ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVIII (1973)

Extension des relations de Frenet aux courbes à points irréguliers

par I. Constantinescu, E. Tocaci et Tr. Noaghi (Petroşani, Roumanie)

Résumé. On généralise les expressions de la vitesse et de l'accélération en coordonnées intrinsèques pour le cas des courbes à points irréguliers. On établit ainsi l'expression de la force qui agit sur un point matérial se trouvant sur une trajectoire qui contient des points irréguliers.

L'expression est également possible en des points de régularité, l'appareil mathématique utilisé étant celui de la théorie des distributions.

Soit un point matériel (M) en mouvement sur une courbe (C) continue, pour laquelle les points P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont des points irréguliers à double tangente (ou points de retour). Celle-ci peut être la trajectoire d'une particule matérielle, libre ou soumise à des liaisons. Quelle que soit la situation, aux points P_i la particule (M) subit des chocs, puisque le vecteur vitesse a une variation instamtanée finie, ce qui est one conséquence de la particularité des points P_i.

Evidemment, dans le cas de particules libres, les forces percutantes ne peuvent être qu'extétieures et, dans le cas des liaisons, elles peuvent être des forces de liaison. Indépendamment de la nature des forces extérieures, si C est une courbe matérialisée à laquelle (m) est attaché en P_i, on enregistrera des forces percutantes de liaison.

Soiten α_{i1}, α_{i2} les angles que font les tangentes à (C) en P_i et $\bar{\tau}_{i1}$ et $\bar{\tau}_{i2}$ les verseurs des deux tangentes en P_i.

Dans ce qui suit, nous nous proposons d'établir l'expression des forces percutantes, ou des accélérations, aux points irréguliers.

A cet effet, il est nécessaire d'établir que l'expression de la dérivée du verseur $\bar{\tau}$ par rapport au temps, en ces points, est la même au point P_i, indifféremment si le mouvement a lieu sur la courbe (C) ou sur les tangentes à (C) en P_i. La trajectoire formée par les demi-droites $-\bar{\tau}_1$, et $\bar{\tau}_2$, sera nommée courbe associée (Γ).

Ce que nous avons établi pour un seul point P_1 étant encore vrai pour tous les autres, nous traiterons le cas d'un seul point P_1, en omettant l'indice pour simplifier les expressions.

En même temps la remarque ci-dessus perment de considérer l'expression de $\bar{\tau}$ dans un voisinage suffisamment petit de P_1, celle-ci étant donnée par la relation

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_1 H(t_0 - t) + \bar{\tau}_2 H(t - t_0) \tag{1}$$

ou $H(u)$ est la fonction de Heaviside et t_0 le moment où le mobile passe par P_1

$$H(u) = \begin{cases} 0 & \text{pour } u < 0, \\ 1 & \text{pour } u > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Dérivant (1) et tenant compte du fait que sur (Γ) $\bar{\tau}_1$ et $\bar{\tau}_2$ il y a des verseurs constants, il résulte

$$\dot{\bar{\tau}} = (\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1)\, \delta(t - t_0) \tag{3}$$

où δ est la distribution de Dirac, dont la propriété bien connue

$$\delta(t - t_0) = \delta(t_0 - t) \tag{4}$$

a été utilisée pour obtenir l'égalité (3).

Puisque la vitesse de la particule est

$$\bar{v} = v\bar{\tau} \tag{5}$$

son accélération sera:

$$\bar{a} = \dot{v}\bar{\tau} + v \cdot \tau \tag{6}$$

où, envertu de (3),

$$\bar{a} = \dot{v}\bar{\tau} + v \cdot (\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1)\, \delta(t - t_0) \tag{6'}$$

dans un voisinage de P_1.

D'autre part, si s est un arc de la courbe (C) dans un voisinage suffisamment petit de P_1, l'expression du verseur $\bar{\tau}$ peut être mise sous la forme:

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_1 H(s_0 - s) + \bar{\tau}_2 H(s - s_0), \tag{7}$$

s_0 étant l'arc correspondant à P_1.

