INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

DISSERTATIONES MATHEMATICAE

(ROZPRAWY MATEMATYCZNE)

KOMITET REDAKCYJNY
KAROL BORSUK redaktor
BOGDAN BOJARSKI, ANDRZEJ MOSTOWSKI,
MARCELI STARK, STANISŁAW TURSKI

LXV

WOLFGANG METZLER

Diffeomorphismen zwischen Produkten mit dreidimensionalen Linsenräumen als Faktoren

WARSZAWA 1969
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

5.7133

COPYRIGHT 1969
by
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA (POLAND), ul. Miodowa 10

All Rights Reserved

No part of this book may be translated or reproduced in any form, by mimeograph or any other means, without permission in writing from the publishers.

BIBLIOTEKA UNIWERSYTECKA WARSZAWIE 1816

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung 5
2. Dreidimensionale Linsenräume 7
3. Die Hopf'sche Abbildung 9
4. Produkte mit dreidimensionalen Linsenräumen und 2-Sphären als Faktoren 9
5. Kalkül der homogenen Funktionen und Homogenitätstransformationen . 12
6. Diffeomorphismen zwischen Produkten mit dreidimensionalen Linsenräumen als Faktoren 17
7. Diffeomorphismen zwischen Produkten mit dreidimensionalen Linsenräumen und zweidimensionalen Sphären als Faktoren 32
8. Folgerungen aus den Abschnitten 6 und 7 49
9. Lokal-triviale Faserbündel 51
10. Anhang (Beziehungen zur h-Cobordismentheorie, Primfaktorzerlegung von Mannigfaltigkeiten) 55

Literaturverzeichnis 60

1. Einleitung

In seiner Arbeit über die Widerlegung der Hauptvermutung hat Milnor [12] h-Cobordismen zwischen $S^n \times L_m(r)$ und $S^n \times L_m(r')$ für $n \geqslant 2$ und homotop-äquivalente Linsenräume $L_m(r)$, $L_m(r')$ angegeben. Sind dabei $L_m(r)$ und $L_m(r')$ nicht homöomorph, so kann, für gerade n, $S^n \times \times L_m(r)$ von $S^n \times L_m(r')$ durch die Franz-Reidemeister-Torsion [5], [18] kombinatorisch und differenzierbar unterschieden werden, da die Eulersche Charakteristik $\chi(S^n) = 2$ als Exponent bei der jeweiligen Linsenraumtorsion die Torsion von $S^n \times L_m(r)$ bzw. $S^n \times L_m(r')$ ergibt [12]. Bisher was jedoch nicht bekannt, was für ungerade n eintritt. In dieser Arbeit soll der Fall $n = 3$ behandelt werden. Wir werden zeigen, daß sogar für beliebige $L_m(r)$, $L_m(r')$, also auch solche, die nicht zum gleichen Homotopietyp gehören, $S^3 \times L_m(r)$ und $S^3 \times L_m(r')$ diffeomorph sind (Satz 1 und (41)). Dies ist ein Spezialfall des allgemeineren Resultates, daß für mindestens zwei Faktoren $L_{m_1}(r_1) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s)$ und $L_{m_1'}(r_1') \times \times \ldots \times L_{m_s'}(r_s')$ in einer großen Anzahl von Fällen genau dann diffeomorph sind, wenn

$$\pi_1\big(L_{m_1}(r_1) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s)\big) \approx \pi_1\big(L_{m_1'}(r_1') \times \ldots \times L_{m_s'}(r_s')\big) \tag{1}$$

gilt (s. z. B. Satz 15).

Die Beweise führen wir jeweils dadurch, daß wir Diffeomorphismen in den universellen Überlagerungen — Produkten aus 3-Sphären — konstruieren, welche die Äquivalenzklassen bezüglich des einen Grundraumes eineindeutig auf diejenigen bezüglich des anderen abbilden (Hilfssatz 1). Wesentlich ist dabei der in (31), Hilfssatz 2 und (33) angegebene Elementarprozeß, der die Koordinaten mischt. Er benutzt die durch die Quaternionenmultiplikation gegebene Liegruppenstruktur auf S^3 und macht solche Diffeomorphismen zwischen Linsenraumprodukten möglich, die nicht bereits trivialerweise durch Vertauschung der Faktoren oder Ersetzung eines Linsenraumes durch einen diffeomorphen gemäß (7) entstehen.

