ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
VIII (1965)

W. OKTABA (Lublin)

TWIERDZENIE DOTYCZĄCE METODY WYZNACZANIA OCEN KOMPONENTÓW WARIANCYJNYCH W MODELACH LOSOWYCH DLA DANYCH NIEORTOGONALNYCH

1. Streszczenie i problem. Podstawą przybliżonych metod ocen komponentów wariancyjnych w przypadku modeli losowych opartych na danych nieortogonalnych jest pierwsza metoda Hendersona [3]. Nazywamy ją przybliżoną, gdyż zamiast wartości oczekiwanych sum kwadratów, występujących w analizie wariancji a obliczonych metodą najmniejszych kwadratów, w metodzie tej wyznaczamy wartości oczekiwane ważonych sum kwadratów. Pierwsza metoda Hendersona polega na przyrównaniu sum kwadratów odchyleń dla $p-1$ efektów losowych (p-tym składnikiem modelu jest średnia populacji μ) modelu do ich wartości oczekiwanych; wartości te wyrażają się jako kombinacje liniowe nieznanych wariancji efektów. Współczynniki przy tych wariancjach, zwanych niekiedy komponentami wariancyjnymi, wyznacza się dla każdego modelu oddzielnie. Rozwiązanie odpowiedniego układu $p-1$ równań daje nieobciążone oceny $p-1$ wariancji.

Metoda Le Roy [4], czyli metoda R (por. [5]), oceniania komponentów jest uproszczeniem metody Hendersona, gdyż nie operuje sumami kwadratów odchyleń, a wprost sumami kwadratów, i nie wymaga każdorazowego obliczania wartości oczekiwanych tych sum.

W metodzie R konstruuje się układ p równań z p niewiadomymi: kwadratem średniej μ^2 i $p-1$ wariancjami efektów: $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_e^2$. Układ taki otrzymujemy przyrównując p sum kwadratów do ich wartości oczekiwanych, będących kombinacjami liniowymi parametrów μ^2, $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_e^2$ z pewnymi współczynnikami W. W zastosowaniach pomijamy obliczanie wartości oczekiwanych, wyznaczając współczynniki W według prostej reguły (por. [4]).

Tworząc odpowiednie kombinacje liniowe p równań układu tak, by uzyskać sumy kwadratów odchyleń po lewych stronach, otrzymujemy po prawych stronach równań wyrażenia, które można otrzymać metodą Hendersona.

Le Roy przedstawił metodę R nie podając ogólnego uzasadnienia słuszności reguły tworzenia współczynników W. Ograniczył się jedynie do kilku modeli losowych opartych na klasyfikacji krzyżowej kompletnej i niekompletnej, a nie rozważał modeli opartych na dowolnej kombinacji klasyfikacji krzyżowej z hierarchiczną.

Autor niniejszej pracy dostrzegł, że do tych ostatnich modeli metoda R i odpowiadająca jej reguła tworzenia współczynników W da się również zastosować; odpowiednią metodę nazwano RO (por. [5]). Wystarczy jedynie wprowadzić odpowiednią symbolikę dla klasyfikacji hierachicznej i kombinacji tej klasyfikacji z klasyfikacją krzyżową oraz odpowiednio zmodyfikować regułę.

W niniejszej pracy przedstawiamy ogólne twierdzenie z dowodem, podające *explicite* wzory na współczynniki W w przypadku modeli z nieskorelowanymi efektami losowymi dla danych nieortogonalnych, gdy modele są oparte na dowolnej kombinacji klasyfikacji krzyżowej i hierarchicznej lub na niekompletnej klasyfikacji krzyżowej. Szczególnym przypadkiem tego twierdzenia jest reguła podana przez Le Roy, gdy ograniczymy się do klasyfikacji krzyżowej zupełnej lub niezupełnej.

Przykład zastosowania twierdzenia jest omówiony na końcu niniejszej pracy, a modele i konkretne przykłady liczbowe na zastosowanie twierdzenia i wzorów na współczynniki W obszerniej przedstawiono w innej pracy autora [5]. Z zamieszczonego twierdzenia można w szczególności wyprowadzić wzory Ganguli [2], jeżeli ograniczymy się do nieortogonalnej klasyfikacji hierarchicznej, oraz wyprowadzić wzory Crumpa [1], gdy będziemy rozpatrywali dane ortogonalne (tj. takie, że w każdej z podklas występuje ta sama liczba obserwacji).

2. Założenia i symbolika. Dane liczbowe w najogólniejszej formie tworzą bądź kombinację klasyfikacji krzyżowej z hierarchiczną, bądź niezupełną klasyfikację krzyżową (por. [5]).

Przypuśćmy, że takie ogólne dane uzyskano losując z nieskończonej populacji poziomów każdego z $r-1$ czynników $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$.

W przypadku gdy wyniki tworzą tylko klasyfikację krzyżową, porządkujemy czynniki w dowolny sposób. W przypadku klasyfikacji hierarchicznej numerujemy je w porządku zstępującym: np. w A_1 zawiera się A_2, w A_2 zawiera się $A_3, \ldots$, w A_{r-2} zawiera się A_{r-1}.

Ten rodzaj uporządkowania wprowadzamy również dla kombinacji klasyfikacji krzyżowej z hierarchiczną z tym uzupełnieniem, że kolejne numery klasyfikacji hierarchicznej następują po numerze czynnika klasyfikacji krzyżowej, w której czynniki są uplasowane hierarchicznie, np. dla $A\times B(C(D))\times F$ numerujemy: $A = A_1$, $D = A_2$, $C = A_3$, $B = A_4$, $F = A_5$.

W przypadku klasyfikacji hierarchicznej A_2 w A_1 numerujemy poziomy czynnika A_2 począwszy od jedynki dla każdego poziomu czynnika A_1.

