ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIII (1963)

Sur un mouvement plan

par Z. Butlewski (Poznań)

Nous considérons dans cet article le mouvement déterminé dans un système de coordonnées rectangulaires par les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A(t)y\,, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = A(t)x\,, \tag{0.1}$$

$A(t)$ étant une fonction continue et positive pour $t \geqslant t_0$. En introduisant les coordonnées polaires $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, les équations du mouvement deviennent

$$r^{\cdot\cdot} - \varphi^{\cdot 2} r = 0\,, \quad \frac{d}{dt}(r^2\varphi^{\cdot}) - Ar^2 = 0\,, \tag{0.2}$$

où nous avons posé, pour abréger l'écriture,

$$r^{\cdot} = \frac{dr}{dt}, \quad r^{\cdot\cdot} = \frac{d^2r}{dt^2}, \quad \varphi^{\cdot} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \varphi^{\cdot\cdot} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Désignons par v_r, a_r et v_φ, a_φ respectivement les composantes de la vitesse $\boldsymbol{v}$ et de l'accélération $\boldsymbol{a}$ dans la direction du rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ et dans la direction perpendiculaire à $\boldsymbol{r}$. Soit S la vitesse aréolaire du mouvement.

On sait que [1]

$$\begin{aligned} &v_r = r^{\cdot}\,, \quad v_\varphi = r\varphi^{\cdot}\,, \quad S = \tfrac{1}{2} r^2\varphi^{\cdot}\,, \\ &a_r = r^{\cdot\cdot} - \varphi^{\cdot 2} r\,, \quad a_\varphi = \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}(r^2\varphi^{\cdot})\,. \end{aligned} \tag{0.3}$$

Au § 2 nous démontrons que si $A(t) > 0$ pour $t \geqslant t_0$ et si les conditions initiales (W): $r(t_0) = r_0 > 0$, $r^{\cdot}(t_0) = r_0^{\cdot} \geqslant 0$ sont remplies, nous avons $r(t) > r(t_1) + r^{\cdot}(t_1)(t-t_1)$, $r^{\cdot}(t) > r_0^{\cdot}$ pour $t \geqslant t_1 > t_0$. Si de plus $\lim\limits_{t\to\infty} tA(t) = +\infty$, on a $\lim\limits_{t\to\infty} r^{\cdot}(t) = +\infty$.

Ensuite je démontre (§ 3) que si $A(t) > 0$, $A'(t) < 0$ (ou $A'(t) > 0$) pour $t \geqslant t_0$, $\lim\limits_{t\to\infty} A(t) = a > 0$ et si les conditions (W) sont remplies, on obtient

$$\lim_{t\to\infty} \frac{r^{\cdot}(t)}{r(t)} = \lim_{t\to\infty} \varphi^{\cdot}(t) = \sqrt{\frac{a}{2}}\,.$$

(1) Comp. M. T. Huber, *Mechanika ogólna i techniczna*, Warszawa 1956, pp. 93-94.

Si les conditions (W) sont vérifiées et si $\int_{t_0}^{\infty} A(t)dt < \infty$, il vient

$$\lim_{t\to\infty} \frac{r^{\cdot}(t)}{r(t)} = \lim_{t\to\infty} \varphi^{\cdot}(t) = 0\,.$$

En appliquant le théorème de comparaison des solutions nous obtenons (§ 4) entre autres le résultat suivant: Si $A(t) > 0$ pour $t \geqslant t_0$, $\int_{t_0}^{\infty} t^2 A(t)dt = \beta < \infty$ et si les conditions initiales $r_0 > 0$, $r_0^{\cdot} > 0$, $\varphi^{\cdot}(t_0) = \varphi_0^{\cdot} > 0$, sont remplies on obtient pour $t > t_0 = r_0/r_0^{\cdot} > 0$ les inégalités:

$$r_0^{\cdot} \cdot t \leqslant r(t) \leqslant \left(r_0^{\cdot} \cosh\frac{m}{t_0}\right) t\,,$$

$$\varphi_0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi_0 + m\left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{t}\right), \qquad \varphi(t_0) = \varphi_0\,.$$

Finalement (§ 5) nous obtenons le résultat suivant: Si $A(t) > 0$ pour $t \geqslant t_0$ et si les conditions initiales $r_0 > 0$, $r_0^{\cdot} < 0$, $\varphi_0^{\cdot} > 0$ sont remplies, on a $r(t) > 0$ pour $t > t_0$ et $\lim_{t\to\infty} r(t) = \infty$. Il n'existe pas de fonction $r(t)$ telle que $r^{\cdot}(t) < 0$ pour des valeurs suffisamment grandes de t.

Nous obtenons aussi certaines propriétés de la vitesse et de l'accélération du mouvement considéré. Entre autres, nous démontrons (Corollaires 1-10): Si $A(t) > 0$, $A'(t) \neq 0$ pour $t \geqslant t_0$, $\lim_{t\to\infty} A(t) = a > 0$, $r(t_0) > 0$, $r^{\cdot}(t_0) > 0$, $\varphi^{\cdot}(t_0) > 0$, la fonction $r(\varphi)$ est contenue entre deux spirales logarithmiques, c'est-à-dire on a

$$r_0 \exp[(1-\varepsilon)(\varphi - \varphi_0)] \leqslant r(\varphi) \leqslant r_0 \exp[(1+\varepsilon)(\varphi - \varphi_0)]\,, \qquad \varphi > \varphi_0\,,$$

où ε est un nombre positif suffisamment petit pour une valeur initiale t_0 assez grande. Nous trouvons des conditions suffisantes pour que $v_r \to \infty$, $v_\varphi \to \infty$, $a_\varphi \to \infty$ pour $t \to \infty$, $a_r = 0$ pour $t \geqslant t_0$ et finalement des conditions suffisantes pour que l'on n'ait pas $v_r < 0$ pour $t > t_1 > t_0$, où t_1 est un nombre suffisamment grand.

Ce travail est une continuation et une modification des résultats publiés dans mon article *O pewnym ruchu płaskim*, Zeszyty Naukowe Politechniki Poznańskiej (1957).

§ 1. Nous considérons le système d'équations différentielles

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A(t)y\,, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = A(t)x\,, \tag{1.1}$$

où $A(t)$ est une fonction continue et positive de la variable réelle t pour $t_0 \leqslant t < \infty$.

Dans le système (1.1) nous posons

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,. \tag{1.2}$$

On voit d'après (1.2) que

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1.3}$$

et par dérivation nous obtenons

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= r^{\cdot}\cos\varphi - r\varphi^{\cdot}\sin\varphi\,, \\ y^{\cdot} &= r^{\cdot}\sin\varphi + r\varphi^{\cdot}\cos\varphi\,, \end{aligned} \tag{1.4}$$

où nous désignons $x^{\cdot} = dx/dt$, $y^{\cdot} = dy/dt$. En dérivant l'équation (1.3) on a

$$rr^{\cdot} = xx^{\cdot} + yy^{\cdot}\,. \tag{1.5}$$

D'après (1.4) on déduit la relation

$$v^2 = x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2} = r^{\cdot 2} + r^2\varphi^{\cdot 2}\,. \tag{1.6}$$

Nous dérivons l'équation (1.5) par rapport à t et ainsi nous obtenons

$$\frac{d}{dt}(rr^{\cdot}) = rr^{\cdot\cdot} + r^{\cdot 2} = xx^{\cdot\cdot} + yy^{\cdot\cdot} + x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}\,. \tag{1.7}$$

De la relation (1.7) et de (1.1) on déduit

$$xx^{\cdot\cdot} + yy^{\cdot\cdot} = 0\,. \tag{1.8}$$

En utilisant les équations (1.6) et (1.7) nous avons alors l'équation

$$rr^{\cdot\cdot} = r^2\varphi^{\cdot 2}$$

donc

$$r^{\cdot\cdot} - \varphi^{\cdot 2}r = 0\,, \tag{1.9}$$

car la fonction $r(t)$ ne peut s'annuler identiquement dans l'intervalle $t_0 \leqslant t < +\infty$. Sinon, d'après (1.2) on aurait $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ pour $t_0 \leqslant t < \infty$; nous ne nous occuperons pas de cette intégrale triviale du système d'équations (1.1). D'après (1.2) et (1.4) nous obtenons

$$r^2\varphi^{\cdot} = xy^{\cdot} - x^{\cdot}y \tag{1.10}$$

et en dérivant cette relation on trouve

$$\frac{d}{dt}(r^2\varphi^{\cdot}) = xy^{\cdot\cdot} - x^{\cdot\cdot}y\,.$$

D'autre part, en vertu de (1.1) nous avons

$$Ar^2 = xy^{\cdot\cdot} - x^{\cdot\cdot}y$$

et par conséquent

$$\frac{d}{dt}(r^2\varphi^{\cdot}) = Ar^2 . \tag{1.11}$$

Or, nous pouvons remplacer le système (1.1) par le système d'équations (1.9) et (1.11). Le dernier système sera étudié dans la suite.

