ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLI (1983)

# Sur la courbure des lignes de niveau dans la classe $S^c_{\alpha k}$ des fonctions convexes d'ordre $\alpha$ et $k$-symétriques

par Z. Bogucki et J. Zderkiewicz (Lublin)

**Résumé.** Soit $S^c_{\alpha k}$ la famille des fonctions convexes d'ordre $\alpha$, $k$-symétriques. On établit dans ce travail une limitation exacte de la courbure des lignes de niveau des fonctions $f \in S^c_{\alpha k}$ (théorème 2).

**1. Introduction.** Désignons par $S^*_{\alpha k}$, $S^c_{\alpha k}$, $\alpha \in [0, 1)$, $k = 1, 2, \ldots$, les familles des fonctions

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk+1} z^{nk+1},$$

analytiques dans le cercle-unité $K$ et satisfaisant dans celui-ci respectivement aux conditions

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha, \quad \operatorname{Re} \left[ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > \alpha.$$

On sait bien que si $f \in S^*_{\alpha k}$ ($S^c_{\alpha k}$), elle effectue la représentation univalente du cercle $K$ sur un domaine $k$-symétrique étoilé par rapport au point $w = 0$ ($k$-symétrique convexe).

Désignons par $K_z(f, S^c_{\alpha k})$, $f \in S^c_{\alpha k}$, la courbure de la ligne de niveau $f(C_r)$, $C_r = \{z\colon |z| = r\}$, au point $w = f(z)$. On montre aisément que

$$K_z(f, S^c_{\alpha k}) = \frac{\operatorname{Re} \left[ 1 + \dfrac{zf''(z)}{f'(z)} \right]}{|zf'(z)|}.$$

Dans ce travail nous nous proposons de trouver des limitations de

$$\inf_f K_z(f, S^c_{\alpha k}) \quad \text{et} \quad \sup_f K_z(f, S^c_{\alpha k}).$$

Ce problème se résout facilement si l'on connaît dans la famille $S^c_{\alpha k}$ des limitations exactes de la forme

$$U(|f'(z)|) \leqslant \operatorname{Re} \left[ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] \leqslant V(|f'(z)|). \tag{1}$$

Pour obtenir ces limitations nous allons déterminer l'ensemble des valeurs de la fonctionnelle

$$I(f) = \ln|f(z)| + i \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}$$

dans la famille $S^*_{\alpha k}$, et de là nous déduirons des limitations exactes de la partie réelle $zf'(z)/f(z)$ en fonction de $|f(z)|$. Enfin on obtient (1) en tenant compte de la relation entre les fonctions des familles $S^*_{\alpha k}$ et $S^c_{\alpha k}$.

**2. L'ensemble des valeurs de la fonctionnelle $I(f)$ dans la famille $S^*_{\alpha k}$.**

THÉORÈME 1. *L'ensemble des valeurs de la fonctionnelle $I(f)$ est le domaine $D$ fermé et convexe dont la frontière est la somme de l'arc*

$$u = \frac{1-\alpha}{k}\ln\left[\frac{r^{k/(1-\alpha)}}{1-r^{2k}}\cdot\frac{v-\alpha}{1-\alpha}\right], \quad \frac{r}{(1+r^k)^{2(1-\alpha)/k}} \leqslant e^u \leqslant \frac{r}{(1-r^k)^{2(1-\alpha)/k}} \tag{2}$$

*et du segment de droite*

$$u = \left[\frac{1-r^{2k}}{2kr^k}\ln\frac{1+r^k}{1-r^k}\right]v + \ln r(1+r^k)^{2(\alpha-1)/k} - \frac{1-r^{2k}}{2kr^k}\left[\alpha+(1-\alpha)\frac{1+r^k}{1-r^k}\right]\ln\frac{1+r^k}{1-r^k}, \tag{3}$$

$|z| = r$, *joignant les extrémités de cet arc.*

Démonstration. L'ensemble $D$ est fermé, puisque la famille $S^*_{\alpha k}$ est compacte et que la fonctionnelle $I(f)$ est continue. En modifiant convenablement le théorème 2 du travail [1] on voit que les points frontières de l'ensemble $D$ proviennent de la fonction

$$F(z) = z[(1-e^{-i\theta_1}z^k)^{-t}(1-e^{-i\theta_2}z^k)^{t-2}]^{(1-\alpha)/k}, \tag{4}$$

où $0 \leqslant t \leqslant 2$, $\theta_1 < \theta_2 < 2\pi+\theta_1$.