Rozważmy dane w najogólniejszej postaci. Niech zbiorem wskaźników dla poziomów czynników będzie J_{r-1} o elementach $j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}$ i niech w podklasie $(j_1, j_2, \ldots, j_{r-1})$ znajduje się $n_{J_{r-1}} = n_{j_1 j_2 \ldots j_{r-1}}$ obserwacji (dane nieortogonalne), oznaczonych symbolem $y_{J_r} = y_{j_1 j_2 \ldots j_{r-1} j_r}$, gdzie

$$
\begin{aligned}
j_1 &= 1, \ldots, a, \\
j_2 &= 1, \ldots, b_{j_1}, \\
j_3 &= 1, \ldots, c_{j_1 j_2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
j_{r-1} &= 1, \ldots, u_{j_1 j_2 \ldots j_{r-2}}, \\
j_r &= 1, \ldots, n_{j_1 j_2 \ldots j_{r-1}}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Dla czynników klasyfikacji krzyżowej litery $b, c, \ldots, u$ w (1) nie mają wskaźników $j_1, j_2, \ldots, j_{r-2}$. Wskaźnik j_{r-2} występuje tylko wtedy, gdy wszystkie $r-1$ czynników tworzą klasyfikację hierarchiczną. Dane liczbowe stają się ortogonalne, gdy wszystkie $b_{j_1}, \ldots, u_{j_1 j_2 \ldots j_{r-2}}$ i $n_{j_1 j_2 \ldots j_{r-1}}$ są stałymi, tj. nie zależą od wskaźników j.

Suma wszystkich obserwacji wynosi

$$
n = \sum_{J_{r-1}} n_{J_{r-1}}, \tag{2}
$$

gdzie J_{r-1} pod znakiem $\sum$ oznacza sumowanie po wszystkich wskaźnikach należących do J_{r-1}, tj. po $j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}$. Z podobnych oznaczeń będziemy dalej często korzystali. Symbolem J_r oznaczamy $j_1, j_2, \ldots \ldots, j_{r-1}, j_r$, czyli sumę zbioru J_{r-1} i zbioru obejmującego jeden element j_r.

Model statystyczny odpowiadający ogólnym danym nazywamy losowym ze względu na losowy wybór poziomów czynników i modelem dla danych nieortogonalnych z powodu różnych liczb obserwacji w podklasach (por. [5]).

Jeżeli p oznacza liczbę składników modelu, to poza stałą średnią μ w populacji i efektem błędu $e_{J_r} = e_{j_1 j_2 \ldots j_r}$ związanym z obserwacją y_{J_r} występuje w nim (por. [1]) $p-2$ losowych efektów głównych i efektów interakcyjnych a między f czynnikami $(f = 1, 2, \ldots, r-1)$. Rodzaje tych efektów i ich liczba zależą od rodzaju układu klasyfikacji, którym dane podlegają. Tak np. dla pewnych danych możemy mieć interakcję między czynnikami A_1, A_2 i A_3, którą oznaczamy symbolem $a_{j_1 j_2 j_3}$, a dla innych interakcję między czynnikami A_2 i A_3 wewnątrz A_1, oznaczoną symbolem $a_{j_2 j_3 (j_1)}$ (por. [5]).

W ogólnym modelu dla uproszczenia oznaczeń obu takim interakcjom będziemy przypisywali wspólny symbol $a_{j_1 j_2 j_3}$, a ich odpowiednim wariancjom σ^2_{123} i $\sigma^2_{23(1)}$ również symbol wspólny σ^2_{123}. Tak więc o symbolu decyduje tylko liczba i nazwa występujących czynników, jakkolwiek interpretacja obu efektów i ich wariancji jest różna. Taka wspólna symbolika dla problemu ogólnego, przyjęta w dowodzie twierdzenia, nie prowadzi do nieporozumień, gdyż nie dokonuje się takich przekształceń, w których odróżnianie wymienionych efektów i ich wariancji byłoby konieczne. Odróżnianie to (charakterystyczne dla metody RO, ale zbędne w metodzie R) jest oczywiście konieczne w końcowym zestawieniu ocen wariancji, a w szczególności w zastosowaniach do konkretnych modeli, gdyż wiąże się z interpretacją uzyskanych ocen.

Rozważmy losowy model ogólny postaci

$$y_{j_1 j_2 \ldots j_r} = \mu + (\overbrace{a_{j_1} + \ldots + a_{j_{t_1} j_{t_2} \ldots j_{t_f}} + \ldots}^{(p-2)\ \text{składników}}) + e_{j_1 j_2 \ldots j_r}, \tag{4}$$

który zapiszemy krócej w postaci

$$y_{J_r} = \mu + (a_{j_1} + \ldots + a_{J_{T_f}} + \ldots) + e_{J_r} = \mu + \sum^{p-2} a_{J_{T_f}} + e_{J_r}, \tag{5}$$

gdzie y_{J_r} jest j_r-tą obserwacją w podklasie $(j_1, j_2, \ldots, j_{r-1})$, e_{J_r} — błędem losowym, a_{j_1} — losowym efektem głównym j_1-ego poziomu czynnika A_1, $a_{j_{t_1} j_{t_2} \ldots j_{t_f}} = a_{J_{T_f}}$ — efektem interakcyjnym między czynnikami A_{t_1}, $A_{t_2}, \ldots, A_{t_f}$ $(f = 1, 2, \ldots, r-1)$, wybranymi spośród $r-1$ czynników $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$. Dla krótkości zbiór wskaźników $j_{t_1}, j_{t_2}, \ldots, j_{t_f}$, będący podzbiorem zbioru $j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}$, oznaczymy symbolem J_{T_f}.

Zauważmy, że $J_{r-1} = J_{T_{r-1}}$. Liczba efektów głównych i interakcyjnych a, a zatem i zbiorów J_{T_f} w modelu (4), jest równa $p-2$. Zauważmy bowiem, że w modelu kropki między a_{j_1} i $a_{J_{T_f}}$ i kropki na prawo od $a_{J_{T_f}}$ oznaczają ewentualne inne efekty główne niż efekt a_{j_1} czynnika A_1 oraz inne efekty interakcyjne modelu niż efekt $a_{j_{t_1} j_{t_2} \ldots j_{t_f}}$, a więc efekty interakcyjne oparte na innych (na ogół nie na wszystkich) podzbiorach zbioru J_{r-1} (por. § 4). Zespół wskaźników J_{T_f} zależy od rodzaju klasyfikacji danych liczbowych.