Si le coefficient $A(t)$ est une constante, on trouve sans difficulté la solution du système (1.1).

§ 2. Nous démontrerons maintenant les théorèmes I et II, qui expriment certaines propriétés des fonctions $r(t)$ et $r^{\cdot}(t)$.

Théorème I. *Si* $A(t)>0$ *pour* $t\geqslant t_0$ *et si les conditions initiales* $r(t_0)=r_0>0$, $r^{\cdot}(t_0)=r_0^{\cdot}\geqslant 0$ *sont remplies, on a* $r(t)>r_0$, $r^{\cdot}(t)>r_0^{\cdot}$ *pour* $t>t_0$ *et de plus* $\lim\limits_{t\to\infty} r(t)=+\infty$. *Si* $r(t_1)=r_1>0$, $r^{\cdot}(t_1)=r_1^{\cdot}>0$, *on a* $r(t)\geqslant r_1+r_1^{\cdot}(t-t_1)$ *pour* $t\geqslant t_1\geqslant t_0$.

Démonstration. Il n'existe pas d'intervalle $\langle\alpha,\beta\rangle$, $t_0\leqslant\alpha<\beta<\infty$, dans lequel on ait $r(t)\neq 0$, $\varphi^{\cdot}(t)\equiv 0$. En effet, supposons que l'on ait l'identité $\varphi^{\cdot}(t)\equiv 0$ dans l'intervalle $\langle\alpha,\beta\rangle$, alors on aurait aussi $\varphi^{\cdot\cdot}(t)\equiv 0$ dans le même intervalle. Si $r(t)\neq 0$ dans l'intervalle $\langle\alpha,\beta\rangle$, alors l'équation (1.11) peut s'écrire sous la forme

$$\varphi^{\cdot\cdot}+2\frac{r^{\cdot}}{r}\varphi^{\cdot}=A . \tag{2.1}$$

La relation (2.1) conduit à une contradiction, car le premier membre de (2.1) est identiquement nul, alors que le second est positif dans l'intervalle $\langle\alpha,\beta\rangle$.

En vertu des équations (1.9) et (1.11) on obtient l'équation

$$r(t)r^{\cdot}(t)=r_0r_0^{\cdot}+\int_{t_0}^{t}[r^{\cdot 2}(s)+r^2(s)\varphi^{\cdot 2}(s)]ds , \tag{2.2}$$

qui conduit à la conclusion que

$$r(t)r^{\cdot}(t)>r_0r_0^{\cdot}\geqslant 0 \tag{2.3}$$

pour $t>t_0$. Ensuite, d'après (1.9) on a $r^{\cdot\cdot}(t)=\varphi^{\cdot 2}(t)r(t)\geqslant 0$ puisque $r(t)>0$.

Si $r_0>0$ et $r_0^{\cdot}>0$, on déduit de (2.3) et de l'inégalité $r^{\cdot\cdot}(t)\geqslant 0$ pour $r(t)>0$ que $r(t)\geqslant r_0+r_0^{\cdot}(t-t_0)$ lorsque $t>t_0$. Si $r_0>0$ et $r_0^{\cdot}=0$, il existe un point $t=t_1>t_0$ pour lequel $r_1=r(t_1)>0$, $r_1^{\cdot}=r^{\cdot}(t_1)>0$, par conséquent nous obtenons l'inégalité $r(t)\geqslant r_1+r_1^{\cdot}(t-t_1)$ lorsque $t>t_1$, d'où $\lim\limits_{t\to\infty} r(t)=+\infty$. Le théorème I est donc démontré.

Nous trouverons maintenant des conditions suffisantes pour que $\lim_{t\to\infty} r^{\cdot}(t) = +\infty$. Nous précisons ces conditions sous forme du

THÉORÈME II. *Si* $A(t) > 0$ *pour* $t \geqslant t_0$, *si* $\lim_{t\to\infty} tA(t) = +\infty$ *et si de plus les conditions initiales* $r(t_0) = r_0 > 0$, $r^{\cdot}(t_0) = r_0^{\cdot} \geqslant 0$ *sont remplies, on a* $\lim_{t\to\infty} r^{\cdot}(t) = +\infty$.

Démonstration. Les hypothèses du théorème I sont vérifiées, on a donc $r(t) \geqslant r(T) + r^{\cdot}(T)(t-T)$ pour $t \geqslant T \geqslant t_0$, où $r(T) > 0$, $r^{\cdot}(T) > 0$. En vertu de l'équation (1.9) $r^{\cdot\cdot}(t) > 0$ pour $t > T > t_0$, par conséquent $r^{\cdot}(t)$ est une fonction croissante pour $t > T$, il existe donc une limite $\lim_{t\to\infty} r^{\cdot}(t)$ (finie ou non). Nous allons démontrer que cette limite est infinie, c'est-à-dire $\lim_{t\to\infty} r^{\cdot}(t) = +\infty$.

Supposons au contraire, que $\lim_{t\to\infty} r^{\cdot}(t) = g < \infty$; nous avons donc $r^{\cdot}(t) \leqslant g$ pour $t \geqslant T$, où $g > 0$. Il vient

$$\frac{r(t)}{r^{\cdot}(t)} A(t) \geqslant \frac{r(T) + r^{\cdot}(T)(t-T)}{g} A(t), \qquad (t > T) \tag{2.4}$$

et d'après l'hypothèse $\lim_{t\to\infty} tA(t) = +\infty$ on a

$$\lim_{t\to\infty} \frac{r(t)}{r^{\cdot}(t)} A(t) = +\infty . \tag{2.5}$$

De l'équation (1.11) on tire

$$\varphi^{\cdot}(t) = \frac{1}{r^2(t)} \left[C + \int_{t_0}^{t} A(s) r^2(s)\, ds \right], \qquad t \geqslant t_0 , \tag{2.6}$$

où nous avons posé $C = r^2(t_0)\varphi^{\cdot}(t_0)$.

Désignons par L un nombre positif tel que $tA(t) > L$ pour $t \geqslant T$. Alors $A(t)r^2(t) \geqslant \frac{L}{t} r_0^2$ pour $t \geqslant T > t_0 > 0$ et par conséquent

$$\int_{t_0}^{t} A(s) r^2(s)\, ds \geqslant \int_{T}^{t} A(s) r^2(s)\, ds \qquad \text{pour} \qquad t \geqslant T > t_0 > 0 .$$

Ensuite, on a

$$\int_{t_0}^{t} A(s) r^2(s)\, ds \geqslant r_0^2 L \log \frac{t}{T}, \qquad t \geqslant T > t_0$$

et finalement on obtient

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} A(s) r^2(s)\, ds = +\infty .$$

Or, d'après (2.6) il résulte que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{r^2(t)}\left[C+\int_{t_0}^{t}A(s)r^2(s)\,ds\right]=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{r(t)}{r^{\cdot}(t)}A(t)$$

et en vertu de (2.5) on déduit que

$$\lim_{t\to\infty}\varphi^{\cdot}(t)=+\infty\,.$$

D'après (1.9) on a

$$\lim_{t\to\infty}r^{\cdot\cdot}(t)=\lim_{t\to\infty}[\varphi^{\cdot 2}(t)r(t)]=+\infty$$

d'où

$$\lim_{t\to\infty}r^{\cdot}(t)=\infty\,,$$

en contradiction avec notre supposition que $\lim_{t\to\infty}r^{\cdot}(t)=g<\infty$. Le théorème II est donc démontré.

§ 3. Nous considérons maintenant les fonctions $r^{\cdot}(t)/r(t)$ et $\varphi^{\cdot}(t)$ dans le cas où $A(t)$ tend vers une limite finie a, ou bien l'intégrale $\int_{t_0}^{\infty}A(t)\,dt$ est bornée.

Quelques propriétes de ces fonctions seront démontrées dans les théorèmes III, IV et V.