Nous allons montrer que $D = \{I(F)\}$, où $F$ varie dans la famille des fonctions de la forme (4). Comme

$$\ln|F(z)| = \ln|z| + \frac{1-\alpha}{k}\left[\frac{t}{2}\ln|1-e^{-i\theta_1}z^k|^{-2} + \frac{2-t}{2}\ln|1-e^{-i\theta_2}z^k|^{-2}\right]$$
$$= \ln r(1-r^{2k})^{(\alpha-1)/k} + \frac{1-\alpha}{k}\sum_{s=1}^{2}\frac{t_s}{2}\ln(1-r^{2k})|1-e^{-i\theta_s}z^k|^{-2},$$

$t_1 = t$, $t_2 = 2-t$, et

$$\operatorname{Re}\frac{zF'(z)}{F(z)} = \alpha + (1-\alpha)\sum_{s=1}^{2}\frac{t_s}{2}(1-r^{2k})|1-e^{-i\theta_s}z^k|^{-2},$$

donc

$$(5)\qquad I(F)=\ln r(1-r^{2k})^{(\alpha-1)/k}+i\alpha+\frac{1-\alpha}{k}\sum_{s=1}^{2} T_s,$$

$$T_s=\frac{t_s}{2}\,[\ln(1-r^{2k})|1-e^{-i\theta_s}z^k|^{-2}+ik(1-r^{2k})|1-e^{-i\theta_s}z^k|^{-2}].$$

De (5) il résulte que l'ensemble $\{I(F)\}$ est convexe, d'où $D=\{I(F)\}$. La frontière du domaine $D$ est donc la somme de l'arc de la courbe

$$(6)\qquad w(\theta)=P(\theta)+iQ(\theta),\qquad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

où

$$P(\theta)=\ln r(1-r^{2k})^{(\alpha-1)/k}+\frac{1-\alpha}{k}\ln(1-r^{2k})|1-e^{-i\theta}z^k|^{-2},$$

$$Q(\theta)=\alpha+(1-\alpha)(1-r^{2k})|1-e^{-\theta i}z^k|^{-2},$$

et du segment de droite joignant les extrémités de cet arc. Éliminant le paramètre $\theta$ de la relation $w(\theta)=u+iv$ on obtient l'équation (2). Il suffit encore de tenir compte du fait que $r(1+r^k)^{-2(1-\alpha)/k}\leqslant|f(z)|\leqslant r(1-r^k)^{-2(1-\alpha)/k}$, si $f\in S^*_{\alpha k}$ et $|z|=r$.

Remarque. Dans le cas où $\alpha=0$, $k=1$, l'ensemble des valeurs de la fonctionnelle $I(f)$ a été déterminé par Gutlanskiĭ [2].

Corollaire 1. *Si* $f\in S^*_{\alpha k}$ *et* $|z|=r$, *on a*

$$(7)\qquad A_1\leqslant\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}\leqslant B_1,$$

*où*

$$A_1=\alpha+(1-\alpha)(1-r^{2k})\left|\frac{f(z)}{r}\right|^{k/(1-\alpha)},$$

$$B_1=\alpha+(1-\alpha)\frac{1+r^k}{1-r^k}+\frac{2kr^k}{1-r^{2k}}\cdot\frac{\ln[|f(z)/r|(1-r^k)^{2(1-\alpha)/k}]}{\ln(1+r^k)/(1-r^k)}.$$

*Les limitations* (7) *sont exactes.*

Démonstration. Fixant arbitrairement $u=\ln|f(z)|$ on trouve que le point $w=u+iv$ se déplace le long du segment de droite dont une extrémité appartient à la courbe (2) et l'autre à la droite (3). La démonstration est ainsi achevée.

Profitant de la relation: $(f\in S^c_{\alpha k})\leftrightarrow(zf'\in S^*_{\alpha k})$ et tenant compte du corollaire 1 on obtient:

Corollaire 2. *Si* $f\in S^c_{\alpha k}$ *et* $|z|=r$, *on a*

$$(8)\qquad A_2\leqslant\operatorname{Re}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]\leqslant B_2,$$

*où*

$$A_2 = \alpha+(1-\alpha)\,(1-r^{2k})\,|f'(z)|^{k/(1-\alpha)},$$

$$B_2 = \alpha+(1-\alpha)\,\frac{1+r^k}{1-r^k}+\frac{2kr^k}{1-r^{2k}}\cdot\frac{\ln\,[|f'(z)|\,(1-r^k)^{2(1-\alpha)/k}]}{\ln\,(1+r^k)/(1-r^k)}.$$