W podanym modelu zakładamy, że wszystkie efekty a i e są nieskorelowane i mają średnie równe zeru, tj.

$$E(a_{j_1}) = \ldots = E(a_{J_{T_f}}) = \ldots = E(e_{J_r}) = E(a_{j_1} \cdot a_{J_{T_f}}) = E(a_{j_1} \cdot e_{J_r}) = \\ = \ldots = E(a_{J_{T_f}} \cdot e_{J_r}) = 0, \tag{6}$$

gdzie E oznacza wartość oczekiwaną. Wariancjami efektów a i e są

$$E(a_{j_1}^2) = \sigma_1^2, \ldots, E(a_{J_{T_f}}^2) = \sigma_{t_1 t_2 \ldots t_f}^2, \ldots, E(e_{J_r}^2) = \sigma_e^2, \tag{7}$$

gdzie symbol $\sigma_{t_1 t_2 \ldots t_f}^2$ oznacza wariancję efektu interakcji między f czynnikami $A_{t_1}, A_{t_2}, \ldots, A_{t_f}$ i jest stałą wielkością dla ustalonych czynników $A_{t_1}, A_{t_2}, \ldots, A_{t_f}$ (mogą się zmieniać poziomy czynników).

Interesuje nas problem wyznaczania nieobciążonych ocen wariancji $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_{i_1 i_2 \ldots i_k}^2, \ldots, \sigma_e^2$. Odpowiednią metodę postępowania RO (por. [5]), omówioną w niniejszej pracy w § 1, referujemy w następujących punktach I, II i III.

I. Niech składnikami sum kwadratów odchyleń (form kwadratowych) dla $p-1$ źródeł zmienności występujących w analizie wariancji (por. [3]) modelu (4) będzie p sum kwadratów (por. kol. 2 tablicy 1):

1) $\sum_{J_r} y_{J_r}^2$, czyli suma kwadratów wszystkich n indywidualnych obserwacji y,

2) $\sum_{I_k} Y_{I_k}^2 / n_{I_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, r-1)$, czyli $p-2$ sumy kwadratów dla tyluż efektów głównych i interakcyjnych a; $p-2 \geqslant r-1$, gdyż może być więcej niż jeden zbiór postaci I_k, albowiem I_k oznacza podzbiór o k elementach wybrany spośród $r-1$ elementów zbioru J_{r-1}.

3) Y^2/n, czyli „poprawka".

Y_{I_k} definiujemy jako

$$Y_{I_k} = Y_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \sum_{D_k + j_r} y_{J_r}, \tag{8}$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wskaźnik j_r i zbiór wskaźników D_k, który jest dopełnieniem zbioru I_k do zbioru J_{r-1}; tak więc D_k obejmuje wskaźniki $i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_{r-1}$. Kształt sum kwadratów formy 2) wynika z modelu.

Zbiory wskaźników I_k o k elementach i J_{T_f} o f elementach, jako podzbiory zbioru J_{r-1} mogą obejmować co najmniej jeden element i co najwyżej $r-1$ elementów; zbiorów I_k lub J_{T_f} jest $p-2$, tj. tyle, ile składników w modelu; zbiory I_{r-1}, $J_{T_{r-1}}$ i J_{r-1} są identyczne i różnią się co najwyżej permutacją elementów.

A oto objaśnienie innych oznaczeń:

$Y = \sum_{J_r} y_{J_r}$ jest sumą wszystkich obserwacji po wskaźnikach j_1, $j_2, \ldots, j_r$ zbioru J_r; liczbę obserwacji w podklasie $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ określa

$$n_{I_k} = n_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \sum_{i_{k+1}, \ldots, i_{r-1}} n_{j_1 j_2 \ldots j_{r-1}} = \sum_{D_k} n_{J_{r-1}}. \tag{9}$$

II. Wartości oczekiwane składników sum kwadratów postaci

$$\sum_{J_r} y_{J_r}^2, \quad \sum_{I_k} \frac{Y_{I_k}^2}{n_{I_k}}, \quad \frac{Y^2}{n}, \tag{10}$$

z uwagi na postać modelu (4), są kombinacjami liniowymi $p-1$ wielkości: kwadratu średniej μ^2 i wariancji $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_{i_1 i_2 \ldots i_f}^2, \ldots, \sigma_e^2$ z pewnymi współczynnikami W (por. kol. 4, 5 i 6 tablicy 1), będącymi funkcjami liczebności w podklasach $n_{J_{r-1}}$.

III. Rozwiązanie układu p równań powstałych z przyrównania tych kombinacji do odpowiednich p składników sum kwadratów postaci (10), czyli układu (11), daje nieobciążone oceny wariancji.

$$\begin{aligned} \sum_{J_r} y_{J_r}^2 &= n\mu^2 + \sum^{p-2} n\sigma^2_{t_1t_2\ldots t_f} + n\sigma_e^2, \\ \sum_{I_k} \frac{Y_{I_k}^2}{n_{I_k}} &= n\mu^2 + \sum^{p-2} W_{I_k[J_{T_f}]}\sigma^2_{t_1t_2\ldots t_f} + \Big(\sum_{I_k} 1\Big)\sigma_e^2, \\ \frac{Y^2}{n} &= n\mu^2 + \sum^{p-2} W_{1[J_{T_f}]}\sigma^2_{t_1t_2\ldots t_f} + 1\cdot\sigma_e^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Znaczenie symboli W z odpowiednimi wskaźnikami jest podane w twierdzeniu paragrafu następnego.

3. Twierdzenie. Udowodnimy twierdzenie, które określa regułę tworzenia współczynników W bez uciekania się do obliczania wartości oczekiwanych.

TWIERDZENIE. *Przy nieskorelowanych efektach modelu losowego* (4) *i wprowadzonych oznaczeniach wartości oczekiwane p składników sum kwadratów formy* (10) *są kombinacjami liniowymi kwadratu średniej μ^2 i wariancji wszystkich $p-1$ efektów losowych $\sigma_1^2, \ldots, \sigma^2_{t_1t_2\ldots t_f}, \ldots, \sigma_e^2$ ze współczynnikami W* (por. (11)) *określonymi przez następujące reguły.*

