ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXIV (1977)

Schéma des différences finies pour un système d'équations paraboliques non linéaires avec dérivées mixtes

par MARIAN MALEC (Cracovie)

Résumé. Dans la note on prouve que le schéma explicite des différences finies pour le système d'équations partielles du type parabolique

$$\frac{\partial u_l}{\partial x_0} = f_l\left(x, u, \frac{\partial u_l}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}\right) \quad (l = 1, \ldots, m)$$

où $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in R^{1+n}$, $u_l = u_l(x)$ $(l = 1, \ldots, m)$ est une fonction réelle,

$$\frac{\partial u_l}{\partial x} = \left\{\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right\}, \quad \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} = \left\{\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j}\right\} \quad (i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n)$$

avec les conditions aux limites de première espèce de la forme

$$u_l(x) = \varphi_{ls}(x) \quad \text{pour} \quad x_s = 0 \quad (l = 1, \ldots, m, s = 0, 1, \ldots, n),$$
$$u_l(x) = \psi_{ls}(x) \quad \text{pour} \quad x_s = \sigma \quad (l = 1, \ldots, m, s = 1, \ldots, n)$$

est convergent et on propose une estimation de l'erreur de la méthode des différences finies (voir théorème 1).

1. L'étude des processus d'échange de masse et de chaleur est à l'heure actuelle un des problèmes les plus importants des sciences techniques. Les processus en question constituent la base de la thermodynamique, de l'hydrodynamique, de la théorie moléculaire des dispersoïdes et de la cinétique chimique, et l'intérêt de leur aspect pratique dans l'industrie métallurgique, énergétique et chimique augmente de jour en jour. Dans l'analyse de ces phénomènes on utilise diverses méthodes. L'une d'elles — la méthode analytique — vise à obtenir une formule effective exprimant la solution d'un système d'équations partielles du second ordre du type parabolique (ces équations décrivent le processus l'échange de masse et de chaleur) à l'aide de fonctions élémentaires et spéciales (de Bessel, de Hankel etc.).

Cette méthode a pourtant une portée bien restreinte et elle est employée surtout dans l'analyse qualitative des solutions ainsi que dans les questions simples et typiques concernant l'échange de masse et de chaleur.

Tenant compte de ce qui précède et du rapide progrès de la technique du calcul, on peut dire que la méthode analytique cède de plus en plus la place aux méthodes approchées et numériques dont la plus universelle est la méthode des réseaux, étant donné qu'elle permet de résoudre des problèmes aussi bien lineaires que non linéaires, tandis que notre connaissance actuelle des méthodes analytiques ne permet en principe que de les appliquer aux problèmes linéaires.

La méthode des réseaux se caractérise aussi par la répétition des mêmes opérations de calcul, ce qui s'avère très commode à l'époque où a lieu un rapide développement des ordinateurs. L'évolution de la technique du calcul a contribué au progrès dans les méthodes des réseaux appliquées aux problèmes de la physique mathématique, et en particulier à ceux qui concernent l'échange de masse et de chaleur.

La méthode des réseaux consiste à remplacer un système d'équations différentielles par un système d'équations algébriques convenable, dans lequel les inconnues sont les valeurs des fonctions en des points discrets appelés *points nodaux*. Un tel système peut être obtenu en approchant les dérivées figurant dans le système d'équations différentielles par les quotients de différences fines convenables.

Le système algébrique obtenu après une telle opération est en général non linéaire et dans chaque équation il apparaît plus d'une valeur cherchée. Dans le cas où chaque équation comporte une seule inconnue, une méthode des réseaux convenable est la méthode appelée schéma explicite des différences finies pour le problème différential donné. Les processus non stationnaires d'échange de masse et de chaleur dans un système de corps anisotropes sont modelés dans la science physique à l'aide de systemès d'équations partielles non linéaires du type parabolique

$$\frac{\partial u_l}{\partial x_0} = f_l\left(x, u, \frac{\partial u_l}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_l}{x^2}\right) \quad (l = 1, \ldots, m) \tag{1.1}$$

où $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in R^{1+n}$; $u_l = u_l(x)$ $(l = 1, \ldots, m)$ est une fonction réélle,

$$\frac{\partial u_l}{\partial x} = \left\{\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right\}, \quad \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} = \left\{\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j}\right\} \quad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n).$$

Dans cette équation le second membre dépend du mode de réalisation du processus physique.