THÉORÈME III. *Si* $r(t_0)>0$, $r^{\cdot}(t_0)>0$, $A(t)>0$ *pour* $t\geqslant t_0$, $\lim_{t\to\infty}A(t)=a>0$ *et si l'une des limites* $\lim_{t\to\infty}r^{\cdot}(t)/r(t)$ *et* $\lim_{t\to\infty}\varphi^{\cdot}(t)$ *existe, alors elles existent l'une et l'autre et de plus on a*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{r^{\cdot}(t)}{r(t)}=\lim_{t\to\infty}\varphi^{\cdot}(t)=\sqrt{\frac{a}{2}}\,.$$

Démonstration. Nous démontrerons d'abord que si les deux limites $\lim_{t\to\infty}r^{\cdot}(t)/r(t)$ et $\lim_{t\to\infty}\varphi^{\cdot}(t)$ existent, l'une et l'autre sont finies et différentes de zéro. En effet, en vertu du théorème I on a $r(t)\to\infty$ pour $t\to\infty$, donc d'après (2.6) nous obtenons

$$\lim_{t\to\infty}\varphi^{\cdot}(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{r^{\cdot}(t)}{r(t)}}\,. \tag{3.1}$$

Si $\lim_{t\to\infty}\varphi^{\cdot}(t)=0$, on aurait [2]

$$\lim_{t\to\infty}\frac{r^{\cdot}(t)}{r(t)}=0$$

et la contradiction avec (3.1) est évidente.

[2] Voir par example E. Kamke, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, T. I, 1942, p. 130.

Supposons maintenant que $\lim_{t\to\infty}\varphi^{\cdot}(t)=\infty$. Dans ce cas on a $\lim_{t\to\infty}\frac{r^{\cdot}(t)}{r(t)}$ $=\infty$ [3] en contradiction avec la relation (3.1).

Des considérations analogues conduisent à la conclusion que la fonction $r^{\cdot}(t)/r(t)$ ne tend ni vers 0, ni vers ∞ pour $t\to\infty$.

Posons donc

$$\lim_{t\to\infty}\varphi^{\cdot}(t)=\gamma>0\,,$$

par conséquent on aurait [4]

$$\lim_{t\to\infty}\frac{r^{\cdot}(t)}{r(t)}=\gamma\,.$$

En utilisant la relation (3.1), nous obtenons

$$\lim_{t\to\infty}\frac{r^{\cdot}(t)}{r(t)}=\lim_{t\to\infty}\varphi^{\cdot}(t)=\sqrt{\frac{a}{2}}\,.$$

Le théorème III est donc démontré.

Remarque. Si $A(t)\equiv a>0$ ($a=\text{const.}$) pour $t\geqslant t_0$, on a

$$r=\exp\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\,t\right),\qquad \varphi^{\cdot}=\frac{r^{\cdot}}{r}=\sqrt{\frac{a}{2}}\,.$$

On vérifie facilement que ces fonctions satisfont aux équations (1.9) et (1.11).

Nous avons démontré le théorème III en supposant l'existence des limites $\lim_{t\to\infty}\frac{r^{\cdot}(t)}{r(t)}$, $\lim_{t\to\infty}\varphi^{\cdot}(t)$.

Nous trouverons dans la suite des conditions suffisantes pour que les limites $\lim_{t\to\infty}\frac{r^{\cdot}(t)}{r(t)}$ et $\lim_{t\to\infty}\varphi^{\cdot}(t)$ existent. Ces conditions sont enoncées sous forme du

THÉORÈME IV. *Si* $A(t)>0$, $A'(t)<0$ (*ou* $A'(t)>0$) *pour* $t\geqslant t_0$, $\lim_{t\to\infty}A(t)=a>0$ *et si les conditions initiales* $r(t_0)=r_0>0$, $r^{\cdot}(t_0)=r_0^{\cdot}>0$, $\varphi^{\cdot}(t_0)=\varphi_0^{\cdot}>0$ *sont vérifiées, alors* $\lim_{t\to\infty}\frac{r^{\cdot}(t)}{r(t)}$ *et* $\lim_{t\to\infty}\varphi^{\cdot}(t)$ *existent et de plus on a*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{r^{\cdot}(t)}{r(t)}=\lim_{t\to\infty}\varphi^{\cdot}(t)=\sqrt{\frac{a}{2}}\,.$$

---

[3] Voir loc. cit. p. 128.

[4] Comp. [2] p. 130 (e).

Démonstration. Supposons d'abord que $A'(t) < 0$ pour $t \geqslant t_0$. En posant $z = r^{\cdot}/r$ dans l'équation (1.9), nous obtenons l'équation differentielle de Riccati

$$\frac{dz}{dt} = \varphi^{\cdot 2} - z^2 \,. \tag{3.2}$$

D'après le théorème I on obtient $r(t) > r_0 + r_0^{\cdot}(t-t_0)$, $r^{\cdot}(t) > r_0^{\cdot} > 0$ pour $t > t_0$ et par conséquent $z(t) \geqslant r_0^{\cdot}/r(t) > 0$ pour $t \geqslant t_0$, cependant d'après l'équation (2.6) on a $\varphi(t) > \varphi(t_0) > 0$ pour $t > t_0$. Si $z(t)$ est une fonction monotone (croissante ou décroissante) pour $t > t_0$, la limite $\lim\limits_{t\to\infty} z(t)$ existe en vertu du théorème III et de plus on a

$$\lim_{t\to\infty}\frac{r^{\cdot}(t)}{r(t)} = \lim_{t\to\infty}\varphi^{\cdot}(t) = \sqrt{\frac{a}{2}} \,.$$

Supposons maintenant que la fonction $z(t)$ soit indéfiniment oscillante, c'est-à-dire que la dérivée $z'(t)$ change de signe une infinité de fois dans l'intervalle $\langle t_0, +\infty)$. La fonction $z(t)$ admet donc une infinité de maxima et de minima pour les valeurs de t pour lesquelles $z'(t) = 0$.

Soient $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots (t_0 < t_1 < t_2 < \ldots)$ les valeurs consécutives où la fonction $z(t)$ admet des minima, et $T_1, T_2, \ldots, T_n., \ldots (t_0 < T_1 < T_2 < \ldots)$ celles où la fonction $z(t)$ admet ses maxima. Soit

$$T_n < t_n < T_{n+1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \,.$$

On a

$$z'(t_n) = 0 \,, \qquad z'(T_n) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

par conséquent d'après (3.2) on obtient

$$z(t_n) = \varphi^{\cdot}(t_n) \,, \qquad z(T_n) = \varphi^{\cdot}(T_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \,.$$

Nous allons démontrer que

$$z''(t_n) \neq 0 \,, \qquad z''(T_n) \neq 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \,.$$

En effet, si l'on avait par exemple $z''(t_n) = 0$, nous aurions aussi $z'''(t_n) = 0$. Sinon, le point $t = t_n$ ne serait pas extrémal pour la fonction $z(t)$. Nous allons démontrer que le cas $z''(t_n) = 0$, $z'''(t_n) = 0$ est impossible.

En effet, nous pouvons écrire l'équation (2.1) sous la forme

$$\varphi^{\cdot\cdot} = A - 2z\varphi^{\cdot} \,. \tag{3.3}$$

En différentiant l'équation (3.2) et en posant $t = t_n$ nous obtenons

$$z''(t_n) = 2z(t_n)\varphi^{\cdot\cdot}(t_n) = 0$$

d'où

$$\varphi^{\cdot\cdot}(t_n) = 0 \,.$$

En différentiant l'équation (3.2) encore une fois on a

$$z'''(t_n) = z(t_n)\varphi^{\cdots}(t_n)\,.$$

On déduit de l'équation (3.3) que

$$\varphi^{\cdots}(t_n) = A'(t_n)$$

et ensuite il vient

$$z'''(t_n) = z(t_n)A'(t_n) \neq 0\,.$$

Nous sommes arrivés à une contradiction avec notre supposition que $z'''(t_n) = 0$.