1° a) *$W = n$ przy μ^2 dla każdego z p składników*;

b) *$W =$ liczbie stopni swobody przy σ_e^2 dla odpowiedniego składnika sumy kwadratów, tj.*

$$\begin{aligned} W &= \sum_{J_r} 1 = n \quad && \text{dla} \quad \sum_{J_r} y_{J_r}^2, \\ W &= \sum_{I_k} 1 && \text{dla} \quad \sum_{I_k} \frac{Y_{I_k}^2}{n_{I_k}}, \\ W &= 1 && \text{dla} \quad \frac{Y^2}{n}; \end{aligned} \tag{12}$$

c) *współczynnikiem przy wariancji $\sigma^2_{t_1t_2\ldots t_f}$ w rozwinięciu wyrażenia $E(Y^2/n)$ (przypisujemy mu wskaźnik 1) jest*

$$W_{1[J_{T_f}]} = \frac{1}{n}\sum_{J_{T_f}} n_{J_{T_f}}^2;$$

d) *w rozwinięciu wyrażenia $E\sum_{J_r} y_{J_r}^2$ jest*

$$W_{J_r[J_{T_f}]} = W_{J_r[0]} = n.$$

2° *Współczynnikami przy* $p-2$ *wariancjach kształtu* $\sigma^2_{t_1 t_2 \ldots t_f} = \sigma^2_{T_f}$ *w rozwinięciu wyrażenia* $E\sum_{I_k} \frac{Y^2_{I_k}}{n_{I_k}}$ *są*

a) $W_{I_k[J_{T_f}]} = \sum_{I_k} \frac{\sum_{J_{T_f}} n^2_{I_k+J_{T_f}}}{n_{I_k}}$, *jeżeli dwa zbiory wskaźników* I_k *i* J_{T_f} *odpowiednio z elementami* $i_1, i_2, \ldots, i_k$ *oraz* $j_{t_1}, j_{t_2}, \ldots, j_{t_f}$ *są rozłączne (iloczyn zbiorów* $I_k J_{T_f} = 0$*),*

b) $W_{I_k[J_{T_f}]} = W_{I_k[I_k J_{T_f}+U_g]} = W_{I_k[U_g]} = \sum_{I_k} \frac{\sum_{U_g} n^2_{I_k+U_g}}{n_{I_k}}$, *jeżeli zbiory* I_k *i* J_{T_f} *mają wspólne elementy, ale* J_{T_f} *nie zawiera się w zbiorze* I_k*; zbiór* U_g *obejmujący wskaźniki* $u_1, u_2, \ldots, u_g$ *jest dopełnieniem iloczynu zbiorów* J_{T_f} *i* I_k *do zbioru* J_{T_f}*, a więc zbiór wskaźników* U_g *można otrzymać przez usunięcie ze zbioru* J_{T_f} *wskaźników wspólnych ze zbiorem* I_k*,*

c) $W_{I_k[J_{T_f}]} = W_{I_k[0]} = n$, *jeżeli zbiór* J_{T_f} *zawiera się w zbiorze* I_k*, a w szczególności pokrywa się z nim; zbiór pusty* 0 *w nawiasach prostokątnych* [ ] *jest dopełnieniem iloczynu zbiorów* $I_k J_{T_f}$ *do zbioru* J_{T_f}.

Zbiory I_k *i* J_{T_f} *są podzbiorami odpowiednio o* k *i* f *elementach wybranych ze zbioru wskaźników* J_{r-1} *postaci* $j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}$.

Reguły 1° *i* 2° *zestawiono w tablicy* 1.

TABLICA 1

L.p.	Suma kwadratów	Wskaźniki przy $\sum$	μ^2	$\sigma^2_{T_f}$		σ^2_e
			0	J_{T_f}		J_r
1	2	3	4	5		6
1	$\sum_{J_r} y^2_{J_r}$	J_r	n	$J_r J_{T_f} = J_{T_f}$;	$W_{J_r[0]} = n$	n
2	$\sum_{I_k} \frac{Y^2_{I_k}}{n_{I_k}}$	I_k	n	a) $I_k J_{T_f} = 0$; b) $J_{T_f} = I_k J_{T_f} + U_g$; c) $I_k J_{T_f} = J_{T_f}$:	$W_{I_k[J_{T_f}]}$ $W_{I_k[U_g]}$ $W_{I_k[0]}$	$\sum_{I_k} 1$
3	$\frac{Y^2}{n}$	1	n	$W_{1[J_{T_f}]} = \frac{1}{n}\sum_{J_{T_f}} n^2_{J_{T_f}}$		1

D o w ó d. *Ad* 1°. Wyodrębnimy w dowodzie punktu 1° trzy części A, B i C.

A. Zauważmy, że wobec (4) mamy

$$E(y_{J_r}) = \mu. \tag{13}$$

Stąd wobec tożsamości

$$E(z^2) = \mathrm{Var}(z) + E^2(z)$$

otrzymujemy

$$E\sum_{I_k}\frac{Y_{I_k}^2}{n_{I_k}} = \sum_{I_k}\frac{EY_{I_k}^2}{n_{I_k}} = \sum_{I_k}\frac{\mathrm{Var}(Y_{I_k})+E^2(Y_{I_k})}{n_{I_k}}. \tag{14}$$

Z uwagi na (1), (2) i

$$\sum_{D_k+j_r} 1 = \sum_{D_k} n_{I_{r-1}} = \sum_{D_k} n_{J_{r-1}} = n_{I_k}$$

oraz wobec (8) mamy

$$Y_{I_k} = \sum_{D_k+j_r} y_{J_r} = \sum_{D_k+j_r}\Big[\mu + \sum^{p-2} a_{J_{T_f}} + e_{J_r}\Big] =$$

$$= \mu n_{I_k} + \sum_{D_k+j_r}\sum^{p-2} a_{J_{T_f}} + \sum_{D_k+j_r} e_{J_r}.$$

Stąd, ponieważ średnie efektów są zerami,

$$E(Y_{I_k}) = \mu n_{I_k}. \tag{15}$$

Definiując średnią $\bar{e}_{I_k}$ za pomocą relacji $\sum_{D_k+j_r} e_{J_r} = n_{I_k}\bar{e}_{I_k}$, uzyskujemy kolejno:

$$\mathrm{Var}(Y_{I_k}) = \mathrm{Var}\Big[\mu n_{I_k} + \sum_{D_k+j_r}\sum^{p-2} a_{J_{T_f}} + n_{I_k}\bar{e}_{I_k}\Big] = \tag{16}$$

$$= \mathrm{Var}\Big[\sum_{D_k+j_r}\sum^{p-2} a_{J_{T_f}}\Big] + n_{I_k}\sigma_e^2.$$