Comme les corps réels sont presque toujous anisotropes, toute méthode nouvelle de solution de l'équation (1.1) sera d'un grand intérêt pratique.

Dans le présent travail on prouve que le schéma explicite pour le système (1.1) avec les conditions aux limites de premiere espèce (voir (2.8)) est convergent et on propose une estimation de l'erreur de la méthode des différences finies (théorème 1).

Notons que les schémas explicites pour le système (1.1) ont été analyses plus tôt dans [1], où la démonstration de convergence de la méthode approchée s'appuie sur un certain système d'inégalités aux différences fines du type parabolique. Dans la présente étude la démonstration du théorème 1 est directe, et par conséquent plus compacte et plus claire que celle montrée dans [1].

2. Dans toute cette note nous supposerons satisfaites les hypothèses suivantes:

1° les fonctions scalaires $f_l(x, u, q, w)$ $(l = 1, \ldots, m)$, $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $w = (w_{11}, \ldots, w_{1n}, \ldots, w_{n1}, \ldots, w_{nn})$ sont de classe C^1 dans l'ensemble

$$Z = [0, \tau] \times [0, \sigma]^n \times R^{m+n+n^2} \tag{2.1}$$

et satisfont dans cet ensemble aux conditions

$$\left|\frac{\partial f_l}{\partial u_\mu}\right| \leqslant L \quad (l = 1, \ldots, m, \mu = 1, \ldots, m, L > 0), \tag{2.2}$$

$$\left|\frac{\partial f_l}{\partial q_i}\right| \leqslant \Gamma \quad (l = 1, \ldots, m,\ i = 1, \ldots, n), \tag{2.3}$$

$$0 < g \leqslant \frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}\right| \quad (l = 1, \ldots, m, i = 1, \ldots, n); \tag{2.4}$$

2° pour les indices fixés l, i, j $(1 \leqslant l \leqslant m,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ la fonction $\partial f_l / \partial w_{ij}$ est toujours non négative ou toujours non positive;

3° les égalités

$$\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial f_l}{\partial w_{ji}} \quad (l = 1, \ldots, m, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

sont vérifiées en chaque point de l'ensemble Z;

4° les fonctions scalaires $u_l(x)$ $(l = 1, \ldots, m)$ sont de classe C^2 dans l'ensemble

$$E = [0, \tau] \times [0, \sigma]^n \tag{2.6}$$

et vérifient le système d'équations différentielles partielles

$$\frac{\partial u_l}{\partial x_0} = f_l\left(x, u, \frac{\partial u_l}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}\right) \quad (l = 1, \ldots, m) \tag{2.7}$$

où

$$\frac{\partial u_l}{\partial x} = \left\{\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right\}, \quad \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} = \left\{\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j}\right\} \quad (i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n)$$

de même que les conditions aux limites

$$
(2.8)\qquad
\begin{aligned}
u_l(x) &= \varphi_{ls}(x) \quad \text{pour } x_s = 0 \ (l = 1, \ldots, m,\ s = 0, 1, \ldots, n),\\
u_l(x) &= \psi_{ls}(x) \quad \text{pour } x_s = \sigma \ (l = 1, \ldots, m,\ s = 1, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

(les fonctions φ_{ls} et ψ_{ls} sont connues).

3. Considérons dans l'ensemble E un système de points nodaux dont les coordonnées sont

$$
(3.1)\qquad x_0^{a_0} = a_0 k, \quad x_i^{a_i} = a_i h
$$

où $a_0 = 0, 1, \ldots, N_0$, $a_i = 0, 1, \ldots, N$, $i = 1, \ldots, n$, $0 < k = \tau/N_0$, $0 < h = \sigma/N$, N_0 et N sont des nombres naturels.