En assimilant le mouvement réel à celui de la courbe associée, et en dérivant (7) par rapport au temps (t) on arrive à la relation:

$$\dot{\bar{\tau}} = (\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1)\, v\delta(s - s_0) \tag{8}$$

où $v = \dot{s}$ est la grandeur de la vitesse.

En comparant les expressions (3) et (8) de $\dot{\bar{\tau}}$, on obtient:

$$v\delta(s - s_0) = \delta(t - t_0) \tag{9}$$

et par comparaison de (7) et (1), il résulte:

$$H(s - s_0) = H(t - t_0). \tag{9'}$$

Dans ces conditions, l'expression de l'accélération (a) dans le voisinage considéré devient:

$$\bar{a} = \dot{v}\bar{\tau} + (\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1)v^2\delta(s - s_0). \tag{10}$$

On conclut que la force en un point singulier est

$$\bar{F} = m\dot{v}\bar{\tau} + (\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1)mv^2\delta(s - s_0) \tag{11}$$

ce qui établit ainsi ce que nous avons poursuivi.

Il est intéressant d'observer que l'on peut aussi étendre les relations de Frenet à ces dernières catégories de mouvements.

De la sorte, si a est le demi-angle formé par $-\bar{\tau}_1$ et $\bar{\tau}_2$, on peut facilement établir l'égalité

$$\bar{\tau}_2 - \tau_1 = 2\cos a \cdot \bar{\nu}, \tag{12}$$

$\bar{\nu}$ étant le verseur de la direction de la bissectrice de l'angle formé par $\bar{\tau}_2$ et $\bar{\tau}_1$.

Par conséquent, les relations (10) et (11) prennent la forme

$$\bar{a} = \dot{v}\bar{\tau} + 2\cos a \cdot v^2 \cdot \delta(s - s_0) \cdot \bar{\nu} \tag{10'}$$

et respectivement:

$$\bar{F} = m\dot{v}\tau + 2m\cos a v^2\delta(s - s_0)\bar{\nu}. \tag{11'}$$

D'autre part, la courbe associée (Γ) formée par les semidirections $-\bar{\tau}_1$ et $\bar{\tau}_2$, peut être considérée comme un élément dégénéré d'une famille de courbes, en particulier d'une famille d'hyperboles (H) qui admet comme asymptotes la courbe (Γ).

Indépendamment de tout cela, nous nous proposons d'établir la courbure de (Γ) (en utilisant la théorie des distributions), et en la considérant comme la limite des hyperboles de la famille (H).

La généralité n'en souffrira pas si, pour simplifier le calcul, on choisit un système de référence $P_{x_0y_0}$ dont l'origine est au point irrégulier P, et l'axe P_{y_0} coïncide avec la bissectrice de l'angle formé par les directions $-\bar{\tau}_1$ et $\bar{\tau}_2$.

Remarquons que si la courbe (C) est une courbe plane, située dans le plan Oxy, celle-ci coïncidera évidemment avec le plan $P_{x_0y_0}$ et, si la courbe (C) est une courbe irrégulière dans l'espace $Oxyz$, elle peut être assimilée, dans un voisinage suffisamment petit de P, à une courbe plane dans le plan de la courbe (Γ), c'est-à-dire dans le plan $P_{x_0y_0}$, ce qui signifie que ce qui suit reste valable dans les deux situations, tous les phénomènes mécaniques étudiés ayant lieu dans le voisinage du point P.