W rezultacie ze względu na (14), (15) i (16) mamy:

$$E\sum_{I_k}\frac{Y_{I_k}^2}{n_{I_k}} = \sum_{I_k}\frac{\mathrm{Var}\big[\sum_{D_k+j_r}\sum^{p-2} a_{J_{T_f}}\big] + n_{I_k}\sigma_e^2 + n_{I_k}^2\mu^2}{n_{I_k}} = \tag{17}$$

$$= n\mu^2 + \sigma_e^2\sum_{I_k} 1 + \sum_{I_k}\frac{\mathrm{Var}\big(\sum_{D_k+j_r}\sum^{p-2} a_{J_{T_f}}\big)}{n_{I_k}},$$

gdyż

$$\sum_{I_k} n_{I_k} = n. \tag{18}$$

B. Wyznaczmy wartość oczekiwaną dla Y^2/n. Wobec $E(Y) = \mu$, $\sum_{J_r} a_{J_{T_f}} = \sum_{J_{T_f}} n_{J_{T_f}} a_{J_{T_f}}$ oraz $\sum_{J_r} e_{J_r} = n\bar{e}$ mamy

$$E\frac{Y^2}{n} = \frac{1}{n}[\mathrm{Var}(Y)+E^2(Y)] =$$

$$= \frac{1}{n}\Big[\mathrm{Var}\sum_{J_r}(a_{j_1}+\ldots+a_{J_{T_f}}+\ldots+e_{J_r})\Big]+n^2\mu^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\Big[\mathrm{Var}\Big(\sum_{J_r} a_{J_{T_f}}\Big)+\mathrm{Var}\sum_{J_r} e_{J_r}+n^2\mu^2\Big]+R,$$

gdzie R nie obejmuje wyrażeń z μ, e i $a_{J_{T_f}}$ dla ustalonego $a_{J_{T_f}}$. Dalej

$$E\frac{Y^2}{n} = R+n\mu^2+\frac{1}{n}\mathrm{Var}\Big(\sum_{J_{T_f}} n_{J_{T_f}} a_{J_{T_f}}\Big)+\frac{1}{n}\mathrm{Var}(n\bar{e}) =$$

$$= R+n\mu^2+\frac{1}{n}\sum_{J_{T_f}} n^2_{J_{T_f}}\sigma^2_{i_1 i_2\ldots i_f}+\sigma_e^2.$$

C. Wreszcie obliczmy wartość oczekiwaną dla sumy kwadratów wszystkich obserwacji. Wobec $E(y_{J_r}) = \mu$ obliczmy kolejno:

$$E\sum_{J_r} y^2_{J_r} = \sum_{J_r} Ey^2_{J_r} = \sum_{J_r}[\mathrm{Var}(y_{J_r})+E^2(y_{J_r})] = \tag{20}$$

$$= \sum_{J_r}[\mathrm{Var}(a_{J_{T_f}}+e_{J_r})+\mu^2]+P = n\mu^2+n\sigma^2_{i_1 i_2\ldots i_f}+n\sigma_e^2+P,$$

gdzie P oznacza człony niezależne od μ, $a_{J_{T_f}}$ i e dla ustalonego $a_{J_{T_f}}$.

Udowodniliśmy więc, że współczynnik przy μ^2 jest równy n w rozwinięciu wartości oczekiwanej dowolnego składnika sumy kwadratów (por. 1°a)) oraz wykazaliśmy 1°b) (por. (17), (19) i (20)).

Ponadto udowodniliśmy 1°c) (por. (19)) i 1°d) (por. (20)).

Ad 2°. Zauważmy, że wyrażenie (17) można przedstawić w postaci:

$$E\sum_{I_k}\frac{Y^2_{I_k}}{n_{I_k}} = n\mu^2+\sigma_e^2\sum_{I_k}1+\sum_{I_k}\frac{\mathrm{Var}\big[\sum_{D_k+j_r}(a_{j_1}+\ldots+a_{J_{T_f}}+\ldots+a_{I_k}+\ldots)\big]}{n_{I_k}},$$

gdzie zbiory J_{T_f} i I_k odpowiednio o f elementach $j_{t_1}, j_{t_2}, \ldots, j_{t_f}$ i k elementach $i_1, i_2, \ldots, i_k$ są podzbiorami zbioru J_{r-1} o elementach $j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}$. Jest widoczne, że współczynnik W (oznaczmy go przez $W_{I_k[J_{T_f}]}$) przy wariancji $\sigma^2_{i_1 i_2\ldots i_f} = \sigma^2_{T_f}$ w $E\sum_{I_k} Y^2_{I_k}/n_{I_k}$ ma postać

$$W_{I_k[J_{T_f}]} = \sum_{I_k}\frac{\mathrm{Var}\big(\sum_{D_k+j_r} a_{J_{T_f}}\big)}{n_{I_k}}. \tag{21}$$

Zauważmy, że z uwagi na to, iż j_r nie występuje w zbiorze J_{T_f}, mamy

$$(22)\qquad \sum_{D_k+j_r} a_{J_{T_f}} = \sum_{D_k} n_{I_{r-1}} a_{J_{T_f}}.$$

Rozważmy oddzielnie trzy przypadki, gdy zbiory J_{T_f} i I_k

a) są rozłączne;

b) mają wspólne elementy, ale J_{T_f} nie zawiera się w I_k;

c) zbiór J_{T_f} zawiera się w zbiorze I_k, a w szczególności oba zbiory pokrywają się.

Ad a). W przypadku gdy J_{T_f} i I_k są zbiorami rozłącznymi, zbiór J_{T_f} zawiera się w zbiorze D_k o elementach $i_{k+1}, \ldots, i_{r-1}$. Niech zbiór Z_g o elementach $z_1, z_2, \ldots, z_g$ $(g = r-1-k-f)$ będzie dopełnieniem zbioru J_{T_f} do $D_k = J_{T_f}+Z_g$.