Die bei (1) gemachten Einschränkungen fordern i.a. die Teilerfremdheit gewisser m_i und, daß ein $L_{m_i}(r_i)$ zu $L_{m_i}(1)$ diffeomorph ist. Ob diese Einschränkungen nur durch die in dieser Arbeit verwendete Konstruktionsmethode bedingt sind oder ob sie sich durch geeignete Invarianten als notwendig erweisen lassen, wird hier nicht untersucht,

da wir vornehmlich konstruktiv vorgehen und hinreichende Bedingungen für Diffeomorphie aufstellen werden. Die Liste der nach unserer Methode konstruierbaren Diffeomorphismen kann dabei sicherlich noch vergrößert werden.

$L_m(1)$ ist der Quotientenraum von S^3 nach einer endlichen Untergruppe. Wir behandeln ferner in Abschnitt 7 einige Fälle, bei denen 2-Sphären als Faktoren auftreten. Die Analogie der Beweismethode ergibt sich, da S^2 der Quotientenraum von S^3 nach der kontinuierlichen Untergruppe S^1 ist. Falls (1) ohne Einschränkungen gilt, sind die betreffenden Sätze 9 bis 14 jedoch unnötig.

$L_m(1)$ ist der Totalraum eines lokal-trivialen 1-Sphärenbündels über S^2. Daher sind $L_{m_1}(1) \times L_{m_2}(1)$ und $S^3 \times L_{m_1 \cdot m_2}(1)$ Totalräume von lokal-trivialen Faserbündeln über $S^2 \times S^2$ mit $S^1 \times S^1$ als Faser. Für $(m_1, m_2) = 1$ sind sie nach Satz 1 diffeomorph. In Abschnitt 9 wird gezeigt, daß sie, außer in dem trivialen Fall, in welchem mindestens ein m_i den Wert 1 hat, trotzdem nicht fasertreu homöomorph sind. Dabei verwenden wir das Ergebnis von Hopf [7] über die partiellen Abbildungen eines Produktes $S^2 \times S^2 \to S^2$.

Die Punkte A) und B) des Anhangs betreffen Beziehungen dieser Arbeit zur h-Cobordismentheorie; in C) werden die in den Abschnitten 7 und 8 konstruierten Diffeomorphismen zwischen Produkten aus dreidimensionalen Linsenräumen und 2-Sphären unter dem Gesichtspunkt der Primfaktorzerlegung einer Mannigfaltigkeit bezüglich des topologischen Produktes betrachtet. Sie erweist sich als nicht einmal „bis auf Homotopie" eindeutig. Zu diesem Zweck wird in Satz 17 gezeigt, daß Sphären — und folglich auch die von ihnen überlagerten Linsenräume — bezüglich des topologischen Produktes prim sind.

Abgesehen vom Anhang werden wir nur geschlossene (d. h. kompakte und randlose) Mannigfaltigkeiten verwenden. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten, differenzierbare Abbildungen und Diffeomorphismen sind stets von der Klasse C^∞. Alle Begriffsbildungen der Differentialtopologie, die wir benötigen (z. B. Rang einer differenzierbaren Abbildung, C^1-Triangulation), sind bei Munkres [15] erklärt.

Für Diffeomorphie bei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und Isomorphie bei Gruppen benutzen wir das Zeichen $\approx$, für kombinatorische Äquivalenz bei Simplizialkomplexen und Kongruenzen das Zeichen $\equiv$; $\sim$ heiße homöomorph und $\simeq$ homotop-äquivalent.