Nous désignerons le point nodal $(x_0^{a_0}, x_1^{a_1}, \ldots, x_n^{a_n})$ par x^A où $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ et soit

$$
(3.2)\qquad
\begin{aligned}
i(A) &= (a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)\\
&\qquad (i = 0, 1, \ldots, n),\\
-i(A) &= (a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)\\
&\qquad (i = 1, \ldots, n).
\end{aligned}
$$

Supposons ensuite qu'à chaque point nodal x^A engendré par le multi-indice A correspondent les nombres réels v_l^A $(l = 1, \ldots, m)$ et soit

$$
(3.3)\qquad
\begin{aligned}
v_l^{A0} &= \frac{1}{k}(v_l^{0(A)} - v_l^A),\\
v_l^{Ai} &= \frac{1}{2h}(v_l^{i(A)} - v_l^{-i(A)}),\\
v_l^{AI} &= (v_l^{A1}, \ldots, v_l^{An}),\\
v_l^{-Aij} &= \frac{1}{2h}(v_l^{i(A)} + v_l^{j(A)} + v_l^{-i(A)} + v_l^{-j(A)} - 2v_l^A - v_l^{i(-j(A))} - v_l^{i(-j(A))}),\\
v_l^{+Aij} &= \frac{1}{2h}(-v_l^{i(A)} - v_l^{j(A)} - v_l^{-i(A)} - v_l^{-j(A)} + 2v_l^A + v_l^{i(j(A))} + v_l^{-i(-j(A))})\\
&\qquad (l = 1, \ldots, m,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n).
\end{aligned}
$$

Dans la suite nous admettrons que les nombres v_l^A satisfont au système d'équations

$$
(3.4)\qquad
\begin{aligned}
v_l^{A0} &= f_l(x^A, v^A, v_l^{AI}, v_l^{AIJ}) \quad (l = 1, \ldots, m),\\
v_l^A &= \varphi_{ls}(x^A) \quad \text{pour } a_s = 0 \ (l = 1, \ldots, m,\ s = 0, 1, \ldots, n),\\
v_l^A &= \psi_{ls}(x^A) \quad \text{pour } a_s = N \ (l = 1, \ldots, m,\ s = 1, \ldots, n),
\end{aligned}
$$

où

$$v_l^A = (v_1^A, \ldots, v_m^A),$$

$$v_l^{AIJ} = (v_l^{A11}, \ldots, v_l^{A1n}, \ldots, v_l^{An1}, \ldots, v_l^{Ann}),$$

$$v_l^{Aij} = \begin{cases} v_l^{-Aij} & \text{lorsque } i = j \text{ ou } \dfrac{\partial f_l}{\partial w_{ij}} \leqslant 0, \\ v_l^{+Aij} & \text{lorsque } i \neq j \text{ et } \dfrac{\partial f_l}{\partial w_{ij}} \geqslant 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

$$(l = 1, \ldots, m, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n)$$

et les fonctions φ_{ls} et ψ_{ls} sont les mêmes que celles qui figurent dans la formule (2.8).

4. Désignons par $u^A = \{u_l^A\}$ $(l = 1, \ldots, m)$ la valeur de la solution du problème différentiel (2.7), (2.8) au point nodal A. Les nombres u_l^A $(l = 1, \ldots, m)$ satisfont aux conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned} u_l^A &= \varphi_{ls}(x^A) \quad \text{pour } a_s = 0 \quad (l = 1, \ldots, m, s = 0, 1, \ldots, n), \\ u_l^A &= \psi_{ls}(x^A) \quad \text{pour } a_s = N \ (l = 1, \ldots, m, s = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Notons que le lemme suivant est vrai.

LEMME 1. *Si les hypothèses au section* 2 *sont satisfaites et les pas* h *et* k *vérifient l'inégalité*

$$\frac{2}{h^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}} - \frac{1}{k} \leqslant 0 \qquad (l = 1, \ldots, m) \tag{4.2}$$

pour tout $(x, u, q, w) \in Z$, *il s'ensuit*

$$\begin{aligned} & u_l^{A0} = f_l(x^A, u^A, u_l^{AI}, u_l^{AIJ}) + \eta_l^A \qquad (l = 1, \ldots, m), \\ & \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0, \quad \varepsilon(h) = \max_{1\leqslant l\leqslant m} \varepsilon_l(h), \quad \varepsilon_l(h) = \max_A |\eta_l^A|, \end{aligned} \tag{4.3}$$

où les grandeurs u_l^{A0}, u_l^{AI}, u_l^{AIJ} $(l = 1, \ldots, m)$ *pour* u_l^A *sont définies de la même manière que les grandeurs* v_l^{A0}, v_l^{AI}, v_l^{AIJ} $(l = 1, \ldots, m)$ *pour* v_l^A (voir (3.3), (3.5)).