Wobec

$$(23)\qquad \sum_{Z_g} n_{I_k+J_{T_f}+Z_g} = n_{I_k+J_{T_f}},$$

gdzie $I_{r-1} = I_k+J_{T_f}+Z_g$ jest zbiorem o elementach $i_1, i_2, \ldots, i_k, j_{t_1}, j_{t_2}, \ldots, j_{t_f}, z_1, z_2, \ldots, z_g$, otrzymujemy

$$(24)\qquad \sum_{D_k} n_{I_{r-1}} a_{J_{T_f}} = \sum_{J_{T_f}+Z_g} n_{I_k+J_{T_f}+Z_g} a_{J_{T_f}} = \sum_{J_{T_f}} a_{J_{T_f}} \sum_{Z_g} n_{I_k+J_{T_f}+Z_g} = \sum_{J_{T_f}} n_{I_k+J_{T_f}} a_{J_{T_f}}.$$

Stąd wobec (24) i (22) wyrażenie (21) ze względu na $\mathrm{Var}(a_{J_{T_f}}) = \sigma^2_{t_1 t_2 \ldots t_f}$ przybiera postać

$$(25)\qquad \sum_{I_k} \frac{\mathrm{Var}\big(\sum_{D_k} n_{I_{r-1}} a_{J_{T_f}}\big)}{n_{I_k}} = \sum_{I_k} \frac{\mathrm{Var}\big(\sum_{J_{T_f}} n_{I_k+J_{T_f}} a_{J_{T_f}}\big)}{n_{I_k}} = \Bigg(\sum_{I_k} \frac{\sum_{J_{T_f}} n^2_{I_k+J_{T_f}}}{n_{I_k}}\Bigg) \sigma^2_{t_1 t_2 \ldots t_f}.$$

Dowód 2°a) jest więc zakończony.

Ad b). Niech zbiory J_{T_f} i I_k mają wspólne elementy, ale J_{T_f} nie zawiera się w I_k. Symbolem U_g oznaczmy zbiór o elementach $u_1, u_2, \ldots \ldots, u_g$, będący dopełnieniem iloczynu zbiorów $J_{T_f} I_k$ do zbioru J_{T_f}, tj. $J_{T_f} = I_k J_{T_f} + U_g$. Następnie, niech H_m o elementach $h_1, h_2, \ldots, h_m$ będzie dopełnieniem zbioru I_k+U_g do I_{r-1}. Zbiór H_m może być pusty. Wtedy $D_k = U_g+H_m$ i $I_{r-1} = I_k+D_k$ oraz

$$\sum_{D_k} n_{I_{r-1}} a_{J_{T_f}} = \sum_{U_g+H_m} n_{I_k+U_g+H_m} a_{J_{T_f}} = \sum_{U_g} a_{J_{T_f}} \sum_{H_m} n_{I_k+U_g+H_m} = \sum_{U_g} n_{I_k+U_g} a_{J_{T_f}},$$

gdyż zbiory J_{T_f} i H_m są rozłączne. Stąd wobec (21) i (22) mamy dalej

$$\sum_{I_k} \frac{\operatorname{Var}\left(\sum\limits_{U_g} n_{I_k+U_g} a_{J_{T_f}}\right)}{n_{I_k}} = \sum_{I_k} \frac{\operatorname{Var}\sum\limits_{U_g} n_{I_k+U_g}^2}{n_{I_k}} \sigma_{t_1 t_2 \ldots t_f}^2,$$

a więc

$$W_{I_k[U_g]} = \sum_{I_k} \frac{\sum\limits_{U_g} n_{I_k+U_g}^2}{n_{I_k}}. \tag{26}$$

Zauważmy, że jest to współczynnik przy $\sigma_{t_1 t_2 \ldots t_f}^2$, gdy rozwinięto

$$E \sum_{I_k} \frac{Y_{I_k}^2}{n_{I_k}}.$$

Wyrażenie na $W_{I_k[U_g]}$ można otrzymać ze zbiorów I_k i J_{T_f}, korzystając z transformacji kształtu:

$$W_{I_k[J_{T_f}]} = W_{I_k[I_k J_{T_f}+U_g]} = W_{I_k[U_g]},$$

tzn. rugując ze zbioru J_{T_f} elementy wspólne ze zbiorem I_k i pozostawiając w nawiasie prostokątnym zbiór U_g, który jest dopełnieniem iloczynu zbiorów $J_{T_f} I_k$ do zbioru J_{T_f}. Dowód punktu 2°b) jest zakończony.

Ad c). Niech J_{T_f} zawiera się w zbiorze I_k lub jest z nim identyczny. Wtedy zbiory J_{T_f} i D_k są rozłączne i wobec tego

$$\sum_{D_k+i_r} a_{J_{T_f}} = a_{J_{T_f}} \sum_{D_k+i_r} 1 = a_{J_{T_f}} \sum_{D_k} n_{I_{r-1}} = n_{I_k} a_{J_{T_f}}.$$

Stąd człon z $\sigma_{t_1 t_2 \ldots t_f}^2$ w rozwinięciu

$$E \sum_{I_k} \frac{Y_{I_k}^2}{n_{I_k}}$$

wobec (21) i (22) ma postać

$$\sum_{I_k} \frac{\operatorname{Var}(n_{I_k} a_{J_{T_f}})}{n_{I_k}} = \sum_{I_k} \frac{n_{I_k}^2}{n_{I_k}} \sigma_{t_1 t_2 \ldots t_f}^2 = \sum_{I_k} n_{I_k} \sigma_{t_1 t_2 \ldots t_f}^2 = n \sigma_{t_1 t_2 \ldots t_f}^2.$$

Oznaczając współczynnik przy $\sigma_{t_1 t_2 \ldots t_f}^2$ w rozwinięciu

$$E \sum_{I_k} \frac{Y_{I_k}^2}{n_{I_k}}$$

przez $W_{I_k[J_{T_f}]}$, uzyskujemy jego wartość n.

Zauważmy, że korzystając z reguły opisanej uprzednio w 2°b), a polegającej na rugowaniu ze zbioru J_{T_f} elementów należących do zbioru I_k, otrzymujemy

$$W_{I_k[J_{T_f}]} = W_{I_k[I_k J_{T_f}]} = W_{I_k[0]}.$$

Symbolowi $W_{I_k[0]}$ przypisujemy umownie wartość n. Dowód punktu 2°c) jest zakończony.

Zauważmy, że ta sama reguła o rugowaniu z J_{T_f} elementów należących do I_k stosuje się także w przypadku 2°a): wtedy rugowania nie ma, gdyż zbiory I_k i J_{T_f} są rozłączne. Powyższe wzory można również stosować w przypadku krzyżowej klasyfikacji niekompletnej. Wtedy (por. [5]) sumowanie zaznaczone w twierdzeniu przeprowadza się oczywiście względem podklas zawierających obserwacje. Dowód twierdzenia jest zakończony.