In einer weiteren Arbeit sollen Diffeomorphismen zwischen Produkten mit höherdimensionalen Linsenräumen sowie Quotientenmannigfaltigkeiten von unitären und symplektischen Gruppen als Faktoren konstruiert werden. Dabei wird sich zugleich zeigen, daß das Verfahren (31) zur Gewinnung koordinatenmischender Diffeomorphismen nicht nur im Falle der Quaternionenmultiplikation auf S^3 brauchbar ist.

2. Dreidimensionale Linsenräume

R^4 sei als Menge der geordneten Paare komplexer Zahlen gegeben und S^3 derjenige Teilraum, der aus allen Punkten $[z_1, z_2] \in R^4$ mit $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ besteht. Für $[x_1 + iy_1, x_2 + iy_2] = [z_1, z_2] \in S^3$ ist mindestens eine reelle Koordinate von Null verschieden. Die drei übrigen lassen sich als lokale Koordinaten einer Umgebung von $[z_1, z_2]$ wählen. Durch dieses System lokaler Koordinaten wird S^3 zu einer

(2) dreidimensionalen differenzierbaren Untermannigfaltigkeit des R^4.

Sei m eine natürliche Zahl und G_m die zu Z_m isomorphe Gruppe der m-ten komplexen Einheitswurzeln. Ordnen wir jedem $\sigma \in G_m$ die Abbildung $\{\sigma\}\colon S^3 \to S^3$ vermöge

$$\{\sigma\}[z_1, z_2] = [\sigma \cdot z_1, \sigma^r \cdot z_2] \tag{3}$$

zu, wobei r eine zu m relativ prime ganze Zahl ist, d. h.

$$(r, m) = 1 \tag{4}$$

gilt, so bilden die $\{\sigma\}$ eine

(5) endliche Untergruppe G aller Diffeomorphismen von S^3 auf sich, bei welcher nur die Identität Fixpunkte hat.

(Die Differenzierbarkeit der $\{\sigma\}$ und ebenso diejenige von $\{\sigma\}^{-1} = \{\sigma^{-1}\}$ folgt, da $\{\sigma\}$ die Einschränkung einer Funktion $R^4 \to R^4$ ist, deren reelle Koordinatenfunktionen Polynome sind, welche folglich differenzierbare Übergänge für die in S^3 eingeführten lokalen Koordinaten vermitteln.) Es gilt $G \approx G_m$ $(\approx Z_m)$.

Definition 1. Der Quotientenraum S^3/G werde als *Linsenraum* $L_m(r)$ zum *Modul* m mit der *Verdrillungszahl* r bezeichnet.

Die Projektion $p\colon S^3 \to L_m(r)$ ist wegen (5) und $\pi_1(S^3) \approx 0$ eine universelle Überlagerung mit G als Deckbewegungsgruppe, so daß $\pi_1(L_m(r)) \approx G$ $(\approx G_m \approx Z_m)$ gilt. Da die Elemente von G Diffeomorphismen sind, läßt sich $L_m(r)$ zu einer dreidimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit machen derart, daß

(6) p differenzierbar und überdies lokal diffeomorph ist.

(Im Falle $m = 1$ sind die Äquivalenzklassen von S^3 bezüglich G einpunktig, d.h. wir erhalten: $L_1(r) = S^3$; $p\colon S^3 \to L_1(r)$ ist der identische Diffeomorphismus.)

Nach Franz [5], Reidemeister [18], de Rham [19] und Moise [14] oder Bing [1] oder Brody [4] sind für $L_m(r)$ und $L_{m'}(r')$ die folgenden Aussagen gleichwertig:

(7) a) $L_m(r) \approx L_{m'}(r')$;

b) $L_m(r) \equiv L_{m'}(r')$;

c) $L_m(r) \sim L_{m'}(r')$;

d) es gilt $m = m'$ und $r \equiv \pm r'$ mod m oder $r \cdot r' \equiv \pm 1$ mod m.

Dabei bezieht sich b) auf beliebige Triangulationen. C^1-Triangulationen sind bei Franz [5] und Milnor [12], [13] für Linsenräume explizit angegeben.

(8) $L_m(r)$ und $L_{m'}(r')$ gehören nach Franz [6] und Olum [16] genau dann zum gleichen Homotopietyp, wenn $m = m'$ gilt und $\pm r \cdot r'$ quadratischer Rest mod m ist.

