oznaczmy

$$(8) \quad \begin{aligned} \hat{s}_1 &= \hat{u}_1 + \hat{u}_{-1}, & \hat{d}_1 &= \hat{u}_1 - \hat{u}_{-1}, \\ \hat{s}_2 &= \hat{u}_2 + \hat{u}_{-2}, & \hat{d}_2 &= \hat{u}_2 - \hat{u}_{-2}. \end{aligned}$$

Ograniczając się do trzecich różnic w wyrażeniu na prędkość i do czwartych różnic w wyrażeniu na przyspieszenie znajdujemy oszacowania prędkości jednostkowej oraz przyspieszenia jednostkowego (w założeniu, że $\Delta t = 1$):

$$(9) \quad \hat{V} = \frac{1}{12}(8\hat{d}_1 - \hat{d}_2), \quad \hat{P} = \frac{1}{12}(-30\hat{u}_0 + 16\hat{s}_1 - \hat{s}_2),$$

i oszacowania prędkości oraz przyspieszenia przy Δt dowolnym:

$$(10) \quad \hat{v} = \frac{1}{\Delta t} \hat{V}, \quad \hat{p} = \frac{1}{\Delta t^2} \hat{P}.$$

Wymiar wielkości \hat{v} i \hat{p} zależy oczywiście od wymiarów wielkości u i Δt . Jeśli na przykład $[u] = \text{milimetr}$, a $[\Delta t] = \text{sekunda}$, to $[\hat{p}] = \text{mm sek}^{-2}$.

Jeśli u jest współrzędną kartezjańską na przykład wzdłuż osi x , to \hat{u} , \hat{V} , \hat{P} obliczone z wzorów (7) i (9) dają wyrównane składowe położenia, prędkości jednostkowej i przyspieszenia jednostkowego wzdłuż osi x ; jeśli u jest współrzędną kątową, to np. \hat{p} jest przyspieszeniem kątowym itd.

Warunkiem stosowalności w całym zakresie zmienności t wzorów (9) jest istnienie dostatecznej liczby pochodnych funkcji ruchu; wzór na \hat{V} wymaga, żeby istniały pierwsze trzy pochodne, a wzór na \hat{P} — cztery. Warunki te są spełnione w większości mechanizmów. Wyjątek stanowią mechanizmy o ruchu przerywanym (np. krzyż maltański i jego odmiany); stosowanie do nich opisanej metody wymaga stosownych modyfikacji. Bez zastrzeżeń można natomiast zalecić tę metodę do mechanizmów krzywkowych, nawet wtedy gdy profil krzywki teoretycznie ma słabą nieciągłość (trzecia pochodna nieskończenie wielka), gdyż ze sposobu wykonania wynika, że w rzeczywistości trzecia pochodna może być co najwyżej bardzo duża, ale zawsze jest skończona.

Obecnie rozważymy pewne warianty opisanego postępowania. Można na przykład do wyrównywania współrzędnej używać kroku odpowiadającego przedziałowi czasu Δt , ale do wyrównywania prędkości i przyspieszeń przyjąć krok odpowiadający przedziałowi $2\Delta t$, $3\Delta t$ itd. Celowość takiego postępowania (zmniejszenie wpływu błędów rysunkowych) uzasadnimy w rozdziale 5, teraz zaś podamy wzory robocze analogiczne do (8) i (9).

Oznaczmy więc

$$(8') \quad \begin{aligned} \hat{s}_2 &= \dot{u}_2 + \dot{u}_{-2}, & \hat{d}_2 &= \dot{u}_2 - \dot{u}_{-2}, \\ \hat{s}_4 &= \dot{u}_4 + \dot{u}_{-4}, & \hat{d}_4 &= \dot{u}_4 - \dot{u}_{-4}. \end{aligned}$$

Wtedy przy kroku podwójnym mamy

$$(9') \quad \hat{V} = \frac{1}{24}(8\hat{d}_2 - \hat{d}_4), \quad \hat{P} = \frac{1}{48}(-30\dot{u}_0 + 16\hat{s}_2 - \hat{s}_4).$$

Oznaczmy wreszcie

$$(8'') \quad \begin{aligned} \hat{s}_3 &= \dot{u}_3 + \dot{u}_{-3}, & \hat{d}_3 &= \dot{u}_3 - \dot{u}_{-3}, \\ \hat{s}_6 &= \dot{u}_6 + \dot{u}_{-6}, & \hat{d}_6 &= \dot{u}_6 - \dot{u}_{-6}. \end{aligned}$$

Wtedy przy kroku potrójnym mamy

$$(9'') \quad \hat{V} = \frac{1}{36}(8\hat{d}_3 - \hat{d}_6), \quad \hat{P} = \frac{1}{108}(-30\dot{u}_0 + 16\hat{s}_3 - \hat{s}_6).$$

Do obliczenia \hat{v} i \hat{p} stosują się nadal wzory (10).

5. Analiza błędu. Występują tu błędy systematyczne wzoru (7) i wzorów (9) lub analogicznych wzorów (9') i (9'') oraz błędy rysunkowe. Ponadto mogą wystąpić pomyłki rachunkowe.

W rozdziale 6 opiszemy pewne zabiegi kontrolne, praktycznie zabezpieczające od pomyłek; tutaj przedyskutujemy tylko sprawę błędów.