On a donc $z''(t_n) > 0$, $z''(T_n) < 0$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Aux points qui correspondent aux extrêmes on a

$$z'' = 2z(A - 2z^2)\,. \tag{3.4}$$

On déduit de (3.4) les inégalités

$$z(t_n) < \sqrt{A(t_n)/2}\,,\qquad z(T_n) > \sqrt{A(T_n)/2}\,,\qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)\,. \tag{3.5}$$

Il est évident que

$$\begin{aligned} z'(t) &\leqslant 0 \quad \text{pour} \quad T_n < t < t_n\,,\\ z'(t) &\geqslant 0 \quad \text{pour} \quad t_n < t < T_{n+1}\,, \end{aligned}$$

par conséquent on a d'après (3.2)

$$\begin{aligned} \varphi^{\cdot}(t) &\leqslant z(t) \quad \text{pour} \quad T_n < t < t_n\,,\\ \varphi^{\cdot}(t) &\geqslant z(t) \quad \text{pour} \quad t_n < t < T_{n+1}\,. \end{aligned}$$

En vertu de ces inégalités et de la relation (3.3) nous obtenons

$$\begin{aligned} \varphi^{\cdot\cdot}(t_n) &= A(t_n) - 2z^2(t_n) > 0\,,\\ \varphi^{\cdot\cdot}(T_n) &= A(T_n) - 2z^2(T_n) < 0\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Or, dans l'intervalle $T_n \leqslant t \leqslant t_n$ il existe un minimum de la fonction $\varphi^{\cdot}(t)$. Posons donc

$$\mu_n = \inf_{T_n \leqslant t \leqslant t_n} \varphi^{\cdot}(t) > 0\,.$$

Supposons que

$$\mu_n = \varphi^{\cdot}(\tau_n)\,,\qquad T_n < \tau_n < t_n\,,$$

où τ_n désigne un point quelconque où cette valeur est atteinte. Pour $t = \tau_n$ on a

$$\varphi^{\cdot\cdot}(\tau_n) = A(\tau_n) - 2z(\tau_n)\varphi^{\cdot}(\tau_n) = 0$$

et ensuite nous obtenons

$$\varphi^{\cdot}(\tau_n) = \frac{A(\tau_n)}{2z(\tau_n)} < z(t_n)$$

puisque $\varphi^{\cdot}(t_n) = z(t_n)$ et, d'après (3.6), il vient $\varphi^{\cdot\cdot}(t_n) > 0$.

Nous avons $z(T_n) > z(\tau_n) > z(t_n)$ donc

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{A(\tau_n)}{z(T_n)} < z(t_n)\,. \tag{3.7}$$

Au point $t = T_{n+1}$ on a

$$\varphi^{\cdot}(T_{n+1}) = z(T_{n+1}) > \sqrt{\frac{A(T_{n+1})}{2}}\,,$$

d'où

$$\varphi^{\cdot\cdot}(T_{n+1}) = A(T_{n+1}) - 2z^2(T_{n+1}) < 0\,. \tag{3.8}$$

D'après (3.6) et (3.8) nous voyons que $\varphi^{\cdot\cdot}(t_n) > 0$, $\varphi^{\cdot\cdot}(T_{n+1}) < 0$, donc il existe dans l'intervalle $t_n < t < T_{n+1}$ au moins un maximum de la fonction $\varphi^{\cdot}(t)$; ce maximum est plus grand que $z(T_{n+1})$.

Dans l'intervalle (t_n, T_{n+1}) on a $z > 0$, $z' \geqslant 0$ et $A' < 0$, donc aux extrêmes de la fonction $\varphi^{\cdot}(t)$ dans l'intervalle (t_n, T_{n+1}) nous avons

$$\varphi^{\cdot\cdot}(t) = 0\,, \qquad \varphi^{\cdot\cdot\cdot}(t) = A' - 2\varphi^{\cdot}z' < 0\,.$$

Or, dans l'intervalle (t_n, T_{n+1}) il existe un seul maximum de la fonction $\varphi^{\cdot}(t)$.

Soit $t = \theta_n$ $(t_n < \theta_n < T_{n+1})$ le point où la fonction $\varphi^{\cdot}(t)$ atteint son maximum dans l'intervalle (t_n, T_{n+1}), c'est-à-dire

$$\varphi^{\cdot\cdot}(\theta_n) = A(\theta_n) - 2\varphi^{\cdot}(\theta_n)z(\theta_n) = 0\,,$$

donc

$$\varphi^{\cdot}(\theta_n) = \frac{1}{2}\cdot\frac{A(\theta_n)}{z(\theta_n)} > z(T_{n+1})\,. \tag{3.9}$$

Nous avons

$$z(t_n) < z(\theta_n) < z(T_{n+1})\,. \tag{3.10}$$

En vertu de l'inégalité (3.9) on obtient a fortiori

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{A(\theta_n)}{z(t_n)} > z(T_{n+1})\,. \tag{3.11}$$

D'après les inégalités (3.7) et (3.11), en supposant que $A'(t) < 0$ pour $t \geqslant t_0$, nous obtenons les inégalités

$$1 > \frac{A(\theta_n)}{A(\tau_n)} > \frac{z(T_{n+1})}{z(T_n)}$$

et par conséquent

$$z(T_n) > z(T_{n+1})\,, \tag{3.12}$$

c'est-à-dire la suite des maxima de la fonction $z(t)$ est décroissante.

Nous allons maintenant démontrer *que* $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$ *et aussi* $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \infty$.

Supposons, au contraire, que la suite $\{t_n\}$ admette une limite finie τ, c'est-à-dire que $\lim_{n\to\infty} t_n = \tau < \infty$ et aussi $\lim_{n\to\infty} T_n = \tau$, puisque $t_{n-1} < T_n < t_n$. Nous avons ensuite

$$z(T_n) - z(t_n) = z'(\xi_n)(T_n - t_n),$$

où $T_n < \xi_n < t_n$. D'après (3.2) on aurait $|z'(t)| < \infty$ pour $t_0 < t \leqslant \tau$, et par suite

$$\lim_{n\to\infty} z(T_n) = \lim_{n\to\infty} z(t_n) = z(\tau) = \sqrt{\tfrac{1}{2}A(\tau)}.$$

La fonction $\varphi^{\cdot}(t)$ admet aux points correspondant aux extrêmes les valeurs

$$\varphi^{\cdot}(\tau_n) = \frac{A(\tau_n)}{2z(\tau_n)}, \qquad \varphi^{\cdot}(\theta_n) = \frac{A(\theta_n)}{2z(\theta_n)},$$

où $T_n < \tau_n < t_n < \theta_n < T_{n+1}$. Nous aurions aussi

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^{\cdot}(\tau_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi^{\cdot}(\theta_n) = \varphi^{\cdot}(\tau) = \sqrt{\tfrac{1}{2}A(\tau)}.$$

Alors on aurait $z(\tau) = \varphi^{\cdot}(\tau)$ et par conséquent, en vertu de (3.2),

$$z'(\tau) = 0. \tag{3.13}$$

Des inégalités (3.5) on déduit qu'il existe une suite des valeurs $\{\delta_n\}$, $T_n < \delta_n < t_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ telle que

$$z(\delta_n) = \sqrt{\tfrac{1}{2}A(\delta_n)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

On a la relation

$$\frac{z(\delta_n) - z(\tau)}{\delta_n - \tau} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{A(\delta_n)} - \sqrt{A(\tau)}}{\delta_n - \tau}.$$

Si $\delta_n \to \tau$ nous obtenons

$$z'(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{A(t)}\right)'_{t=\tau} \neq 0$$

en contradiction avec le résultat (3.13). On a donc $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$. En tenant compte de

$$z(T_n) > \sqrt{\tfrac{1}{2}A(T_n)}, \qquad \lim_{t\to\infty} A(t) = a > 0$$

et de (3.12), on trouve que

$$\lim_{n\to\infty} z(T_n) = g \geqslant \sqrt{\frac{a}{2}}. \tag{3.14}$$

D'après (3.7) et (3.10) on obtient l'inégalité

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{A(\tau_n)}{z(T_n)} < z(\theta_n). \tag{3.15}$$

En vertu de (3.9), (3.15) et de l'hypothèse $A'(t) < 0$, nous avons

$$z(T_{n+1}) < \varphi^{\cdot}(\theta_n) < z(T_n) .$$

Or, il existe une limite des maxima de la fonction $\varphi^{\cdot}(t)$ et elle est égale à g, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^{\cdot}(\theta_n) = g \geqslant \sqrt{\frac{a}{2}} . \tag{3.16}$$

Les inégalités (3.7) et (3.11) donnent

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{A(\tau_n)}{z(T_n)} < z(t_n) < \frac{1}{2}\cdot\frac{A(\theta_n)}{z(T_{n+1})},$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} z(t_n) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{g} . \tag{3.17}$$

Nous obtenons aisément d'après (3.9) et (3.15)

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{A(\tau_n)}{z(T_n)} < z(\theta_n) < \frac{1}{2}\cdot\frac{A(\theta_n)}{z(T_{n+1})}$$

et enfin

$$\lim_{n\to\infty} z(\theta_n) = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{g} . \tag{3.18}$$

Nous démontrerons maintenant que la suite des maxima et la suite des minima de $z(t)$ tendent vers la même limite et que d'après (3.14) et (3.17) on doit avoir

$$g = \sqrt{\frac{a}{2}} .$$

En effet, posons

$$a_n = \theta_n - t_n > 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

et considérons la suite $\{a_n\}$. Dans ce qui suit nous désignerons par a_{n_μ} les termes de la suite $\{a_n\}$ à valeurs telles que (première classe)

$$0 < a_{n_\mu} < c < \frac{1}{\sqrt{2a}} \qquad (c = \mathrm{const})$$

et par a_{n_ν} les termes à valeurs telles que (seconde classe)

$$0 < c \leqslant a_{n_\nu} .$$

Il peut arriver que l'une de ces classes contienne un nombre fini de termes de la suite $\{a_n\}$ ou n'en contienne aucun. Il suffit de considérer ici les deux cas possibles: 1) la première classe contient une infinité de termes, 2) la seconde classe en contient une infinité.