Soit maintenant la famille de courbes du plan $P_{x_0y_0}$

$$y_0 = \frac{b}{a}\sqrt{x_0^2 + \lambda^2}\,; \qquad \lambda = a \tag{13}$$

où λ est un paramètre. Soit K_λ la courbure d'un élément de cet ensemble d'hyperboles. Si

$$I_\lambda = \int K_\lambda dx_0 \tag{14}$$

est vérifiée, tenant compte de (13), il résulte immédiatement que

$$\lim_{\lambda\to 0} I_\lambda|_p^q = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \notin (p, q), \\ \dfrac{2b}{(a^2+b^2)^{1/2}} & \text{pour } 0 \in (p, q) \end{cases} \tag{15}$$

aussi bien que l'inégalité

$$\left|I_\lambda|_p^q\right| < \frac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{16}$$

vraie pour n'importe quel p, q et λ, entraîne:

$$\lim_{\lambda\to 0} K_\lambda = \frac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\delta(x-x_0). \tag{17}$$

Mais, comme

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha \tag{18}$$

ce qui fait que dans le cas limite ($\lambda \to 0$) les courbes (13) dégénèrent en (Γ), on peut écrire:

$$\lim_{\lambda\to 0} K_\lambda = K \tag{19}$$

en notant K la courbure de la courbe associée.

En vertu des relations (17), (18) et (19), on obtient:

$$K = 2\cos\alpha\cdot\delta(x_0). \tag{20}$$

En observant que cette égalité a été obtenue dans le cas ($\lambda \to 0$) et en tenant compte de (13) et (19), aussi bien que du fait que, dans un voisinage suffisamment petit de P, les courbes (C) et (Γ) coïncident, on peut affirmer que

$$\delta(x-x_0) = \delta(s-s_0) = \delta(P), \tag{21}$$

$\delta(P)$ étant la distribution de Dirac concentrée au point (P).

Les égalités (20) modifient quelques unes des relations ci-dessus; ainsi, la courbure sur (Γ) devient

$$K = 2\cos\alpha\cdot\delta(P) \tag{20'}$$

et l'accélération de la particule sur la courbe (C) prend la forme

$$\bar{a} = \dot{v}\bar{\tau} + 2\cos\alpha \cdot \delta(P) v^2 \bar{\nu} \tag{10'}$$

où

$$\bar{a} = \dot{v}\bar{\tau} + K v^2 \bar{\nu} \tag{10''}$$

en changeant convenablement l'expression de la force:

$$\bar{F} = m\dot{v}\tau + mKv^2\bar{\nu}. \tag{10'''}$$

L'extension des relations de Frenet aux courbes à points irréguliers facilite, de plus, la détermination des forces percutantes appliquées aux particules matérielles en mouvement sur des courbes contenant des points irréguliers.

Références

[1] M. Bouix, *Les fonctions généralisées en distributions*, Paris 1954.

[2] I. Constantinescu, *Application des fonctions généralisées à l'étude de l'équilibre des fils*, ALA Revue X. ATB. Bruxelles 3 (1970), p. 27.

[3] — *Studiul mişcării cu puncte de discontinuitate a unei plăci plane*, Analele Universităţii Timişoara, Seria de Stiinţe Mathematice-Fizice, vol. III (1965), p. 101–108.

[4] — *Mişcarea firului sub acţiunea forţelor percutate*, Lucrările ştiinţifice ale Institutului de mine Petroşani, Seria Stiinţe de cultură generală, vol. 6 (1969), p. 219–229.

[5] I. Constantinescu et E. Tocaci, *Application en mécanique d'équations fifférentielles contenant une distribution de Dirac*, AIA Revue X. ATB. Bruxelles 4 (1970), p. 18.

[6] — *Considérations sur l'énergie cinétique et le travail mécanique pour les systèmes rigides à percussions*, AIA Revue X. ATB, Bruxelles 1 (1971), p. 17.

[7] — *Sur les équations de deuxième espèce de Lagrange pour les cas des systèmes matériaux percutés*, Elektryfikacja i mechanizacja górnictwa i hutnictwa, Kraków, vol. 33 (1969), p. 11–17.

[8] W. Kecs, P. P. Teodorescu, *Aplicaţii ale teoriei distribuţiilor în mecanică*, Ed. Acad. R. S. R. Bucureşti 1971.

[9] V. Vîlcovici, St. Bălan et R. Voinea, *Mécanique théorique*, Ed. Technique, 1963. Edition II.

Reçu par la Rédaction le 25. 1. 1972