Paare komplexer Zahlen $[z_1, z_2]$ fassen wir im folgenden auch als Quaternionen auf. $[z_1, z_2] = [x_1 + iy_1, x_2 + iy_2]$ entspreche dabei der üblichen Schreibweise $x_1 + iy_1 + jx_2 + ky_2$. Dann ergibt sich für das Produkt zweier Quaternionen

$$[z_1, z_2] \cdot [w_1, w_2] = [z_1 \cdot w_1 - z_2 \cdot \overline{w}_2, z_1 \cdot w_2 + z_2 \cdot \overline{w}_1] \tag{9}$$

und das zu $[z_1, z_2]$ konjugierte Quaternion als $[\bar{z}_1, -z_2]$.

Ist z eine komplexe Zahl und q ein Quaternion, so definieren wir $z \cdot q = [z, 0] \cdot q$, $q \cdot z = q \cdot [z, 0]$, d.h. wir multiplizieren q mit dem Bild von z unter dem Einbettungsisomorphismus der komplexen Zahlen auf den Teilkörper der Quaternionen mit verschwindender z_2-Koordinate vermöge $z \to [z, 0]$.

Mit $q = [z_1, z_2]$ folgt aus (9)

$$z \cdot q = [z \cdot z_1, z \cdot z_2], \qquad q \cdot z = [z \cdot z_1, \bar{z} \cdot z_2] \tag{10}$$

sowie die Gültigkeit des Assoziativgesetzes $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ unabhängig davon, welche der Faktoren komplex oder quaternionisch sind.

S^3 ergibt sich nun als Menge der Quaternionen q mit

$$|q| = 1. \tag{11}$$

Zu $p\colon S^3 \to L_m(r)$ gibt es ganze Zahlen a, b mit

$$a + b \equiv 1 \text{ mod } m, \qquad a - b \equiv r \text{ mod } m. \tag{12}$$

(Ist m gerade, so ist r wegen (4) ungerade. Dann sind $a = \frac{1}{2}(1+r)$, $b = \frac{1}{2}(1-r)$ ganze Zahlen, die $a + b = 1$, $a - b = r$, also erst recht (12) erfüllen. Ist m ungerade, so gibt es eine ganze Zahl t mit $2t \equiv 1$ mod m. Dann haben $a = t(1+r)$, $b = t(1-r)$ wegen $a + b = 2t \equiv 1$ mod m und $a - b = 2t \cdot r \equiv r$ mod m die verlangte Eigenschaft. Für $L_m(1)$ ist

$$a = 1, \qquad b = 0 \tag{13}$$

möglich.)

Sind a, b gemäß (12) für $L_m(r)$ gegeben, so sind $q, q^* \in S^3$ bezüglich G genau dann äquivalent (d.h. $p(q) = p(q^*)$), wenn es ein $\sigma \in G_m$ mit

(14) $$q^* = \sigma^a \cdot q \cdot \sigma^b$$

gibt, denn es gilt für $q = [z_1, z_2]$

(15) $$\sigma^a \cdot q \cdot \sigma^b = \sigma^a \cdot [z_1, z_2] \cdot \sigma^b \overset{(10)}{=} [\sigma^{a+b} \cdot z_1, \sigma^{a-b} \cdot z_2]$$
$$\overset{(12)}{=} [\sigma \cdot z_1, \sigma^r \cdot z_2] \overset{(3)}{=} \{\sigma\}[z_1, z_2] = \{\sigma\}(q).$$

3. Die Hopf'sche Abbildung

R^3 sei als Menge der geordneten Tripel reeller Zahlen gegeben und S^2 derjenige Teilraum, der aus allen Punkten $[x_1, x_2, x_3] \in R^3$ mit $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ besteht. Analog zu (2) ist S^2 eine

(16) zweidimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit des R^3.