Błędy systematyczne wzorów zależą nie tylko od kroku przyjętego w postępowaniu wyrównawczym, ale również od charakteru wyrówny-

wanej funkcji i trudno byłoby podać jakieś użyteczne oszacowania, nie wprowadzając dodatkowych założeń. Dlatego przyjmiemy po pierwsze, że ruch interesującego nas punktu (lub członu) mechanizmu jest okresowy i że wyznaczamy zawsze 24 współrzędne w położeniach równoodległych w czasie; założenie to odpowiada rozpowszechnionej praktyce. Zwróćmy teraz uwagę, że w bardzo wielu zagadnieniach praktycznych przebieg współrzędnej surowej w funkcji czasu jest podobny do przebiegu funkcji sinusowej. Dlatego, badając błąd systematyczny, ograniczymy się do przypadku, gdy

$$u = \sin(\pi t/12) \quad (t = 0, 1, 2, \dots).$$

Przyjęcie jednostkowej amplitudy nie umniejsza ogólności dalszych rozważań.

Niech u_0 będzie wartością funkcji u w takiej chwili t , że $\pi t/12 = \beta$. Inaczej mówiąc $u_0 = \sin \beta$. Tę wartość aproksymujemy, zgodnie z (7), za pomocą

$$\begin{aligned} \hat{u}_0 = \frac{1}{21} \{ & 7 \sin \beta + 6 [\sin(\beta + \pi/12) + \sin(\beta - \pi/12)] + \\ & + 3 [\sin(\beta + 2\pi/12) + \sin(\beta - 2\pi/12)] - 2 [\sin(\beta + 3\pi/12) + \\ & + \sin(\beta - 3\pi/12)] \} = 0,998 \sin \beta = 0,998 u_0. \end{aligned}$$

Znaczy to, że przyjmując wartość aproksymującą \hat{u}_0 zamiast prawdziwej u_0 popełniamy systematyczny błąd $-0,2\%$.

Podobnie możemy znaleźć systematyczny błąd przy wyznaczaniu prędkości lub przyspieszeń.

Na przykład stosując wzór (9'') do wyznaczania przyspieszeń przyjmujemy zamiast wartości prawdziwej $P = (-\pi^2/144)\sin \beta$ wartość aproksymującą

$$\begin{aligned} P &= \frac{0,998}{108} \{ -30 \sin \beta + 16 [\sin(\beta + 3\pi/12) + \sin(\beta - 3\pi/12)] - \\ & \quad - [\sin(\beta + 6\pi/12) + \sin(\beta - 6\pi/12)] \} = \\ &= -\frac{7,3581}{108} \sin \beta = 0,994 P. \end{aligned}$$

Znaczy to, że systematyczny błąd wynosi $-0,6\%$.

W ten sposób łatwo dochodzimy do tablicy 1.

Wszystkie te błędy, z wyjątkiem może błędu \hat{V} przy stosowaniu kroku potrójnego, są dużo mniejsze niż rysunkowe i można ich w ogóle nie uwzględniać.

Przechodząc do błędów rysunkowych załóżmy przede wszystkim, że kreślenie odbywa się przy poprawnym użyciu dobrych przyborów rysun-

kowych. W tych warunkach można przyjąć, że nie występują tu błędy systematyczne, tylko błędy przypadkowe rysowania i mierzenia. Zgodnie z doświadczeniem można założyć, że błędy przypadkowe są niezależne i że mają rozkłady o średniej zero i jednakowym odchyleniu średnim σ . Założenia te, łącznie z poprzednimi rozważaniami nad błędami systematycznymi wzorów, pozwalają uznać wielkości \hat{u} , \hat{V} , \hat{P} (jako kombinacje liniowe zmiennych losowych) za praktycznie nieobciążone estymatory położenia, prędkości i przyspieszeń. Teraz wyznaczmy ich wariancje.

W tym celu przedstawimy \hat{u} , \hat{V} i \hat{P} jako kombinacje liniowe niezależnych wielkości pomiarowych, a więc w postaci $(1/A)\sum w_i u_i$. Wagi w i dzielniki A spisujemy w tabelicy 2 dotyczącej wzorów (7) i (9).

TABLICA 1

Błędy systematyczne wzorów interpolacyjnych

Wielkość	Błąd systematyczny w % przy użyciu wzorów		
	(7), (9)	(7), (9')	(7), (9'')
\hat{u}	-0,2	-0,2	-0,2
\hat{V}	-0,2	-0,5	-1,4
\hat{P}	-0,2	-0,3	-0,6

TABLICA 2

Wagi i dzielniki estymatorów \hat{u} , \hat{V} i \hat{P} obliczonych według wzorów (7) i (9)

	Współczynnik w_i przy wyrazie											Dzielnik A
	u_{-5}	u_{-4}	u_{-3}	u_{-2}	u_{-1}	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	
\hat{u}_{-2}	-2	+3	+6	+7	+6	+3	-2					21
\hat{u}_{-1}		-2	+3	+6	+7	+6	+3	-2				21
\hat{u}_0			-2	+3	+6	+7	+6	+3	-2			21
\hat{u}_1				-2	+3	+6	+7	+6	+3	-2		21
\hat{u}_2					-2	+3	+6	+7	+6	+3	-2	21
$\hat{u}_0 - u_0$			-2	+3	+6	-14	+6	+3	-2			21
\hat{s}_1		-2	+3	+4	+10	+12	+10	+4	+3	-2		21
\hat{d}_1		+2	-3	-8	-4	0	+4	+8	+3	-2		21
\hat{s}_2	-2	+3	+6	+7	+4	+6	+4	+7	+6	+3	-2	21
\hat{d}_2	+2	-3	-6	-7	-8	0	+8	+7	+6	+3	-2	21
\hat{V}	-2	+19	-18	-57	-24	0	+24	+57	+18	-19	+2	252
\hat{P}	+2	-35	+102	-33	-24	-24	-24	-33	+102	-35	+2	252

Oznaczmy przez $\sigma_{\hat{u}}$, $\sigma_{\hat{V}}$ i $\sigma_{\hat{P}}$ błędy średnie zmiennych losowych, których estymatorami są \hat{u} , \hat{V} i \hat{P} , to znaczy odchylenia średnie w rozkładach warunkowych tych zmiennych dla ustalonego t . Oznaczmy ponadto przez $\sigma_{\hat{u}-u}$ odchylenie średnie w rozkładzie warunkowym dla ustalonego t zmiennej losowej, której estymatorem jest $\hat{u}-u$.