UWAGA 1. *Zauważyliśmy w dowodzie twierdzenia* (por. 1°d) i 2°a), b), c)) *prostą prawidłowość tworzenia wzorów na współczynniki W, a mianowicie:*

zbiór I_k (pierwszy zespół wskaźników przy W) występuje pod znakiem pierwszej sumy, a drugi zbiór (drugi zespół wskaźników w nawiasach prostokątnych), który powstaje z wykreślenia ze zbioru J_{T_f} elementów wspólnych z I_k, występuje w liczniku ułamka pod znakiem drugiej sumy.

Prawidłowość ta stanowi regułę, o której mówi Le Roy [4]. Zbiór I_k obejmuje wskaźniki, względem których sumuje się w sumie kwadratów

$$\sum_{I_k} \frac{Y_{I_k}^2}{n_{I_k}},$$

a zbiór J_{T_f} — wskaźniki odpowiadające wariancji σ^2, przy której występuje współczynnik W (por. tabl. 1).

UWAGA 2. *Wzory na współczynniki W odpowiadające*

I) *sumie kwadratów wszystkich obserwacji* $\sum\limits_{J_r} y_{J_r}^2$,

II) *„poprawce"* Y^2/n,

występujące w 1°, *można otrzymać ze wzorów w* 2° (por. twierdzenie).

W tym celu wystarczy w przypadku I przyjąć: $I_k = J_r$, $n_{I_k} = 1$, $Y_{I_k} = y_{J_r}$, skąd

$$\sum_{I_k} \frac{Y_{I_k}^2}{n_{I_k}} = \sum_{J_r} y_{J_r}^2.$$

Współczynnikiem przy σ_e^2 jest $\sum\limits_{J_r} 1 = n$ (por. 1°b)). Wtedy 1°d) wynika natychmiast z 2°c).

W przypadku II przyjmujemy $I_k = 1$ (tu 1 gra rolę zbioru pustego), $n_{I_k} = n$, $Y_{I_k} = Y_1 = Y$. Wtedy

$$\sum_{I_k} \frac{Y_{I_k}^2}{n_{I_k}} = \frac{Y^2}{n}.$$

Współczynnikiem przy σ_e^2 jest $\sum_1 1 = 1$ (por. 1°b)). Wzór 1°c) wynika wprost z 2°a).

UWAGA 3. *W przypadku danych ortogonalnych* $n_{J_r} = K = \text{const}$, *a więc* $j_r = 1, 2, \ldots, K$ *oraz*

$$j_1 = 1, 2, \ldots, a_1,$$

$$j_2 = 1, 2, \ldots, a_2 = \text{const},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$j_{r-1} = 1, 2, \ldots, a_{r-1} = \text{const}.$$

Wtedy liczba obserwacji eksperymentu wynosi $n = K \prod_{i=1}^{r-1} a_i$. *Punkty* 1°a), 1°b), 1°d) *twierdzenia nie ulegają zmianie. Wzory na współczynniki W w innych punktach przybierają następujące postacie:*

1°c) $W = \dfrac{n}{\prod_{w=1}^{f} a_{j_{t_w}}} = H$ — *gdzie, jak zwykle, zbiór wskaźników* $j_{t_1}, j_{t_2}, \ldots, j_{t_f}$ *jest podzbiorem zbioru* $j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}$.

2°a) $W_{I_k[J_{T_f}]} = H$, *gdzie* $i_1, i_2, \ldots, i_k$ *tworzą zbiór* I_k, *będący podzbiorem zbioru* $j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}$. *Wtedy* $n_{I_k} = \dfrac{n}{\prod_{w=1}^{k} a_{i_w}}$.

2°b) $W_{I_k[J_{T_f}]} = n$.

4. Zastosowania. Dla ilustracji sposobu korzystania z udowodnionego twierdzenia, rozważmy model kształtu (por. § 4 w [5]):

$$y_{ijkg} = \mu + a_i + b_j + (ab)_{ij} + c(ab)_{k(ij)} + e_{ijkg}, \tag{27}$$

gdzie $r-1 = 3$, wskaźniki i, j, k dotyczą poziomów czynników A, B, C, a czwarty wskaźnik $g = 1, \ldots, n_{ijk}$ rozróżnia indywidualne obserwacje E w podklasie (i, j, k). Mamy

$A: i = 1, \ldots, I$,

$B: j = 1, \ldots, J$,

C w AB, czyli $C(AB): k = 1, \ldots, d_{ij}$,

E w podklasach powstałych z umieszczenia poziomów czynnika C w klasyfikacji krzyżowej czynników A i B notujemy symbolicznie w postaci $E(C(AB))$.

Zauważmy, że numery czynników piszemy w modelu ogólnej postaci (por. [4]), a w ustalonym konkretnym modelu (np. (27)) zastępujemy je kolejnymi literami alfabetu łacińskiego. Tak więc symbole określające czynniki $A_1, A_2, A_3, \ldots$ zastępujemy przez $A, B, C, \ldots$, a efekty a_{j_1}, a_{j_2}, $a_{j_1 j_2}$, $a_{j_3(j_1)}, \ldots$ odpowiednio przez a_i, b_j, $(ab)_{ij}$, $c(a)_{k(i)}, \ldots$, gdzie $j_1 = i$, $j_2 = j$, $j_3 = k$.

Z porównania modelu (27) z ogólną postacią modelu (4) jest widoczne, że $j_1 = i$, $j_2 = j$, $j_3 = k$, $j_4 = g$.

Mamy $p = 6$ składników w modelu, w tym $p-2 = 4$ efekty główne i interakcyjne.

$a_{j_1} = a_i$ jest efektem głównym i-tego poziomu pierwszego czynnika (A),

$a_{j_2} = b_j$ jest efektem głównym j-tego poziomu drugiego czynnika (B),

$a_{j_{t_1} j_{t_2}} = a_{ij} = (ab)_{ij}$ jest efektem interakcyjnym związanym z i-tym poziomem czynnika A oraz j-tym czynnika B,

$a_{j_{t_1} j_{t_2} j_{t_3}} = a_{ijk} = c(ab)_{k(ij)}$ jest efektem głównym k-tego poziomu czynnika C wewnątrz podklasy (i, j) klasyfikacji krzyżowej AB.