Ad 1). Supposons qu'il existe une suite infinie d'intervalles $\{a_n\}$ telle que

$$0 < a_n = \theta_n - t_n < c < \frac{1}{\sqrt{2a}}. \tag{3.19}$$

En vertu du théorème des accroissements finis nous avons

$$0 < \frac{\varphi^{\cdot}(\theta_n) - \varphi^{\cdot}(t_n)}{\theta_n - t_n} = \varphi^{\cdot\cdot}(\eta_n) \qquad (t_n < \eta_n < \theta_n).$$

Les relations (3.3) et (3.19) entraînent l'inégalité

$$0 < \frac{\varphi^{\cdot}(\theta_n) - \varphi^{\cdot}(t_n)}{c} < A(\eta_n) - 2z(\eta_n)\varphi^{\cdot}(\eta_n).$$

Or

$$0 < z(t_n) < z(\eta_n)$$

et

$$0 < \varphi^{\cdot}(t_n) = z(t_n) < \varphi^{\cdot}(\eta_n),$$

on aurait donc a fortiori

$$0 < \frac{\varphi^{\cdot}(\theta_n) - z(t_n)}{c} < A(\eta_n) - 2z^2(t_n).$$

En tenant compte de (3.16) et (3.17) nous avons pour $n \to \infty$

$$0 \leqslant \frac{1}{2gc}(2g^2 - a) \leqslant \frac{a}{2g^2}(2g^2 - a). \tag{3.20}$$

Si $g \neq \sqrt{a/2}$, il résulte de (3.20) que

$$g > \sqrt{\frac{a}{2}}, \qquad 0 < \frac{1}{2gc} \leqslant \frac{a}{2g^2},$$

d'où

$$c \geqslant \frac{g}{a} > \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

Nous sommes arrivés à une contradiction avec l'inégalité (3.19) et par conséquent on doit avoir $g = \sqrt{a/2}$.

Ad 2). Supposons maintenant que

$$a_n = \theta_n - t_n \geqslant c > 0.$$

Dans l'intervalle $t_n < t \leqslant \theta_n$ on a $z'(t) > 0$, et pour $t = t_n$ on a $z'(t_n) = 0$. Donc

$$\int_{t_n}^{\theta_n} z'(t)\,dt = z(\theta_n) - z(t_n)$$

et d'après (3.17), (3.18) on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_n}^{\theta_n} z'(t)\,dt = 0\,. \tag{3.21}$$

Nous allons démontrer que $\lim_{n\to\infty} z'(\theta_n) = 0$. En effet, si l'on avait $z'(\theta_n) \geqslant h > 0$ ($h =$ const) pour une suite infinie quelconque d'indices, il existerait dans l'intervalle $(\theta_n - \varepsilon, \theta_n)$, où $\varepsilon > 0$, un point τ_n tel que $\lim_{n\to\infty} z'(\tau_n) = 0$.

Dans le cas contraire on aurait $z'(t) > d > 0$, ($d =$ const) dans l'intervalle $\langle\theta_n - \varepsilon, \theta_n\rangle$ pour une infinité de valeurs de n. On a donc

$$\int_{t_n}^{\theta_n} z'(t)\,dt \geqslant \int_{\theta_n - c}^{\theta_n} z'(t)\,dt \geqslant \int_{\theta_n-\varepsilon}^{\theta_n} z'(t)\,dt \geqslant d\cdot\varepsilon > 0 \qquad (0 < \varepsilon < c);$$

cette inégalité est en contradiction avec (3.21). Nous avons la relation

$$z'(\theta_n) = z'(\tau_n) + \int_{\tau_n}^{\theta_n} z''(t)\,dt\,,$$

donc

$$|z'(\theta_n)| \leqslant |z'(\tau_n)| + \varepsilon \max_{\tau_n\leqslant t\leqslant\theta_n} |z''(t)|\,.$$

En différentiant l'équation (3.2) on a

$$z'' = 2(\varphi^{\cdot}\varphi^{\cdot\cdot} - zz')\,.$$

On déduit des relations (3.2) et (3.3) que les dérivées $z'(t)$ et $\varphi^{\cdot\cdot}(t)$ sont bornées pour $t \geqslant t_0$. Alors

$$\max_{t_0\leqslant t<\infty} |z''(t)| = K < \infty\,.$$

Si $|z'(\tau_n)| < \varepsilon_1/2$, $\varepsilon\cdot K < \varepsilon_1/2$, on a donc

$$|z'(\theta_n)| < \varepsilon_1\,.$$

Nous arrivons à une contradiction avec l'hypothèse $z'(\theta_n) \geqslant h > 0$ et par conséquent on a

$$\lim_{n\to\infty} z'(\theta_n) = 0\,.$$

D'après l'équation (3.2) il résulte que

$$\lim_{n\to\infty} [\varphi^{\cdot}(\theta_n) - z(\theta_n)] = \lim_{n\to\infty} \frac{z'(\theta_n)}{\varphi^{\cdot}(\theta_n) + z(\theta_n)} = 0$$

et par conséquent nous obtenons d'après (3.16) et (3.18)

$$g = \frac{1}{2}\,\frac{a}{g}$$

c'est-à-dire

$$g = \sqrt{\frac{a}{2}}.$$

Nous avons démontré le théorème IV dans le cas $A'(t) < 0$ pour $t \geqslant t_0$.

Des considérations analogues aux précédentes conduisent au même résultat dans le cas $A'(t) > 0$ pour $t \geqslant t_0$; il n'y a qu'à considérer d'abord l'intervalle (t_n, T_{n+1}) au lieu de l'intervalle (T_n, t_n).

Le théorème IV est donc démontré.

THÉORÈME V. *Si* $A(t) > 0$ *pour* $t \geqslant t_0$ $\int_{t_0}^{\infty} A(t)dt = a < \infty$ *et si les conditions initiales* $r(t_0) = r_0 > 0$, $r^{\cdot}(t_0) = r_0^{\cdot} \geqslant 0$ *sont remplies, nous avons*

$$\lim_{t\to\infty} \varphi^{\cdot}(t) = 0\,, \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{r^{\cdot}(t)}{r(t)} = 0\,, \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{r^{\cdot\cdot}(t)}{r(t)} = 0\,.$$

Démonstration. D'après le théorème I on a $r(t) > r_0 > 0$, $r^{\cdot}(t) \geqslant r_0^{\cdot} \geqslant 0$ pour $t \geqslant t_0$ et $\lim_{t\to\infty} r(t) = \infty$. On peut écrire l'équation (2.9) sous la forme

$$\varphi^{\cdot}(t) = \frac{c}{r^2(t)} + g(t) \qquad (c = r_0^2\varphi_0^{\cdot})\,, \tag{3.22}$$

où nous avons posé pour abréger

$$g(t) = \frac{1}{r^2(t)} \int_{t_0}^{t} A(s) r^2(s) ds\,. \tag{3.23}$$

Nous allons démontrer que

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0\,.$$

En effet, pour $\varepsilon > 0$ il existe un point $T_\varepsilon > t_0$ tel que

$$\int_{T_\varepsilon}^{\infty} A(t)dt < \varepsilon\,.$$

Pour $t > T_\varepsilon$ on a

$$0 < g(t) = \frac{1}{r^2(t)} \int_{t_0}^{T_\varepsilon} A(s) r^2(s) ds + \frac{1}{r^2(t)} \int_{T_\varepsilon}^{t} A(s) r^2(s) ds$$

et par conséquent

$$0 < g(t) \leqslant \frac{1}{r^2(t)} \int_{t_0}^{T_\varepsilon} A(s) r^2(s) ds + \varepsilon\,,$$

donc finalement

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0\,.$$

D'autre part, d'après (3.22), nous obtenons $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi^{\cdot}(t)=0$. Il résulte immédiatement de (1.9) que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{r^{\cdot\cdot}(t)}{r(t)}=\lim_{t\to\infty}\varphi^{\cdot 2}(t)=0\,.$$

Dans l'équation $r^{\cdot\cdot}-\varphi^{\cdot 2}r=0$ on a $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi^{\cdot}(t)=0$ d'où l'on tire [5]

$$\lim_{t\to\infty}\frac{r^{\cdot}(t)}{r(t)}=0\,.$$

Le théorème V est donc démontré.