Sei $q \in S^3$ ein beliebiger Punkt. Dann ist $\bar{q} \cdot i \cdot q$ wegen $|\bar{q} \cdot i \cdot q| \overset{(11)}{=} |\bar{q}||[i, 0]| \cdot |q| = 1$ ein Punkt $\bar{q} \cdot i \cdot q = [x_1 + iy_1, x_2 + iy_2]$ aus S^3. Wegen $\overline{\bar{q} \cdot i \cdot q} = \bar{q} \cdot \overline{[i, 0]} \cdot q \overset{(9)}{=} \bar{q} \cdot [-i, 0] \cdot q = -\bar{q} \cdot i \cdot q$ gilt $x_1 = 0$. $[y_1, x_2, y_2]$ liegt daher in S^2 und wir definieren die Hopf'sche Abbildung $h: S^3 \to S^2$ vermöge $h(q) = [y_1, x_2, y_2]$ (vergl. Steenrod [20], S. 115).

Als Einschränkung einer Funktion $R^4 \to R^3$ mit reellen polynomialen Koordinatenfunktionen ist h analog zu (5) differenzierbar.

S^1 sei die Menge der komplexen Zahlen z mit $|z| = 1$, die analog zu (2) und (16) eine eindimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit des R^2 ist. Für $q, q^* \in S^3$ gilt $h(q) = h(q^*)$ genau dann, wenn für ein $z \in S^1$

(17) $$q^* = z \cdot q$$

erfüllt ist. Ferner

(18) ist h epimorph und hat in jedem Punkt $q \in S^3$ den Rang 2.

4. Produkte mit dreidimensionalen Linsenräumen und 2-Sphären als Faktoren

$p_i: S_i^3 \to L_{m_i}(r_i)$; $i = 1, \ldots, s$, $s \geqslant 1$ seien Linsenraumprojektionen. Ferner seien $t \geqslant 0$ Exemplare der Hopf'schen Abbildung $h_j: S_j^3 \to S_j^2$; $j = 1, \ldots, t$ gegeben. Mit den Faktorabbildungen ist auch

$[h_1, \ldots, h_t, p_1, \ldots, p_s]$:

$$S_1^3 \times \ldots \times S_t^3 \times S_1^3 \times \ldots \times S_s^3 \to S_1^2 \times \ldots \times S_t^2 \times L_{m_1}(r_1) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s)$$

eine differenzierbare Abbildung und epimorph. Aus (6) und (18) folgt, daß

(19) $[\Pi h_j, \Pi p_i]$ in jedem Punkt der Urbildmannigfaltigkeit den Rang $2t+3s$ hat, welcher der Dimension der Bildmannigfaltigkeit gleich ist.

Für $t = 0$ ist insbesondere

(20) Πp_i lokal diffeomorph und eine universelle Überlagerung.

Sind zu $L_{m_i}(r_i)$ gemäß (12) jeweils a_i, b_i gewählt, so folgt aus (14) und (17), daß

$$[\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_t, q_1, \ldots, q_s],\ [\tilde{q}_1^*, \ldots, \tilde{q}_t^*, q_1^*, \ldots, q_s^*] \in \Pi S_j^3 \times \Pi S_i^3$$

genau dann dasselbe Bild unter $[\Pi h_j, \Pi p_i]$ haben, wenn es ein

$$[z_1, \ldots, z_t, \sigma_1, \ldots, \sigma_s] \in \Pi S_j^1 \times \Pi G_{m_i}$$

gibt mit

(21) $[\tilde{q}_1^*, \ldots, \tilde{q}_t^*, q_1^*, \ldots, q_s^*] = [z_1 \cdot \tilde{q}_1, \ldots, z_t \cdot \tilde{q}_t, \sigma_1^{a_1} \cdot q_1 \cdot \sigma_1^{b_1}, \ldots, \sigma_s^{a_s} \cdot q_s \cdot \sigma_s^{b_s}]$.