*Les limitations* (8) *sont exactes.*

**3. Lemmes auxiliaires.** Soit $L(x) = A_2/rx$, $M(x) = B_2/rx$, où $A_2$, $B_2$, sont définis dans le corollaire 2, $x = |f'(z)|$, $|z| = r$. Les fonctions $L$, $M$, sont donc définie dans l'intervalle $J = [x_1, x_2]$, $x_1 = (1+r^k)^{2(\alpha-1)/k}$, $x_2 = (1-r^k)^{2(\alpha-1)/k}$.

LEMME 1. *Si* $z$, $|z| = r > 0$, *est un point fixé du cercle* $K$, *on a*

$$Q = \min_{x\in J} L(x) = \begin{cases} L(x_1) & si \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1(r, k),\\ L(x_0) & si \quad \alpha_1(r, k) \leqslant \alpha < 1,\end{cases}$$

*où* $x_0$, $\alpha_1(r, k)$ *sont les solutions uniques des équations* $L'(x) = 0$, $x_1 = x_0$.

Démonstration. Prolongeant le domaine de la fonction sur l'intervalle $(0, \infty)$, on constate qu'au point $x_0 = [\alpha^{-1}(1-r^{2k})\,(k+\alpha-1)]^{(\alpha-1)/k}$ elle admet un minimum absolu. Comme $x_0 \leqslant x_2$, on a

$$\min_{x\in J} L(x) = \begin{cases} L(x_0) & \text{si} \quad x_1 \leqslant x_0,\\ L(x_1) & \text{si} \quad x_0 \leqslant x_1.\end{cases} \tag{9}$$

Nous établirons maintenant la position du point $x_0$ par rapport à $x_1$. Or, on a

$$x_1 \leqslant x_0 \quad \text{si} \quad \alpha_1(r, k) \leqslant \alpha < 1,$$

et

$$x_0 \leqslant x_1 \quad \text{si} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1(r, k),$$

où

$$\alpha_1(r, k) = \frac{(1-r^k)\,(k-1)}{2r^k}.$$

En tenant compte de ce qui précède dans (9), on achève la démonstration du lemme 1.

LEMME 2. *Si* $z$, $|z| = r > 0$, *est un point fixé du cercle* $K$, *on a*

$$R = \max_{x\in J} M(x) = \begin{cases} M(x_0^*) & si \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2(r, k),\\ M(x_2) & si \quad \alpha_2(r, k) \leqslant \alpha < 1,\end{cases}$$

*où* $x_0^*$, $\alpha_2(r, k)$ *sont les solutions uniques des équations* $M'(x) = 0$, $x_0^* = x_2$.

Démonstration. Prolongeant la fonction $M$ sur l'intervalle $(0, \infty)$ on voit aisément qu'au point $x_0^* = x_2 e^b$, où

$$b = 1-\frac{1-r^{2k}}{2kr^k}\left[\alpha+(1-\alpha)\,\frac{1+r^k}{1-r^k}\right]\cdot\ln\frac{1+r^k}{1-r^k}, \tag{10}$$

elle admet un maximum absolu. Nous allons montrer que $x_1 \leqslant x_0^*$. L'inégalité $x_1 \leqslant x_0^*$ prend, après quelques transformations, la forme équivalente

$$\begin{aligned} 0 < 2(1-\alpha) \ln \frac{1+r^k}{1-r^k}+kb \\ = -\alpha(1-r^k) \ln \frac{1+r^k}{1-r^k}-\frac{(1-r^k)^2}{2r^k} \ln \frac{1+r^k}{1-r^k}+k = u(\alpha). \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que l'on a $u(1) > 0$ pour $0 < r < 1$ et $k \geqslant 1$. Or,

$$u(1) = k-\frac{1-r^{2k}}{2r^k} \ln \frac{1+r^k}{1-r^k},$$

d'où $[u(1) > 0] \leftrightarrow [h(r) > 0]$, $h(r) = 2kr^k(1-r^{2k})^{-1} - \ln (1+r^k)/(1-r^k)$. Comme $h(0) = 0$ et

$$h'(r) = \frac{2kr^{k-1}}{1-r^k} \left| k \frac{1+r^k}{1-r^k}-1 \right| > 0,$$

l'inégalité $x_1 < x_0^*$ est établie. Nous nous occuperons maintenant de la position du point $x_0^*$ par rapport à $x_2$. Si $x_0^* \leqslant x_2$, on doit avoir $e^b \leqslant 1$ ou, tenant compte de (10),

$$\alpha \frac{(1+r^k)^2}{k} \ln \frac{1+r^k}{1-r^k}-\frac{1-r^{2k}}{2kr^k} \ln \frac{1+r^k}{1-r^k}+1 \leqslant 0.$$