Stosując twierdzenie o wariancji sumy niezależnych zmiennych losowych możemy te odchylenia średnie obliczyć ze wzoru $(\sigma/A)\sqrt{\sum w_i^2}$; odpowiednie wagi i dzielniki bierzemy z tablicy 2.

$$(11) \quad \sigma_{\hat{u}} = 0,577\sigma, \quad \sigma_{\hat{v}} = 0,377\sigma, \quad \sigma_{\hat{P}} = 0,653\sigma.$$

$$(12) \quad \sigma_{\hat{u}-u} = 0,816\sigma.$$

Jeśli σ jest znane z poprzedniego doświadczenia, to stosując wzory (11) można ocenić dokładność, jaką daje opisana metoda.

Jeśli σ nie jest znane, można je oszacować według wzoru (12), gdyż zarówno współrzędne surowe u , jak wyrównane \hat{u} , są znane, można więc obliczyć odchylenie średnie $\bar{\sigma}$ w ciągu k liczb $\hat{u}-u$ jako

$$(13) \quad \bar{\sigma} = \sqrt{(1/k) \sum_{i=1}^k (u_{0i} - \hat{u}_{0i})^2}$$

i uważając je za oszacowanie nieznannej wartości $\sigma_{\hat{u}-u}$ znaleźć ze wzoru (12) przybliżoną wartość σ , a następnie ze wzorów (11) przybliżone wartości błędów średnich.

Podobnie można oszacować błędy związane ze stosowaniem kombinacji wzorów (7) i (9') oraz (7) i (9'').

Dla oszczędności miejsca nie podajemy tablic, które są zupełnie podobne do tablicy 2, ani też wzorów pośrednich podobnych do (11).

Wyniki ostateczne można zebrać w tablicę 3.

TABLICA 3

Oszacowanie błędów przypadkowych

Krok	pojedynczy	podwójny	potrójny
Wzory	(7), (9)	(7), (9')	(7), (9'')
$\sigma/\bar{\sigma}$	1,23	1,23	1,23
$\sigma_{\hat{u}}/\bar{\sigma}$	0,71	0,71	0,71
$\sigma_{\hat{v}}/\bar{\sigma}$	0,46	0,35	0,22
$\sigma_{\hat{P}}/\bar{\sigma}$	0,80	0,37	0,24

Wzór (11) pokazuje, że redukcja błędu współrzędnej jest dość znaczna ($\sigma_{\hat{u}}/\sigma = 0,577$), a tablica 3 świadczy o tym, że przy wyznaczaniu prędkości i przyspieszeń celowe jest stosowanie kroku podwójnego, a nawet potrójnego. Trudno jest porównać dokładność zaproponowanej metody z mało znaną dokładnością metod wykreślnych. W każdym razie wiadomo,

że przyspieszenia w skomplikowanych mechanizmach wyznaczone wykreślnie są zwykle obciążone błędem dużo większym niż współrzędne położenia, w naszej zaś metodzie błędy przyspieszeń są kilka razy mniejsze od błędów współrzędnych surowych określających położenia.

Warto może zwrócić jeszcze uwagę, że wagi i dzielniki w wierszach \hat{V} i \hat{P} tablicy 2 pozwalają obliczyć \hat{V} i \hat{P} od razu ze współrzędnych surowych. Może to być użyteczne w niektórych przypadkach, np. wtedy, gdy inte-