En tenant compte du théorème II on a le

Corollaire 1. *Si* $A(t)>0$ *pour* $t\geqslant t_0$, $\lim\limits_{t\to\infty}tA(t)=\infty$ *et si les conditions initiales* $r(t_0)>0$, $r^{\cdot}(t_0)\geqslant 0$ *sont remplies, nous obtenons* $\lim\limits_{t\to\infty}v_r=\infty$.

Des théorèmes I et IV on déduit le

Corollaire 2. *Si* $A(t)>0$, $A'(t)<0$ *(où* $A'(t)>0$*) pour* $t\geqslant t_0$, $\lim\limits_{t\to\infty}A(t)=a>0$ *et si les conditions initiales* $r(t_0)>0$, $r^{\cdot}(t_0)>0$, $\varphi^{\cdot}(t_0)>0$ *sont remplies, on obtient d'après* (0.3), (1.9) *et* (1.11) $v_r\to\infty$ $v_\varphi\to\infty$, $a_\varphi\to\infty$ *pour* $t\to\infty$, $a_r=0$ *pour* $t\geqslant t_0$.

La vitesse aréolaire $S(t)$ du mouvement prend la forme

$$S(t)=\frac{1}{2}r^2\varphi^{\cdot}=\frac{1}{2}\left[r_0^2\varphi^{\cdot}(t_0)+\int_{t_0}^{t}A(s)r^2(s)\,ds\right].$$

En utilisant le théorème I, nous obtenons le

Corollaire 3. *Si* $A(t)>0$ *pour* $t\geqslant t_0$, $\int_{t_0}^{\infty}t^2A(t)\,dt=\infty$, *on a*

$$\lim_{t\to\infty}S(t)=\infty\,.$$

Du théorème V on déduit le

Corollaire 4. *Si* $A(t)>0$ *pour* $t\geqslant t_0$ *et si* $\int_{t_0}^{\infty}A(t)\,dt<\infty$, $r_0>0$, $r_0^{\cdot}\geqslant 0$ *on a* $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi^{\cdot}(t)=0$, *c'est-à-dire la vitesse angulaire tend vers zéro lorsque* $t\to\infty$; *si de plus* $\lim\limits_{t\to\infty}A(t)=0$, *on obtient*

$$\lim_{t\to\infty}\varphi^{\cdot\cdot}(t)=\lim_{t\to\infty}\left(A-2\frac{r^{\cdot}}{r}\varphi^{\cdot}\right)=0,$$

c'est-à-dire l'accélération angulaire tend vers zéro lorsque $t\to\infty$.

---

[5] Voir [2] p. 130.

En tenant compte des formules (0.3) et du théorème IV il vient

$$\lim_{t\to\infty}\frac{v_r}{v_\varphi}=\lim_{t\to\infty}\frac{r^\cdot}{r\varphi^\cdot}=1 .$$

Par conséquent, pour t suffisamment grand nous obtenons les inégalités

$$1-\varepsilon<\frac{r^\cdot}{r\varphi^\cdot}<1+\varepsilon ,$$

où ε est un nombre suffisamment petit pour de grandes valeurs de la variable t.

En intégrant ces inégalités nous obtenons

$$r_0\exp[(1-\varepsilon)(\varphi-\varphi_0)]\leqslant r(\varphi)\leqslant r_0\exp[(1+\varepsilon)(\varphi-\varphi_0)] \tag{3.24}$$

pour de grandes valeurs de la variable t. On a donc le

COROLLAIRE 5. *Si les hypothèses du théorème* IV *sont remplies, la fonction* $r(\varphi)$ *est contenue entre les deux spirales logarithmiques* (3.24) *pour de grandes valeurs de la variable* t.

En particulier, si $A(t)\equiv a>0$ ($a=\text{const}$), pour $t\geqslant t_0$, on a

$$r=r_0\exp\left[\sqrt{\frac{a}{2}}(t-t_0)\right],\qquad r^\cdot=r_0\sqrt{\frac{a}{2}}\exp\left[\sqrt{\frac{a}{2}}(t-t_0)\right],$$

$$\varphi=\varphi_0+\sqrt{\frac{a}{2}}(t-t_0)$$

et par conséquent nous obtenons *la spirale logarithmique*

$$r(\varphi)=r_0e^{\varphi-\varphi_0} .$$

§ 4. Nous allons maintenant trouver quelques limitations des fonctions $r, r^\cdot, \varphi, \varphi^\cdot$. Ces limitations sont précisées dans les théorème VI, VII et VIII.

THÉORÈME VI. *Si* $A(t)>0$ *pour* $t\geqslant t_0$ *et si les conditions initiales* $r(t_0)=r_0>0$, $r^\cdot(t_0)=r_0^\cdot>0$, $\varphi^\cdot(t_0)=\varphi_0^\cdot\geqslant 0$ *sont satisfaites, nous avons les inégalités*

$$\frac{1}{t-\tau_0}\leqslant\frac{r^\cdot(t)}{r(t)},\qquad 0<\varphi^\cdot(t)\leqslant\frac{1}{(t-\tau_0)^2}\left[\int_{t_0}^{t}(s-\tau_0)^2A(s)\,ds+\frac{r_0^2}{r_0^{\cdot 2}}\varphi_0^\cdot\right]$$

pour $t>t_0$, *où* $\tau_0=t_0+r_0/r_0^\cdot$.

Démonstration. En utilisant l'équation (3.3), on déduit

$$z'=\varphi^{\cdot 2}-z^2\geqslant -z^2 ,\qquad z=\frac{r^\cdot}{r}, \tag{4.1}$$

or

$$-z^{-2}z'\leqslant 1 ,$$

et en intégrant on tire

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{z_0}\leqslant t-t_0\,,\qquad t>t_0\,,\qquad z_0=\frac{r_0^{\cdot}}{r_0}.$$

Ensuite nous obtenons

$$\frac{r^{\cdot}(t)}{r(t)}\geqslant\frac{1}{t-\tau_0}>0\quad\text{pour}\quad t>t_0\,,\qquad \tau_0=t_0-\frac{r_0}{r_0^{\cdot}}. \tag{4.2}$$

D'après (3.3) et (4.2) il vient

$$\varphi^{\cdot\cdot}+2\frac{1}{t-\tau_0}\varphi^{\cdot}\leqslant A\,,\qquad t>t_0\,, \tag{4.3}$$

puisque $\varphi^{\cdot}(t)>0$ pour $t>t_0$.

En multipliant l'inégalité (4.3) par $(t-\tau_0)^2$ et en intégrant les deux membres, nous obtenons

$$0<\varphi^{\cdot}(t)\leqslant h(t)+\frac{C}{(t-\tau_0)^2}\quad\text{pour}\quad t>t_0\,, \tag{4.4}$$

où nous avons posé

$$h(t)=\frac{1}{(t-\tau_0)^2}\int\limits_{t_0}^{t}(s-\tau_0)^2A(s)\,ds\,,\qquad C=\varphi_0^{\cdot}\frac{r_0^2}{r_0^{\cdot 2}}. \tag{4.5}$$

Le théorème VI est donc démontré.

Remarque. Si $\int\limits_{t_0}^{\infty}A(t)\,dt<\infty$, la fonction $h(t)$ a une propriété analogique à celle de la fonction $g(t)$ considérée plus haut, c'est-à-dire $\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=0$.

THÉORÈME VII. *Si* $A(t)>0$ *pour* $t\geqslant t_0$ *et* $\int\limits_{t_0}^{\infty}t^2A(t)\,dt=\beta<\infty$, *de plus si les conditions initiales* $r(t_0)=r_0>0$, $r^{\cdot}(t_0)=r_0^{\cdot}>0$, $\varphi^{\cdot}(t_0)=\varphi_0^{\cdot}>0$, $t_0=r_0/r_0^{\cdot}$ *sont remplies, on a pour* $t>t_0$

$$r_0^{\cdot}\cdot t\leqslant r(t)\leqslant r_0^{\cdot}\cdot t\cosh\left(\frac{m}{t_0}-\frac{m}{t}\right),$$

$$r_0^{\cdot}\leqslant r^{\cdot}(t)\leqslant r_0^{\cdot}\left(1+\frac{m}{t}\right)\cosh\left(\frac{m}{t_0}-\frac{m}{t}\right),$$

$$\frac{r_0^2\varphi_0^{\cdot}}{[r_0^{\cdot}\cosh(m/t_0-m/t)]^2t^2}\leqslant\varphi^{\cdot}(t)\leqslant\frac{m}{t^2},$$

$$\frac{r_0^2\varphi_0^{\cdot}}{r_0^{\cdot}\cosh^2 m/t_0}\left(\frac{1}{t_0}-\frac{1}{t}\right)\leqslant\varphi(t)\leqslant m\left(\frac{1}{t_0}-\frac{1}{t}\right),$$

où $m=\beta+\varphi_0^{\cdot}\dfrac{r_0^2}{r_0^{\cdot 2}}$.