Cette inégalité est vérifiée si $\alpha \leqslant \alpha_2(r, k)$. On trouve de même que $x_0^* \geqslant x_2$ si $\alpha \geqslant \alpha_2(r, k)$. La démonstration du lemme 2 sera achevée si l'on tient compte du fait que

$$\max_{x \in J} M(x) = \begin{cases} M(x_0^*) & \text{si} \quad x_0^* \leqslant x_2, \\ M(x_2) & \text{si} \quad x_2 \leqslant x_0^*. \end{cases}$$

**4. Résultat principal.**

THÉORÈME 2. *Si l'on fixe le point* $z \in K$, $|z| = r > 0$, *on a les limitations exactes*

(11) $$Q \leqslant K_z(f, S_{\alpha k}^c) \leqslant R,$$

*où*

$$Q = \begin{cases} Q_1 & si \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1(r, k), \\ Q_2 & si \quad \alpha_1(r, k) \leqslant \alpha < 1, \end{cases}$$

$$Q_1 = \frac{1+(2\alpha-1)r^k}{r(1+r^k)^{1-2(1-\alpha)/k}},$$

$$Q_2 = \left[\frac{\alpha}{k+\alpha-1}\right]^{(k+\alpha-1)/k} \cdot \frac{(1-r^{2k})^{(1-\alpha)/k}}{r}, \qquad \alpha_1(r, k) = \frac{(1-r^k)(k-1)}{2r^k};$$

$$R = \begin{cases} R_1 & si \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2(r, k), \\ R_2 & si \quad \alpha_2(r, k) \leqslant \alpha < 1, \end{cases}$$

$$R_1 = \frac{2ke^{-1} r^{k-1}}{(1-r^{2k})^{(\alpha+k-1)/k} \ln \dfrac{1+r^k}{1-r^k}} \left[\frac{1+r^k}{1-r^k}\right]^{[1+(1-2\alpha)r^{2k}]/2kr^k},$$

$$R_2 = \frac{1-(2\alpha-1)r^k}{r(1-r^k)^{(2\alpha+k-2)/k}},$$

$$\alpha_2(r, k) = \frac{1+r^k}{2r^k} - \frac{k}{(1+r^k)\ln(1+r^k)/(1-r^k)}.$$

Démonstration. Divisant les deux membres de (8) par $rx$, $x = |f'(z)|$ on obtient

$$L(x) \leqslant K_z(f, S^c_{\alpha k}) \leqslant M(x).$$

Il n'y a plus qu'à appliquer les lemmes 1 et 2. L'exactitude des limitations (11) résulte du corollaire 2.

Remarque. Dans le cas où $\alpha = 0$, $k = 1$ le théorème 2 a été démontré par W. A. Zmorovič dans [4]; dans le cas où $k = 1$, $0 \leqslant \alpha < 1$ il a été établi par J. Zderkiewicz dans [3].

### Travaux cités


[1] I. A. A. Aleksandrov, V. Ja. Gutljandskij, *Ekstremal'nye zadachi na klassakh analiticheskikh funkcji, imejushchikh strukturnuju formulu*, Dokl. AN SSSR 165.5 (1965), p. 938-986.

[2] V. Ja. Gutljanskij, *Ob oblastjakh znachenij nekotorykh funkcionalov i svojstvakh linij urovnja na klassakh odnolistnykh funkcij*, Trudy Tomskogo Ordena Trudovogo Gosudarstvennogo Universiteta im. V. V. Kujbysheva 200 (1968), p. 71–87.

[3] J. Zderkiewicz, *Sur la courbure des lignes de niveau dans la classe des fonctions convexes d'ordre a*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Section A 27 (1973), p. 131–138.

[4] V. A. Zmorovich, *O nekotorykh variacionnykh zadachakh teorii odnolistnykh funkcji*, Ukr. Matem. Zh. 4 (1952), p. 276–298.


*Reçu par la Rédaction le 5. 11. 1977*