La formule (4.3) résulte de (2.7), puisque $u(x)$ est une solution de classe C^2 du système (2.7) et les fonctions f_l $(l = 1, \ldots, m)$ sont de classe C^1.

5. LEMME 2. *Supposons que les hypothèses du lemme* 1 *sont satisfaites, l'inégalité*

$$\frac{g}{h} - \frac{\Gamma}{2} \geqslant 0 \tag{5.1}$$

est vraie (voir (2.3), (2.4)), *les nombres* v_l^A *et* u_l^A *sont définis par les formules* (3.4) *et* (4.1), (4.3) *respectivement ainsi que*

$$(5.2)\qquad d_l^A = u_l^A - v_l^A, \quad p_l^{a_0} = \max_a d_l^A, \quad r_l^{a_0} = \min_a d_l^A \quad (l = 1, \ldots, m),$$

où $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) = (a_0, a)$.

Sous les hypothèses admises, les nombres $p_l^{a_0}, r_l^{a_0}$ $(l = 1, \ldots, m)$ *satisfont aux conditions*

$$(5.3)\qquad p_l^0 = r_l^0 = 0 \quad (l = 1, \ldots, m)$$

et

$$(5.4)\qquad p_l^{a_0 0} \leqslant L \sum_{\mu=1}^{m} |d_\mu^{B(l)}| + \varepsilon_l(h), \quad r_l^{a_0 0} \geqslant -L \sum_{\mu=1}^{m} |d_\mu^{Q(l)}| - \varepsilon_l(h)$$
$$(l = 1, \ldots, m)$$

où

$$p_l^{a_0 0} = \frac{1}{k}(p_l^{a_0+1} - p_l^{a_0}), \quad r_l^{a_0 0} = \frac{1}{k}(r_l^{a_0+1} - r_l^{a_0}),$$

$\varepsilon_l(h)$ *est défini par la formule* (4.3), $B(l)$ *et* $Q(l)$ *sont les multi-indices qui engendrent les points nodaux de l'ensemble* E.

Démonstration. Les conditions (5.3) résultent directement de la définition (5.2) de même que de (3.4) et (4.1).

Nous prouverons la première des inégalités (5.4). Supposons que

$$(5.5)\qquad p_l^{a_0+1} = d_l^{0B(l)}, \quad p_l^{a_0} = d_l^{C(l)}.$$

De la définition $p_l^{a_0 0}$ ainsi qu'à partir de (5.5) nous avons

$$(5.6)\qquad p_l^{a_0 0} = \frac{1}{k}(d_l^{B(l)0} - d_l^{B(l)}) + \frac{1}{k}(d_l^{B(l)} - d_l^{C(l)}).$$

Il résulte de (5.2), (4.3), (3.4) et de la définition (3.3) que

$$(5.7)\qquad p_l^{a_0 0} = (u_l^{B(l)0} - v_l^{B(l)0}) + \frac{1}{k}(d_l^{B(l)} - d_l^{C(l)})$$
$$= \eta_l^{B(l)} + f_l(x^{B(l)}, u^{B(l)}, u_l^{B(l)I}, u_l^{B(l)IJ}) -$$
$$- f_l(x^{B(l)}, v^{B(l)}, v_l^{B(l)I}, v_l^{B(l)IJ}) + \frac{1}{k}(d_l^{B(l)} - d_l^{C(l)}).$$