TABLICA 4

Badanie kinematyki członu α na rysunku 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
t	w_0	s_1	s_2	s_3	$21 w_0$	$21(w_0 - \hat{w}_0)$ — +	$21 \hat{s}_3$	$21 \hat{s}_6$	$21 \hat{d}_8$	$21 \hat{d}_6$	\hat{V}	\hat{P}
1	13,0	27,0	24,0	21,5	282,0	9,0	444,8	51,7	360,4	495,5	3,16	-0,62
2	17,0	31,5	29,0	24,0	347,0	10,0	507,8	52,1	258,6	321,7	2,31	-1,03
3	18,5	36,0	31,5	26,2	387,6	0,9	547,9	44,0	133,7	188,2	1,23	-1,28
4	19,0	37,0	33,2	26,0	402,6	3,6	555,6	33,9	-8,4	-50,5	-0,02	-1,42
5	18,5	35,2	31,5	26,0	383,2	5,3	533,9	17,3	-160,1	-231,9	-1,39	-1,31
6	16,2	31,5	28,0	22,8	340,8	0,6	478,7	13,6	-296,5	-400,6	-2,61	-1,14
7	13,0	25,2	22,8	18,5	273,6	0,6	394,3	16,8	-410,9	-547,2	-3,62	-0,84
8	9,0	17,3	15,7	13,5	186,9	2,1	275,9	23,4	-490,5	-670,6	-4,30	-0,54
9	4,3	8,5	8,0	7,0	91,1	0,8	147,3	28,5	-534,3	-746,7	-4,67	-0,18
10	-0,5	-0,7	-0,2	0	-8,3	2,2	8,4	35,6	-538,8	-769,6	-4,68	0,15
11	-5,0	-9,7	-8,7	-6,0	-107,3	2,3	-136,7	36,2	-510,5	-730,2	-4,44	0,44
12	-9,2	-18,0	-15,5	-12,7	-193,5	0,3	-268,0	45,9	-450,2	-635,7	-3,92	0,65
13	-13,0	-24,2	-22,0	-18,5	-265,2	7,8	-375,3	51,7	-358,7	-495,5	-3,14	0,84
14	-15,0	-30,0	-27,2	-21,5	-323,6	8,6	-454,3	52,1	-239,7	-321,7	-2,11	1,05
15	-17,0	-33,0	-29,5	-23,2	-359,1	2,1	-488,4	44,0	-101,4	-138,2	-0,89	1,29
16	-18,0	-33,5	-29,0	-23,5	-367,0	11,0	-487,1	33,9	43,3	50,5	0,39	1,40
17	-16,5	-32,0	-27,5	-21,5	-347,0	0,5	-458,4	17,3	188,8	231,9	1,69	1,35
18	-14,0	-27,0	-24,5	-19,3	-294,9	0,9	-406,2	13,6	312,0	400,6	2,77	1,03
19	-10,5	-20,5	-18,8	-15,5	-221,9	1,4	-324,8	16,8	409,2	547,2	3,61	0,64
20	-6,5	-12,8	-11,5	-11,0	-134,8	1,7	-222,4	23,4	471,6	670,6	4,10	0,21
21	-2,3	-4,0	-5,0	-4,0	-47,1	1,2	-87,8	28,5	502,0	746,7	4,33	-0,01
22	2,5	3,2	3,5	2,5	42,2	10,3	60,1	35,6	503,9	769,6	4,31	-0,15
23	5,5	12,5	10,7	10,5	124,6	9,1	212,2	36,2	481,8	730,2	4,13	-0,17
24	10,0	18,5	19,5	16,2	207,1	2,9	340,5	45,9	434,7	635,7	3,76	-0,36
Suma	19,0	38,0	38,0	38,0	399,0	47,6	798,0	798,0	0	0	0	0
Suma kwadratów						704						

TABLI-
Próba. Obliczenia związa-

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t	ξ	ε_x	x	s_1	s_2	s_3	\hat{x}	$\hat{x}-x$	$\hat{x}-\xi$	\hat{s}_1
1	0	5	5	68	271	583	4,29	-0,71	4,29	75,38
2	34	-9	25	139	332	637	34,81	9,81	0,81	135,96
3	134	0	134	314	505	786	131,67	-2,33	-2,33	325,53
4	293	-4	289	634	768	1013	290,72	1,72	-2,28	633,58
5	500	0	500	1032	1142	1289	501,91	1,91	1,91	1035,48
6	741	2	743	1508	1553	1634	744,76	1,76	3,76	1506,58
7	1000	8	1008	2007	2000	2000	1004,67	-3,33	4,67	2008,67
8	1259	5	1264	2508	2454	2358	1263,91	-0,09	4,91	2505,72
9	1500	0	1500	2975	2866	2713	1501,05	1,05	1,05	2969,96
10	1707	4	1711	3358	3234	3000	1706,05	-4,95	-0,95	3363,81
11	1866	-8	1858	3681	3492	3225	1862,76	4,76	-3,24	3667,00
12	1966	4	1970	3850	3672	3363	1960,95	-9,05	-5,05	3856,14
13	2000	-8	1992	3931	3721	3416	1993,38	1,38	-6,62	3922,09
14	1966	-5	1961	3855	3675	3349	1961,14	0,14	-4,86	3851,38
15	1866	-3	1863	3666	3483	3234	1858,00	-5,00	-8,00	3664,28
16	1707	-2	1705	3354	3225	2984	1703,14	-1,86	-3,86	3353,71
17	1500	-9	1491	2969	2855	2703	1495,71	4,71	-4,29	2958,90
18	1259	5	1264	2483	2447	2358	1255,76	-8,24	-3,24	2492,85
19	1000	-8	992	2006	1986	1999	997,14	5,14	-2,86	1995,47
20	741	1	742	1487	1558	1628	739,71	-2,29	-1,29	1494,95
21	500	-5	495	1036	1129	1307	497,81	2,81	-2,19	1035,47
22	293	1	294	632	785	997	295,76	1,76	2,76	638,14
23	134	3	137	337	500	767	140,33	3,33	6,33	336,33
24	34	9	43	142	319	629	40,57	-2,43	6,57	144,62
Suma		-14	23986	47972	47972	47972	23986	0	-14	47972
Suma kwadratów		700						433,3	412,1	