Démonstration. Posons $t_0 = r_0/\dot{r_0} > 0$ dans (4.5). Or, la fonction $h(t)$ prend la forme

$$h_1(t) = \frac{1}{t^2}\int_{t_0}^{t} s^2 A(s)\,ds \qquad (t > t_0)\,.$$

D'après l'hypothèse $\int_{t_0}^{\infty} t^2 A(t)\,dt = \beta > 0$ nous obtenons les inégalités

$$0 < h_1(t) \leqslant \frac{\beta}{t^2} \qquad (t > t_0)\,,$$

donc en vertu de (4.4) il vient

$$0 < \dot{\varphi}(t) \leqslant \frac{m}{t^2} \qquad (t > t_0)\,,$$

où $m = \beta + \dot{\varphi_0}\dfrac{r_0^2}{\dot{r}_0^2} > 0$ et ensuite en intégrant on obtient

$$\varphi_0 < \varphi(t) \leqslant \varphi_0 + m\left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{t}\right) \qquad (t > t_0 > 0)\,.$$

Considérons maintenant les deux équations différentielles

(1.9) $$\ddot{r}(t) = \dot{\varphi}^2(t)\,r(t)\,,$$

(4.6) $$\ddot{R}(t) = \frac{m^2}{t^4}R$$

et supposons que les conditions initiales

(4.7) $$0 < r_0 \leqslant R(t_0) = R_0\,, \qquad 0 < \dot{r_0} \leqslant \dot{R}(t_0) = \dot{R_0} \qquad \left(\dot{} = \frac{d}{dt}\right).$$

soient remplies. On peut écrire la solution de l'équation (4.6) sous la forme

(4.8) $$R(t) = t\,(C_1 e^{m/t} + C_2 e^{-m/t})\,, \qquad t \geqslant t_0 > 0$$

où

(4.9) $$C_1 = \frac{1}{2m}e^{-m/t_0}\left[R_0\left(1 + \frac{m}{t_0}\right) - \dot{R_0}t_0\right],$$
$$C_2 = -\frac{1}{2m}e^{m/t_0}\left[R_0\left(1 - \frac{m}{t_0}\right) - \dot{R_0}t_0\right].$$

En utilisant les conditions (4.7) et en appliquant le théorème de comparaison des solutions [6], on déduit que

(4.10) $$r(t) \leqslant R(t)\,, \qquad \dot{r}(t) \leqslant \dot{R}(t)\,, \qquad t \geqslant t_0 > 0\,,$$

où la dérivée $\dot{R}(t)$ est de la forme suivante

(4.11) $$\dot{R}(t) = C_1\left(1 - \frac{m}{t}\right)e^{m/t} + C_2\left(1 + \frac{m}{t}\right)e^{-m/t}.$$

---

[6] Voir [8] p. 118.

D'après (4.8) et (4.11) on a

$$\lim_{t\to\infty}\frac{R(t)}{t}=C_1+C_2\,,\qquad \lim_{t\to\infty}R^{\cdot}(t)=C_1+C_2\,.$$

En vertu du théorème I et d'après (4.10) nous obtenons les inégalités

$$\begin{aligned} r_0+r_0^{\cdot}(t-t_0)&\leqslant r(t)\leqslant R(t)\,,\\ r_0^{\cdot}&\leqslant r^{\cdot}(t)\leqslant R^{\cdot}(t)\,.\end{aligned}\qquad (t>t_0)\,,\tag{4.12}$$

Remplacons maintenant les conditions (4.7) par les suivantes $0<r_0=R_0$, $0<r_0^{\cdot}=R_0^{\cdot}$; en tenant compte de (4.9) et $t_0=r_0/r_0^{\cdot}$, on obtient

$$C_1'=\tfrac{1}{2}r_0^{\cdot}e^{-m/t_0}\,,\qquad C_2'=\tfrac{1}{2}r_0^{\cdot}e^{m/t_0}\,,$$

et par conséquent d'après (4.8) et (4.11) on a

$$\begin{aligned} R(t)&=r_0^{\cdot}\cdot t\cosh\left(\frac{m}{t_0}-\frac{m}{t}\right),\\ R^{\cdot}(t)&=r_0^{\cdot}\left[\cosh\left(\frac{m}{t_0}-\frac{m}{t}\right)+\frac{m}{t}\sinh\left(\frac{m}{t_0}-\frac{m}{t}\right)\right]\end{aligned}\tag{4.13}$$

pour $t\geqslant t_0>0$. Lorsque

$$\sinh\left(\frac{m}{t_0}-\frac{m}{t}\right)<\cosh\left(\frac{m}{t_0}-\frac{m}{t}\right)<\cosh\frac{m}{t_0}\qquad (t>t_0)\,,$$

en vertu de (4.12) et (4.13) nous obtenons pour $t>t_0$ les inégalités

$$r_0^{\cdot}\cdot t\leqslant r(t)\leqslant r_0^{\cdot}\cdot t\cosh\left(\frac{m}{t_0}-\frac{m}{t}\right)<\left(r_0^{\cdot}\cosh\frac{m}{t_0}\right)t\,,$$

$$r_0^{\cdot}\leqslant r^{\cdot}(t)\leqslant r_0^{\cdot}\left(1+\frac{m}{t}\right)\cosh\left(\frac{m}{t_0}-\frac{m}{t}\right)<r_0^{\cdot}\left(1+\frac{m}{t_0}\right)\cosh\frac{m}{t_0}\,.$$

D'après (2.9) on aurait

$$\frac{r_0^2\varphi_0^{\cdot}}{r_0^{\cdot 2}(\cosh m/t_0)^2t^2}\leqslant\varphi^{\cdot}(t)\,.$$

Le théorème VII est donc démontré.

Théorème VIII. *Si* $A(t)>0$ *pour* $t>t_0$, $\int\limits_{t_0}^{\infty}A(t)dt=a<\infty$ *et si les conditions initiales*

$$r(t_0)=r_0>0\,,\qquad r^{\cdot}(t_0)=r_0^{\cdot}>0\,,\qquad \varphi^{\cdot}(t_0)=\varphi_0^{\cdot}>0$$

sont remplies, nous avons les inégalités

$$\begin{aligned} r_0+r_0^{\cdot}(t-t_0)\leqslant r(t)&\leqslant r_0\cosh[k(t-t_0)]+\frac{r_0^{\cdot}}{k}\sinh[k(t-t_0)]\,,\\ r_0^{\cdot}\leqslant r^{\cdot}(t)&\leqslant r_0^{\cdot}\cosh[k(t-t_0)]+r_0k\sinh[k(t-t_0)]\,,\\ 0<\varphi^{\cdot}(t)&\leqslant k\end{aligned}$$

pour $t>t_0$, *où* $k=\varphi_0^{\cdot}+a$.

Démonstration. En vertu de (4.7) nous obtenons

$$(4.14) \qquad r_0 + \dot{r_0}(t-t_0) \leqslant r(t)\,, \quad \dot{r_0} \leqslant r^{\cdot}(t) \quad \text{pour} \quad t > t_0\,.$$

On voit immédiatement de (2.4) que

$$0 < \varphi^{\cdot}(t) \leqslant \dot{\varphi_0} + a\,.$$

Posons $k = \dot{\varphi_0} + a > 0$ et considérons les équations différentielles

$$(1.9) \qquad r^{\cdot\cdot}(t) = \varphi^{\cdot 2}(t) r(t)\,,$$

$$(4.15) \qquad \eta^{\cdot\cdot}(t) = k^2 \eta(t)$$

avec les conditions initiales $r_0 = \eta(t_0)$, $\dot{r_0} = \eta^{\cdot}(t_0)$.

La solution générale de l'équation (4.15) est de la forme

$$\eta(t) = \lambda_1 e^{kt} + \lambda_2 e^{-kt}$$

où

$$\lambda_1 = \frac{kr_0 + \dot{r_0}}{2k} e^{-kt_0}\,, \qquad \lambda_2 = \frac{kr_0 - \dot{r_0}}{2k} e^{kt_0}\,.$$

En tenant compte du théorème de comparaison des solutions il s'ensuit que pour $t > t_0$

$$r(t) \leqslant r_0 \cosh[k(t-t_0)] + \frac{\dot{r_0}}{k} \sinh[k(t-t_0)]\,,$$

$$r^{\cdot}(t) \leqslant \dot{r_0} \cosh[k(t-t_0)] + r_0 k \sinh[k(t-t_0)]\,.$$

Le théorème VIII est donc démontré.