En appliquant le théorème de la moyenne au second membre de (5.7) on arrive à

$$(5.8)\qquad p_l^{a_0 0} = \eta_l^{B(l)} + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial f_l}{\partial u_\mu}(-)\, d_\mu^{B(l)} + \frac{1}{2h}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial q_i}(-)\,(d_l^{i(B(l))} - d_l^{-i(B(l))}) +$$
$$+ \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}}(-)\,(d_l^{i(B(l))} - 2d_l^{B(l)} + d_l^{-i(B(l))}) +$$
$$+ \frac{1}{2h^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} \left|\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}(-)\right| (-d_l^{i(B(l))} - d_l^{j(B(l))} - d_l^{-i(B(l))} -$$
$$- d_l^{-j(B(l))} + 2d_l^{B(l)} + d_l^{i(s(l;i,j)j(B(l)))} +$$
$$+ d_l^{-i(-s(l;i,j)j(B(l)))}) + \frac{1}{k}(d_l^{B(l)} - d_l^{C(l)})$$

où les dérivées sont prises en des points convenables $(-)$ et

$$(5.9)\qquad s(l;i,j) = \begin{cases} +1 & \text{pour } \dfrac{\partial f_l}{\partial w_{ij}} \geqslant 0, \\[2ex] -1 & \text{pour } \dfrac{\partial f_l}{\partial w_{ij}} \leqslant 0. \end{cases}$$

Après regroupement des expressions l'égalité (5.8) peut s'écrire sous la forme équivalente

$$(5.10)\qquad p_l^{a_0 0} = \eta_l^{B(l)} + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial f_l}{\partial u_\mu}(-)\, d_\mu^{B(l)} +$$
$$+ \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}}(-) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}(-)\right|\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial f_l}{\partial q_i}(-)\right]\cdot(d_l^{i(B(l))} - d_l^{C(l)}) +$$
$$+ \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}}(-) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}(-)\right|\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial f_l}{\partial q_i}(-)\right]\cdot(d_l^{-i(B(l))} - d_l^{C(l)}) +$$
$$+ \frac{1}{2h^2}\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}(-)\right| [(d_l^{i(s(l;i,j)j(B(l)))} - d_l^{C(l)}) + (d_l^{-i(-s(l;i,j)j(B(l)))} - d_l^{C(l)}) +$$
$$+ 2(d_l^{B(l)} - d_l^{C(l)})] + \left(\frac{2}{h^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}}(-) - \frac{1}{k}\right)(d_l^{C(l)} - d_l^{B(l)}).$$

Notons que l'inégalité (5.1) entraîne

$$\tag{5.11} \begin{gathered} \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}}(-)-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}(-)\right|\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial f_l}{\partial q_i}(-)\geqslant\frac{g}{h}-\frac{\Gamma}{2}\geqslant 0,\\ \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}}(-)-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}(-)\right|\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial f_l}{\partial q_i}(-)\geqslant\frac{g}{h}-\frac{\Gamma}{2}\geqslant 0, \end{gathered}$$

tandis que de (5.5) il vient

$$\tag{5.12} \begin{gathered} d_l^{i(B(l))}-d_l^{C(l)}\leqslant 0, \qquad d_l^{-i(B(l))}-d_l^{C(l)}\leqslant 0,\\ d_l^{i(-s(l;i,j)j(B(l)))}-d_l^{C(l)}\leqslant 0,\\ d_l^{-i(-s(l;i,j)j(B(l)))}-d_l^{C(l)}\leqslant 0, \qquad d_l^{B(l)}-d_l^{C(l)}\leqslant 0. \end{gathered}$$

Les inégalités (5.11) et (5.12) ainsi que l'hypothèse (4.2) et l'égalité (5.10) entraînent

$$\tag{5.13} p_l^{a_0 0}\leqslant \eta_l^{B(l)}+\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\partial f_l}{u_\mu}(-)\,d_\mu^{B(l)}\leqslant L\sum_{\mu=1}^{m}|d_\mu^{B(l)}|+\varepsilon_l(h)$$

(voir (2.2) et (4.3)) ce qui termine la démonstration de la première des inégalités (5.4).

La démonstration de la seconde inégalité (5.4) se fait d'une façon tout à fait analogue.

La démonstration du lemme 2 est ainsi terminée.