CA 5

no ze współrzędną ξ

12	13	14	15	16	17	18	19	20
\hat{s}_2	\hat{d}_1	\hat{d}_2	\hat{V}_x	\hat{P}_x	ξ'	ξ''	$\hat{V}_x - \xi'$	$\hat{P}_x - \xi''$
272,00	-5,76	-8,66	-3,12	67,11	0	68,54	-3,12	-1,43
331,29	127,38	250,15	64,08	66,65	67,76	66,20	-3,68	0,45
506,20	255,91	497,62	129,14	62,68	130,90	59,38	-1,76	3,30
779,57	370,24	709,95	187,66	53,01	185,12	48,47	2,54	4,54
1136,34	454,04	873,00	229,94	31,17	226,73	34,27	3,21	-3,10
1554,63	502,76	973,19	254,08	17,32	252,88	17,74	1,20	-0,42
2002,96	519,15	999,14	262,84	-0,36	261,80	0	1,04	-0,36
2450,81	496,38	961,29	250,81	-23,05	252,88	-17,74	-2,07	-5,31
2867,43	442,14	858,09	223,25	-31,63	226,73	-34,27	-3,48	2,64
3224,86	361,71	697,04	183,05	-48,78	185,12	-48,47	-2,07	-0,31
3494,43	254,90	492,33	128,91	-58,77	130,90	-59,38	-1,99	0,61
3667,19	130,62	255,09	65,82	-66,45	67,76	-66,20	-1,94	-0,25
3720,76	0,19	-4,76	0,52	-64,06	0	-68,54	0,52	4,48
3664,09	-135,38	-257,81	-68,77	-73,02	-67,76	-66,20	-1,01	-6,82
3489,09	-258,00	-497,67	-130,53	-50,05	-130,90	-59,38	0,37	9,33
3216,90	-362,29	-705,38	-182,75	-54,31	-185,12	-48,47	2,37	-5,84
2855,14	-447,38	-860,86	-226,51	-32,00	-226,73	-34,27	0,22	2,27
2442,85	-498,57	-963,43	-252,09	-19,17	-252,88	-17,74	0,79	-1,43
1993,52	-516,05	-997,90	-260,87	1,65	-261,80	0	0,93	1,65
1551,52	-499,33	-960,00	-252,89	14,70	-252,88	17,74	-0,01	-3,04
1137,47	-443,95	-856,81	-224,56	41,31	-226,73	34,27	2,17	7,04
780,28	-357,48	-699,14	-180,06	46,43	-185,12	48,47	5,06	-2,04
502,10	-255,19	-493,52	-129,00	55,77	-130,90	59,38	1,90	-3,61
330,57	-136,04	-260,95	-68,95	63,85	-67,76	66,20	-1,19	-2,35
47972	0	0	0	0	0	0	0	0
							118	358,5

TABL1
Próba. Obliczenia zwią

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t	η	ε_y	y	s_1	s_2	s_3	\hat{y}	$\hat{y} - y$	$\hat{y} - \eta$	\hat{s}_1
1	500	-5	495	1013	999	990	502,86	7,86	2,86	1002,38
2	630	4	634	1250	1222	1176	631,05	-2,95	1,05	1251,34
3	750	5	755	1477	1427	1355	748,48	-6,52	-1,52	1481,10
4	853	-10	843	1687	1610	1501	850,05	7,05	-2,95	1676,91
5	933	-1	932	1819	1761	1612	928,43	-3,57	-4,57	1828,48
6	984	-8	976	1938	1821	1688	978,43	2,43	-5,57	1926,10
7	1000	6	1006	1954	1865	1705	997,67	-8,33	-2,33	1961,00
8	984	-6	978	1939	1838	1680	982,57	4,57	-1,43	1931,91
9	933	0	933	1840	1754	1607	934,24	1,24	1,24	1837,00
10	853	9	862	1681	1609	1502	854,43	-7,57	1,43	1685,91
11	750	-2	748	1493	1429	1348	751,67	3,67	1,67	1482,95
12	630	1	631	1244	1232	1189	628,52	-2,48	-1,48	1250,52
13	500	-4	496	1001	1004	1007	498,85	2,85	-1,15	999,76
14	370	0	370	752	776	817	371,24	1,24	1,24	751,09
15	250	6	256	515	565	640	252,24	-3,76	2,24	518,86
16	147	-2	145	325	379	501	147,62	2,62	0,62	320,43
17	67	2	69	154	261	379	68,19	-0,81	1,19	163,57
18	16	-7	9	74	154	317	15,95	6,95	-0,05	65,76
19	0	5	5	18	130	292	-2,43	-7,43	-2,43	30,28
20	16	-7	9	66	156	313	14,33	5,33	-1,67	61,09
21	67	-6	61	156	249	388	63,52	2,52	-3,48	158,28
22	147	0	147	305	388	500	143,95	-3,05	-3,05	313,33
23	250	-6	244	526	556	643	249,81	5,81	-0,19	515,28
24	370	9	379	739	781	816	371,33	-7,67	1,33	752,67
Suma		-17	11983	23966	23966	23966	11983	0	-17	23966
Suma kwadratów		725						621,5	129,8	