§ 5. Nous étudierons maintenant les propriétés de la fonction $r(t)$,

$$r(t_0) = r_0 > 0\,, \quad r^{\cdot}(t_0) = \dot{r_0} < 0\,, \quad \varphi^{\cdot}(t_0) = \dot{\varphi_0} > 0\,.$$

Nous supposerons dans la suite que $A(t) > 0$ pour $t \geqslant t_0$. En vertu de l'équation (1.9) nous obtenons $r^{\cdot\cdot}(t) > 0$ pour $t > t_0$, lorsque $r(t) > 0$ pour $t > t_0$. La dérivée $r^{\cdot}(t)$ est donc une fonction croissante lorsque $r(t) > 0$.

Considérons tous les cas possibles:

1) Il existe un point $t = T > t_0$ tel que dans l'intervalle $t_0 \leqslant t < T$ on a $r(t) > 0$, $r^{\cdot}(t) < 0$, $r^{\cdot\cdot}(t) > 0$ et $r(T) > 0$, $r^{\cdot}(T) = 0$, $r^{\cdot\cdot}(T) > 0$.

Si $r(T) > 0$, $r^{\cdot}(T) = 0$, la fonction $r(t)$ possède les propriétés démontrées au § 2.

2) Le cas $r(T) = 0$, $r^{\cdot}(T) = 0$ n'est pas possible, car nous ne nous occupons pas de la solution triviale $r(t) \equiv 0$ pour $t > T$.

3) Soit $r(t) > 0$, $r^{\cdot}(t) < 0$ pour $t_0 \leqslant t < T < \infty$, $r(T) = 0$, $r^{\cdot}(T) < 0$, $\varphi^{\cdot}(t_0) > 0$. D'après (1.11) on a donc

$$(5.1) \qquad \varphi^{\cdot}(t) \geqslant \frac{c}{r^2(t)} \quad (t_0 \leqslant t < T)\,,$$

où $c = \varphi^{\cdot}(t_0)r^2(t_0) > 0$. En tenant compte de l'équation (1.9) et de l'inégalité (5.1) nous obtenons

$$r^{\cdot\cdot}(t) = \varphi^{\cdot 2}(t)r(t) \geqslant \frac{c^2}{r^3(t)} \qquad (t_0 \leqslant t < T)\,.$$

En multipliant l'inégalité

$$r^{\cdot\cdot}(t) \geqslant \frac{c^2}{r^3(t)} \qquad (t_0 \leqslant t < T)$$

par $2r^{\cdot}(t)$ et en intégrant l'inégalité ainsi obtenue, nous avons

$$r^{\cdot 2}(t) + \frac{c^2}{r^2(t)} \leqslant r^{\cdot 2}(t_0) + \frac{c^2}{r^2(t_0)} \tag{5.2}$$

pour $t_0 \leqslant t < T$, d'où il vient que $r(t)$ ne tend pas vers zéro lorsque $t \to T$. Nous aboutissons ainsi à une contradiction.

4) Enfin soit $r(t) > 0$, $r^{\cdot}(t) < 0$ pour $t \geqslant t_0$, $\varphi^{\cdot}(t_0) > 0$. En appliquant le même raisonnement que dans le cas 3) nous arrivons à la conclusion que l'inégalité (5.2) a lieu pour $t \geqslant t_0$ et par conséquent $r(t)$ ne tend pas vers zéro lorsque $t \to \infty$.

D'autre part $r(t)$ est une fonction décroissante et alors il existerait $\lim\limits_{t\to\infty} r(t) = \varrho$ $(0 < \varrho < \infty)$. Dans le cas $r^{\cdot}(t) < 0$ pour $t \geqslant t_0$ en vertu de (3.22) on aurait

$$\varphi^{\cdot\cdot}(t) = A - 2\frac{r^{\cdot}}{r}\varphi^{\cdot} > 0 \qquad \text{pour} \qquad t \geqslant t_0$$

et par conséquent $\varphi^{\cdot}(t) > \varphi^{\cdot}(t_0) = \varphi_0^{\cdot} > 0$ pour $t > t_0$ d'où

$$\int_{t_0}^{t} \varphi^{\cdot 2}(s)\,ds \geqslant \varphi_0^{\cdot 2}\cdot(t - t_0) \qquad (t > t_0)\,.$$

D'après (1.9) on a

$$r^{\cdot\cdot}(t) = \varphi^{\cdot 2}(t)r(t) \geqslant \varrho\cdot\varphi^{\cdot 2}(t)$$

et en intégrant on obtient

$$r^{\cdot}(t) - r_0^{\cdot} \geqslant \varrho\int_{t_0}^{t} \varphi^{\cdot 2}(s)\,ds \geqslant \varrho\cdot\varphi_0^{\cdot 2}(t - t_0)$$

pour $t > t_0$, d'où $\lim\limits_{t\to\infty} r(t) = \infty$. Nous obtenons une contradiction. Le cas 4) est donc impossible.

En récapitulant nous pouvons énoncer la proposition suivante:

Théorème IX. *Si $A(t) > 0$ pour $t \geqslant t_0$ et si les conditions initiales $r(t_0) = r_0 > 0$, $r^{\cdot}(t_0) = r_0^{\cdot} < 0$, $\varphi^{\cdot}(t_0) = \varphi_0^{\cdot} > 0$ sont remplies, on a $r(t) > 0$ pour $t > t_0$ et $\lim\limits_{t\to\infty} r(t) = \infty$. Il n'existe pas de fonction $r(t)$ telle qu' on ait $r^{\cdot}(t) < 0$ pour $t > t_1 \geqslant t_0$.*

En utilisant les formules (0.3) et les résultats obtenus aux §§ 4 et 5 nous pouvons préciser les corollaires concernant le mouvement du point P.

Du théorème VII résulte immédiatement le

COROLLAIRE 6. *Si* $A(t) > 0$ *pour* $t \geqslant t_0$, $\int_{t_0}^{\infty} t^2 A(t)\,dt = \beta < \infty$ *et si les conditions initiales* $r_0 > 0$, $\dot{r_0} > 0$, $\dot{\varphi_0} > 0$ *sont remplies, on a pour* $t > t_0$, $t_0 = \frac{r_0}{\dot{r_0}} > 0$ *les inégalités suivantes*

$$\dot{r_0} \leqslant v_r \leqslant \dot{r_0}\left(1+\frac{m}{t}\right)\cosh\left(\frac{m}{t_0}-\frac{m}{t}\right),$$

$$\frac{r_0^2\dot{\varphi_0}}{\dot{r_0}[\cosh(m/t_0-m/t)]^2} \leqslant t\cdot v_\varphi \leqslant m\dot{r_0}\cosh\left(\frac{m}{t_0}-\frac{m}{t}\right),$$

$$a_r \equiv 0\,, \qquad \dot{r_0} \leqslant \frac{a_\varphi}{t\cdot A(t)} \leqslant \dot{r_0}\cosh\left(\frac{m}{t_0}-\frac{m}{t}\right),$$

où $m = \beta + \dot{\varphi_0}\frac{r_0^2}{\dot{r_0}^2}$.

Du théorème VIII on déduit le

COROLLAIRE 7. *Si* $A(t) > 0$ *pour* $t \geqslant t_0$, $\int_{t_0}^{\infty} A(t)\,dt = a < \infty$ *et* $r_0 > 0$, $\dot{r_0} > 0$, $\dot{\varphi_0} > 0$, *on a pour* $t > t_0$ *les inégalités*

$$0 < \dot{r_0} \leqslant v_r \leqslant C\cosh[k(t-t_0)]\,,$$

$$0 < v_\varphi = r\dot{\varphi} \leqslant C\cosh[k(t-t_0)]\,,$$

où $t > t_0$; $k = \dot{\varphi_0} + a > 0$, $C = kr_0 + \dot{r_0} > 0$.

D'après le théorème IX nous obtenons le

COROLLAIRE 8. *Si* $A(t) > 0$ *pour* $t \geqslant t_0$ *et si les conditions initiales* $r(t_0) > 0$, $\dot{r}(t_0) < 0$; $\dot{\varphi}(t_0) > 0$ *sont satisfaites, il n'existe pas de fonction* $r(t)$ *telle qu' on ait* $v_r = \dot{r}(t) < 0$ *pour* t *suffisamment grand.*

Reçu par la Rédaction le 20. 2. 1962