6. Lemme 3. *Si les hypothèses du lemme 2 sont satisfaites, alors*

$$\tag{6.1} (\max_a |d_l^A|)^0 \leqslant \max(p_l^{a_0 0},\ -r_l^{a_0 0}) \qquad \textit{pour } l=1,\ldots,m.$$

Démonstration. Il n'est pas difficile de voir que

$$\tag{6.2} \begin{aligned} \max_a |d_l^A| &= \max_a\big(\max(d_l^A,\ -d_l^A)\big) = \max\big(\max_a d_l^A,\ \max_a(-d_l^A)\big)\\ &= \max(p_l^{a_0},\ -\min_a d_l^A) = \max(p_l^{a_0},\ -r_l^{a_0}). \end{aligned}$$

De (6.2) résulte que

$$\tag{6.3} (\max_a |d_l^A|)^0 = \big(\max(p_l^{a_0},\ -r_l^{a_0})\big)^0 \leqslant \max(p_l^{a_0 0},\ -r_l^{a_0 0}).$$

De cette façon la démonstration du lemme 3 est terminée.

7. Lemme 4. *Si les hypothèses du lemme 2 sont satisfaites et si*

$$\tag{7.1} D^{a_0} = \max_l \max_a d_l^A$$

alors $D^0 = 0$ *et*

$$D^{a_0 0} \leqslant mLD^{a_0} + \varepsilon(h) \tag{7.2}$$

où $\varepsilon(h)$ *est défini par la formule* (4.3).

Démonstration. La condition $D^0 = 0$ est évidente (voir (5.3)).

Il s'agit de démontrer (7.2). De (7.1) et du lemme 3 il s'ensuit que

$$D^{a_0 0} = \max_l (\max_a |d_l^A|)^0 \leqslant \max_l \bigl(\max(p_l^{a_0 0}, \; -r_l^{a_0 0})\bigr). \tag{7.3}$$

Mais les nombres $p_l^{a_0 0}$ et $r_l^{a_0 0}$ vérifient les inégalités (5.4) donc

$$\begin{aligned} D^{a_0 0} &\leqslant \max_l \Bigl[\max\Bigl(L \sum_{\mu=1}^{m} |d_\mu^{B(l)}| + \varepsilon_l(h), \; L \sum_{\mu=1}^{m} |d_\mu^{Q(l)}| + \varepsilon_l(h)\Bigr)\Bigr] \\ &\leqslant mLD^{a_0} + \varepsilon(h) \end{aligned} \tag{7.4}$$

(voir (7.1) et (4.3)) ce qui achève la démonstration du lemme 4.

8. Lemme 5. *Si les nombres* D^{a_0} $(a_0 = 0, 1, \ldots)$ *vérifient les inégalités aux différences finies*

$$D^{a_0 0} \leqslant KD^{a_0} + \varepsilon \qquad (a_0 = 0, 1, \ldots) \tag{8.1}$$

et la condition initiale $D^0 = 0$, *où* $0 < K = \mathrm{const}$ *et* $0 < \varepsilon = \mathrm{const}$, *alors*

$$D^{a_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{K} (e^{Kka_0} - 1) \qquad (a_0 = 0, 1, \ldots). \tag{8.2}$$

Le lemme 5 est facile à démontrer par l'induction mathématique.

9. Théorème 1. *Si les hypothèses du lemme* 2 (section 5) *sont satisfaites, alors*

1° *l'erreur de la méthode des différences finies* (3.4) *peut être estimée de la façon suivante*

$$|d_l^A| \leqslant \frac{\varepsilon(h)}{mL} (e^{Lkma_0} - 1) \qquad (l = 1, \ldots, m) \tag{9.1}$$

où $\varepsilon(h)$ *est défini par la formule* (4.3);

2° *la méthode des différences finies* (3.4) *est convergente, c'est-à-dire*

$$\lim_{h \to 0} d_l^A = 0 \qquad (l = 1, \ldots, m). \tag{9.2}$$

Démonstration. Comme (9.2) résulte de (9.1) il suffit alors de montrer (8.1).

On tire des lemmes 4 et 5

$$D^{a_0} \leqslant \frac{\varepsilon(h)}{mL} (e^{Lkma_0} - 1). \tag{9.3}$$

Mais de la définition (7.1) il découle que $|d_l^A| \leqslant D^{a_0}$, donc

$$|d_l^A| \leqslant \frac{\varepsilon(h)}{mL}(e^{Lkma_0}-1). \tag{9.4}$$

Ainsi la démonstration du théorème 1 est achevée.

Travail cité

[1] M. Malec, *Système d'inégalités aux différences finies du type parabolique et application*, Colloq. Math. 35 (1976), p. 305-312.

Reçu par la Rédaction le 14. 12. 1973