CA 6

zane ze współrzędną η

12	13	14	15	16	17	18	19	20
\hat{s}_2	\hat{d}_1	\hat{d}_2	\hat{V}_y	\hat{P}_y	η	η''	$\hat{V}_y - \eta$	$\hat{P}_y - \eta''$
998,29	259,72	498,67	131,58	-3,83	130,90	0	0,68	-3,83
1221,38	245,62	478,72	123,85	-10,95	126,44	-8,87	-2,59	-2,08
1431,29	219,00	425,57	110,54	-15,67	113,36	-17,13	-2,82	1,46
1609,48	179,95	347,38	91,02	-23,37	92,56	-24,23	-1,54	0,86
1746,15	128,38	249,19	64,82	-28,61	65,45	-29,68	-0,63	1,07
1832,62	69,24	132,52	35,12	-30,66	33,88	-33,10	1,24	2,44
1862,67	4,14	5,81	2,28	-34,73	0	-34,27	2,28	-0,46
1832,86	-63,43	-124,00	-31,95	-33,28	-33,88	-33,10	1,93	-0,18
1749,34	-128,14	-246,00	-64,93	-32,05	-65,45	-29,68	0,52	-2,37
1611,09	-182,57	-354,05	-92,21	-22,45	-92,56	-24,23	0,35	1,78
1433,09	-225,91	-435,39	-114,32	-21,33	-113,36	-17,13	-0,96	-4,20
1225,67	-252,82	-483,19	-128,28	-6,08	-126,44	-8,87	-1,84	2,79
1003,91	-257,28	-499,43	-129,90	2,23	-130,90	0	1,00	2,23
776,14	-246,61	-480,90	-124,33	8,67	-126,44	8,87	2,11	-0,20
567,04	-223,62	-430,66	-113,19	13,96	-113,36	17,13	0,17	-3,17
387,19	-184,05	-355,29	-93,09	25,92	-92,56	24,23	-0,53	1,69
249,81	-131,67	-254,67	-66,56	26,80	-65,45	29,68	-1,11	-2,88
161,95	-70,62	-133,29	-35,97	34,31	-33,88	33,10	-2,09	1,21
131,71	-1,62	-4,67	-0,69	35,47	0	34,27	-0,69	1,20
159,90	65,95	128,00	33,30	32,30	33,88	33,10	-0,58	-0,80
247,38	129,62	252,24	65,39	31,62	65,45	29,68	-0,06	1,94
385,66	186,29	357,00	94,44	25,76	92,56	24,23	1,88	1,53
566,38	227,38	439,34	114,97	15,32	113,36	17,13	1,61	-1,81
775,00	253,05	487,10	128,11	10,65	126,44	8,87	1,67	1,78
23966	0	0	0	0	0	0	0	0
							54,1	105,7

resuje nas przyspieszenie tylko w pewnym charakterystycznym położeniu mechanizmu.

6. Zastosowanie. Wracając do mechanizmu parowozowego z rysunku 1 zastosujemy zaproponowaną metodę do członu a . Przede wszystkim wyznaczamy⁽¹⁾ kąt u_0 (w stopniach) członu a z dowolnie wybraną linią odniesienia w 24 położeniach wału korbowego, który z założenia obraca się ze stałą prędkością. Wyniki są w kolumnach 1 i 2 tablicy 4. W kolumnach 3, 4 i 5 obliczamy sumy s_1 , s_2 i s_3 według wzorów (6). Stosując następnie wzór (7) obliczamy wyrównane współrzędne kątowe (kolumna 6); ponieważ są nam one potrzebne tylko do dalszych manipulacji numerycznych, zapisujemy wartości $21\hat{u}_0$ zamiast \hat{u}_0 , unikając w ten sposób kłopotów z dzieleniem i zaokrągleniem.

W kolumnie 7 są różnice $21(u_0 - \hat{u}_0)$, których suma kwadratów wynosi 704, co pozwala obliczyć z wzoru (13) $\bar{\sigma} = 0,257$ stopni i oszacować zgodnie z tablicą 3 średni błąd współrzędnych surowych na $1,23 \cdot 0,257^\circ \sim 20'$. Nawiasem mówiąc, jest to dokładność duża; osiągnięto ją dzięki użyciu modeli odwzorowujących niektóre fragmenty mechanizmu stawidłowego.

Mając już $\bar{\sigma}$ można na podstawie tablicy 3 oszacować, że średni błąd $\sigma_{\hat{p}}$ przy wyznaczaniu przyspieszenia jednostkowego wyniesie 0,21, 0,10 lub 0,07 stopni na kwadrat przedziału, zależnie od tego, czy do wyznaczania przyspieszeń przyjmujemy krok pojedynczy, podwójny, czy też potrójny. Ponieważ orientacyjne oszacowanie okazało, że \hat{P} zmienia się od $-1,4$ do $+1,4$ stopni na kwadrat przedziału, zdecydowano się na wyrównywanie przy użyciu kroku potrójnego, a więc wzorów (9''). Oczywiście większy krok implikuje nieco większy błąd systematyczny (por. tabl. 1), ale porównanie błędu systematycznego z przypadkowym pokazało, że decyduje tu błąd przypadkowy.

Zgodnie z wzorami (8'') obliczono s_3 , \hat{s}_6 , \hat{d}_3 i \hat{d}_6 , a raczej ich 21-krotne wartości i umieszczono je w kolumnach od 8 do 11. Wreszcie, stosując wzory (9''), znaleziono \hat{V} i \hat{P} (kolumny 12 i 13). Wyniki przedstawiono na rysunku 3. Oszacowania średnich błędów przypadkowych są:

$$\sigma_{\hat{v}} \sim 0,06 \text{ stopni na przedział,}$$

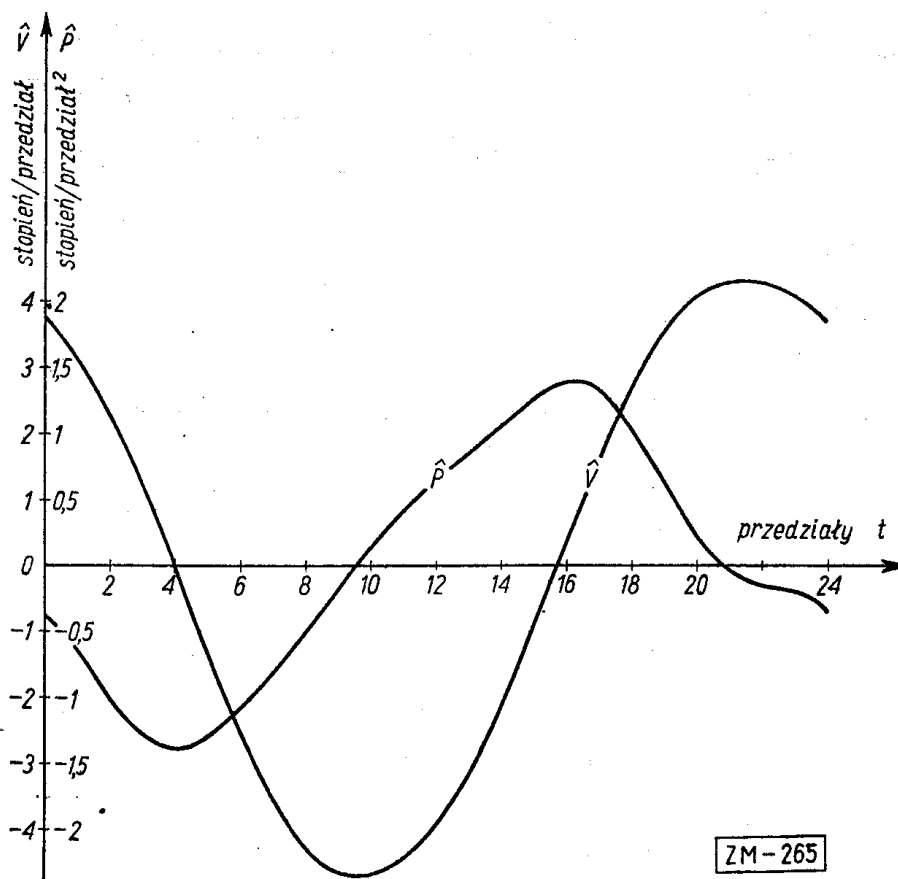
$$\sigma_{\hat{p}} \sim 0,06 \text{ stopni na kwadrat przedziału.}$$

Znając prędkość kątową wału korbowego (335 obrotów na minutę) można znaleźć $\Delta t = 0,00747$ sekund i stosując wzory (10) znaleźć prędkości

(1) Wszystkie czynności wykreslne i rachunkowe związane z tym przykładem wykonał inż. T. Tomaszczyk, jako fragment pracy magisterskiej prowadzonej w katedrze silników parowych Politechniki Warszawskiej.

kątowe i oszacowanie ich błędów w zwykłych jednostkach kinematycznych rdsek⁻¹ i rdsek⁻²; pomijamy te rachunki jako banalne.

Wracając do czynności roboczych związanych z tablicą 4 warto zanotować, że przy obliczaniu sum s i różnic d dogodnie jest posługiwać się szablonikami podobnymi do pokazanego na rysunku 4. Szablonik ten służy do obliczania s_1 . Długość



Rys. 3. Prędkość i przyspieszenie członu a z rysunku



Rys. 4. Szablonik do obliczania s_1

kreskę (dolną lub górną) ustawiamy na środku wiersza, w którym ma być napisany wynik s_1 ; wtedy krótkie kreski pokazują liczby, które należy dodać.

Wiersz oznaczony w tabeli 4 tytułem „suma” służy do kontroli rachunków. Łatwo uzasadnić, że jeśli sumowanie rozciąga się na jeden cykl ruchu, to przy poprawnych rachunkach zachodzą związki

$$(14) \quad \begin{aligned} s_3 = s_4 = s_5 = 2s_2, \quad s_6 = 21s_2, \quad s_8 = s_9 = 42s_2, \\ s_7 = s_{10} = s_{11} = s_{12} = s_{13} = 0, \end{aligned}$$

gdzie S_i oznacza sumę i -tej kolumny. W naszym przypadku zależności (14) są spełnione dokładnie.

Warto jeszcze zwrócić uwagę, że najdogodniej jest wszystkie działania rachunkowe prowadzić na sumatorze buchalteryjnym z rejestracją na taśmie. Odcinki tej taśmy, naklejone na arkusz papieru, dają od razu tablicę 4, praktycznie wolną od błędów rachunkowych. Czas sporządzenia takiej tablicy wynosi około 4 godzin.

7. Próba. Ciekawe byłoby porównanie wyników zaproponowanej metody z wynikami dokładnymi, a więc otrzymanymi metodą analityczną. Mechanizm z rysunku 1 nie nadaje się do tego celu, gdyż ruch członu a daje się opisać tylko za pomocą bardzo skomplikowanego układu równań trygonometrycznych.

Mniej efektywną, ale nie mniej przekonującą weryfikację doświadczalną naszej metody można przeprowadzić na przykładzie ruchu punktu, którego teoretyczne prawo ruchu jest proste i znane. Jeśli do współrzędnych teoretycznych dodamy znane błędy przypadkowe, otrzymamy współrzędne surowe, do których można zastosować zaproponowaną metodę i porównać wynik z teoretycznym.

Przypuśćmy, że pewien punkt mechanizmu porusza się po elipsie o równaniu parametrycznym

$$\begin{aligned} \xi &= 1000 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{24} t \right), \\ \eta &= 500 \left(1 + \sin \frac{2\pi}{24} t \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Różniczkując (15) znajdujemy teoretyczne prędkości i przyspieszenia

$$\begin{aligned} \xi' &= 261,8 \sin \frac{2\pi}{24} t, & \eta' &= 130,9 \cos \frac{2\pi}{24} t, \\ \xi'' &= 68,54 \cos \frac{2\pi}{24} t, & \eta'' &= -34,27 \sin \frac{2\pi}{24} t. \end{aligned} \quad (16)$$

W tablicy 5 w kolumnach 2, 17 i 18 podano⁽²⁾ wartości teoretyczne związane ze współrzędną ξ , obliczone z wzorów (15) i (16). Kolumna 3 zawiera „błąd przypadkowy” stworzony za pomocą tablicy liczb przypadkowych. Sumy liczb z kolumn 2 i 3 są w kolumnie 4 i stanowią „współrzędne surowe” otrzymane z fikcyjnego pomiaru. Do tych współrzędnych zastosowano w znany nam już sposób wzory (7) i (9). Dla większej przej-