Wariancjami 5 efektów losowych są

$$Ea_{j_1}^2 = Ea_i^2 = \sigma_A^2, \quad Ea_{j_2}^2 = Eb_j^2 = \sigma_B^2, \quad Ea_{ij}^2 = \sigma_{AB}^2,$$

$$Ea_{ijk}^2 = E[c(ab)_{k(ij)}] = \sigma_{C(AB)}^2, \quad Ee_{ijkg}^2 = \sigma_e^2.$$

Rolę $Y_{I_k} = \sum_{D_k + j_r} y_{J_r}$ grają tu wielkości:

$$Y_{i\ldots} = \sum_{jkg} y_{ijkg}, \quad Y_{.j..} = \sum_{ikg} y_{ijkg},$$

$$Y_{ij..} = \sum_{kg} y_{ijkg}, \quad Y_{ijk.} = \sum_{g} y_{ijkg},$$

gdyż przy efektach mamy zbiory wskaźników I_k kształtu: 1) i, 2) j, 3) ij oraz 4) ijk. Są one podzbiorami zbioru J_{r-1}, tj. zbioru ijk.

Rolę $n_{I_k} = \sum_{D_k} n_{J_{r-1}}$ grają liczebności:

$$n_{i..} = \sum_{jk} n_{ijk}, \quad n_{.j.} = \sum_{ik} n_{ijk}, \quad n_{ij.} = \sum_{k} n_{ijk}.$$

Sumami kwadratów, dla których oblicza się wartości oczekiwane, by otrzymać układ $p = 6$ równań z $p = 6$ niewiadomymi kształtu μ^2, σ_A^2, σ_B^2, σ_{AB}^2, $\sigma_{C(AB)}^2$ i σ_e^2 są:

$$\sum_{ijkg} y_{ijkg}^2, \quad \sum_{i} \frac{Y_{i\ldots}^2}{n_{i..}}, \quad \sum_{j} \frac{Y_{.j..}^2}{n_{.j.}}, \quad \sum_{ij} \frac{Y_{ij..}^2}{n_{ij.}}, \quad \sum_{ijk} \frac{Y_{ijk}^2}{n_{ijk}}$$

i „poprawka” Y^2/n.

Współczynnikiem przy wariancji $\sigma^2_{j_{i_1}j_{i_2}} = \sigma^2_{AB}$ (wskaźniki ij odpowiadają interakcji AB) w rozwinięciu

$$E\sum_{ijk}\frac{Y^2_{ijk}}{n_{ijk}} \quad \text{jest} \quad W_{I_k[J_{T_f}]} = W_{ijk[ij]} = W_{ijk[0]} = n$$

(por. 2°c) w twierdzeniu), a w rozwinięciu

$$E\sum_{j}\frac{Y^2_{.j..}}{n_{.j.}} \quad \text{jest} \quad W_{I_k[J_{T_f}]} = W_{j[ij]} = W_{j[i]} = \sum_{j}\frac{\sum_i n^2_{ij.}}{n_{ij.}}$$

(por. 2°b)).

Współczynnikiem przy wariancji σ^2_A w rozwinięciu

$$E\sum_{j}\frac{Y^2_{.j..}}{n_{.j.}} \quad \text{jest} \quad W_{I_k[J_{T_f}]} = W_{j[i]}.$$

Prace cytowane

[1] S. L. Crump, *The estimation of variance components in analysis of variance*, Biometrics 2 (1946), str. 7-11.

[2] M. Ganguli, *A note on nested sampling*, Sankhya 5 (1941), str. 449-452.

[3] C. R. Henderson, *Estimation of variance and covariance components*, Biometrics 9 (1953), str. 226-252.

[4] H. L. Le Roy und W. Gluckowski, *Die Bestimmung der Varianzkomponenten im a·b·c-Faktorenversuch mit ungleichen Klassenfrequenzen*, Biom. Zeitschr. 3 (1961), str. 73-91.

[5] W. Oktaba, *Estymacja komponentów wariancyjnych w nieortogonalnych modelach losowych opartych na kombinacji klasyfikacji krzyżowej z hierarchiczną*, Zastosow. Mat. 7 (1964), str. 435-463.

Praca wpłynęła 2. 11. 1964

В. ОКТАБА (Люблин)

ТЕОРЕМА О МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНОК ДИСПЕРСИОННЫХ КОМПОНЕНТОВ В СЛУЧАЙНЫХ МОДЕЛЯХ ДЛЯ НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ ДАННЫХ

РЕЗЮМЕ

В работе доказано теорему дающую явные формулы коэффициентов в системе p уравнений при квадрате среднего значения совокупности μ^2 и $p-1$ дисперсиях случайных эффектов в задаче оценки дисперсионных компонент в неортогональной случайной модели основанной на произвольной комбинации перекрестной классификации с иерархической или же основанной на произвольной перекрестной классификации полной и неполной.

Решение соответствующей системы p уравнений с p неизвестными дает несмещенную дисперсию. Из этой теоремы следует как частный случай правило Леруа [4] если сузить задачу к модели основанной на перекрестной классификации полной или неполной.

Дается пример применения теоремы. Конкретные численные примеры применения этой теоремы на практике можно найти в другой работе автора [5].

W. OKTABA (Lublin)

THEOREM CONCERNING THE METHOD OF DETERMINING THE ESTIMATES OF VARIANCE COMPONENTS IN RANDOM MODELS FOR NON-ORTHOGONAL DATA

SUMMARY

The author proves a theorem showing explicit formulas for the coefficients W in a system of p equations with the mean population square μ^2 and $p-1$ variances of random effects with regard to the problem of the estimation of variance components in a non-orthogonal random model based on an arbitrary combination of a cross-classification with a hierarchical classification or on an arbitrary complete and incomplete cross-classification. The solution of a suitable system of p equations with p unknowns gives unbiased variances. This theorem implies, as a particular case, the rule given by Le Roy [4] if we confine ourselves to a model based on a cross-classification, complete or incomplete.

The paper includes an example of the application of the theorem. Concrete numerical examples of its practical application can be found in another paper by the same author [5].