⁽²⁾ Wszystkie czynności rachunkowe wykonała K. Olsztyńska z Instytutu Matematycznego PAN.

rzystości podano wyrażenia typu s i d , a nie $21s$ i $21d$, jak w tabelicy 4. Wyniki \hat{x} , \hat{V}_x i \hat{P}_x są w kolumnach 8, 15 i 16. Dodatkowo obliczono w kolumnach 10, 19 i 20 różnice $\hat{x}-\xi$, $\hat{V}_x-\xi'$ i $\hat{P}_x-\xi''$, czyli obiektywnie stwierdzone błędy wyników w porównaniu z teoretycznymi.

Podobnie obliczono tabelicę 6 dotyczącą współrzędnej η .

Na tej podstawie można już porównać oszacowania błędów przypadkowych z prawdą obiektywną. Ponieważ wszystkie błędy ε_x i ε_y były z założenia niezależne, można dodać do siebie sumy kwadratów w odpowiadających sobie kolumnach tablic 5 i 6. W ten sposób obliczono w tabelicy 7 wartości prawdziwe błędów i ich oszacowania oparte na 48 „pomiarach”, otrzymując wyniki zadowalająco zgodne.

TABLICA 7

Wartości prawdziwe i oszacowane błędów

Błąd średni	Wartość prawdziwa	Wartość oszacowana
$\bar{\sigma}$	—	wg kol. 9: $\sqrt{(432,2+621,2)/48} = 4,68$
σ	wg kol. 3: $\sqrt{(700+725)/48} = 5,45$	według tabl. 3 $1,23 \cdot 4,68 = 5,73$
σ_a	wg kol. 10: $\sqrt{(411,8+129,9)/48} = 3,36$	dla kroku $0,71 \cdot 4,68 = 3,31$
$\sigma_{\hat{p}}$	wg kol. 19: $\sqrt{(117,0+54,6)/48} = 1,89$	pojedynczego $0,46 \cdot 4,68 = 2,15$
$\sigma_{\hat{p}}$	wg kol. 20: $\sqrt{(358,0+105,9)/48} = 3,11$	$0,80 \cdot 4,68 = 3,74$

Ponieważ błędy przypadkowe położenia, prędkości i przyspieszenia mają, jako kombinacje liniowe wielu zmiennych losowych niezależnych, rozkłady podobne do normalnych, można spodziewać się, że prawdopodobieństwo otrzymania błędów 2 razy większych od oszacowanych błędów średnich jest rzędu 5%, a wystąpienie błędów 3 razy większych jest praktycznie niemożliwe. Przeglądając tablice 5 i 6 można się przekonać, że przewidywania te spełniają się.

Prace cytowane

[1] J. Oderfeld, *O dokładności pewnej metody wyznaczania prędkości i przyspieszenia punktu*, Archiwum Budowy Maszyn IV. 1, (1957), str. 23-32.

[2] M. P. Kendall, *Advanced Theory of Statistics*, t. II, London 1947, str. 372-378.

[3] И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев, *Справочник по математике*, Москва 1953, str. 576.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 8. 12. 1956

Я. ОДЕРФЕЛЬД (Варшава)

*О НЕКОТОРОМ ПРИЛОЖЕНИИ ВЫРАВНИВАТЕЛЬНОГО
ИСЧИСЛЕНИЯ К КИНЕМАТИКЕ МЕХАНИЗМОВ*

РЕЗЮМЕ

Кинематический анализ некоторых сложных механизмов представляет большие трудности, так как аналитические методы приводят к неэффективным решениям, а графические методы дают в конечном счете чересчур большую погрешность, вызванную накоплением погрешностей в элементарных операциях.

Для таких случаев предложен метод состоящий из следующих этапов:

- a) графическое определение положений механизма,
- b) выравнивание положений при помощи скользящей средней,
- c) определение скоростей и ускорений по интерполяционным формулам,
- d) контроль правильности вычислений,
- e) оценка погрешности.

После изложения теории метода, показано его применение в конкретном случае из области кинематики паровозов, а затем в случае искусственно построенного примера, в котором исходные погрешности были заранее известны.

Этот пример дал возможность сравнить оценку погрешностей, предусмотренных описанным методом с фактическими погрешностями, причем получилось хорошее сходство.

Даны также практические указания позволяющие просто, быстро и точно исследовать даже очень сложные механизмы.

J. ODERFELD (Warszawa)

*ON A CERTAIN APPLICATION OF THE ADJUSTMENT CALCULUS
TO THE KINEMATICS OF MECHANISMS*

SUMMARY

The kinematic analysis of certain complex mechanisms offers considerable difficulties because the analytical methods do not lead to effective solutions and the graphical methods give a too large final error, due to the cumulation of errors in elementary operations.

For such cases the method consisting of the following stages is suggested:

- a) a graphical determination of the positions of the mechanism,
- b) an adjustment of the positions by means of the moving average,
- c) determination of the speed and accelerations by means of interpolation formulas,
- d) checking the accuracy of the calculations,
- e) estimating the error.

Having explained the theory of the method, the author shows its application in a definite case concerning locomotives and then gives an artificially constructed example in which the errors of the unadjusted values are known.

This example has made it possible to compare the estimates of the errors foreseen by the above method with the real errors, good agreement having been obtained.

The paper contains also practical hints permitting a simple, quick and accurate investigation even of very complicated mechanisms.