Definition 2. Gegeben sei eine differenzierbare Funktion

$$f\colon S_1^3 \times \ldots \times S_s^3 \to S_1^3 \times \ldots \times S_{s'}^3; \qquad s \geqslant 1,\ s' \geqslant 1.$$

Ferner sei eine Menge A sowie Abbildungen

$$g\colon A \to S_1^1 \times \ldots \times S_{2s}^1; \qquad g'\colon A \to S_1^1 \times \ldots \times S_{2s'}^1$$

mit den Koordinatenfunktionen $\varphi_1, \psi_1, \ldots, \varphi_s, \psi_s$ bzw. $\varphi_1', \psi_1', \ldots, \varphi_{s'}', \psi_{s'}'$ (d. h. $g(a) = [\varphi_1(a), \psi_1(a), \ldots, \varphi_s(a), \psi_s(a)]$, $g'(a) = [\varphi_1'(a), \psi_1'(a), \ldots, \varphi_{s'}'(a), \psi_{s'}'(a)]$ $\forall a \in A$) gegeben. Wenn dann für beliebige $[q_1, \ldots, q_s] \in S_1^3 \times \ldots \times S_s^3$ (mit $f[q_1, \ldots, q_s] \overset{\text{def}}{=} [q_1', \ldots, q_{s'}']$) und alle $a \in A$ folgt:

$$f[\varphi_1(a) \cdot q_1 \cdot \psi_1(a), \ldots, \varphi_s(a) \cdot q_s \cdot \psi_s(a)]$$
$$= [\varphi_1'(a) \cdot q_1' \cdot \psi_1'(a), \ldots, \varphi_{s'}'(a) \cdot q_{s'}' \cdot \psi_{s'}'(a)],$$

dann möge f eine *homogene Funktion vom Typ*

$$[\varphi_1 \circ \psi_1, \ldots, \varphi_s \circ \psi_s] \dashrightarrow [\varphi_1' \circ \psi_1', \ldots, \varphi_{s'}' \circ \psi_{s'}']$$

heißen. Ist f überdies ein Diffeomorphismus (in diesem Fall ist notwendig $s = s'$ erfüllt), so möge f eine *Homogenitätstransformation vom Typ*

$$[\varphi_1 \circ \psi_1, \ldots, \varphi_s \circ \psi_s] \to [\varphi_1' \circ \psi_1', \ldots, \varphi_s' \circ \psi_s']$$

genannt werden. A werde als *Parameterbereich* bezeichnet.

Mit dieser Definition formulieren wir den folgenden Hilfssatz 1. Er beschreibt, daß ein Diffeomorphismus von $\Pi S_j^3 \times \Pi S_i^3$ auf sich, welcher eine geeignete Homogenitätseigenschaft hat, sich zu einem Diffeomorphismus von $\Pi S_j^2 \times \Pi L_{m_i}(r_i)$ nach $\Pi S_j^2 \times \Pi L_{m_i'}(r_i')$ durchdrückt.

HILFSSATZ 1. *p_i: $S_i^3 \to L_{m_i}(r_i)$, p_i': $S_i^3 \to L_{m_i'}(r_i')$; $i = 1, \ldots, s$, $s \geqslant 1$ seien gegeben; a_i, b_i bzw. a_i', b_i' seien zu $L_{m_i}(r_i)$ bzw. $L_{m_i'}(r_i')$ gemäß* (12) *gewählt. Ferner seien $t \geqslant 0$ Exemplare der Hopf'schen Abbildung h_j: $S_j^3 \to S_j^2$; $j = 1, \ldots, t$ gegeben. Dann ist für die Existenz eines Diffeomorphismus zwischen $\Pi S_j^2 \times \Pi L_{m_i}(r_i)$ und $\Pi S_j^2 \times \Pi L_{m_i'}(r_i')$ hinreichend, daß*

1) *eine Homogenitätstransformation f vom Typ*

$$[z_1 \circ 1, \ldots, z_t \circ 1, \sigma_1^{a_1} \circ \sigma_1^{b_1}, \ldots, \sigma_s^{a_s} \circ \sigma_s^{b_s}]$$
$$\to [z_1 \circ 1, \ldots, z_t \circ 1, \varphi_1' \circ \psi_1', \ldots, \varphi_s' \circ \psi_s'] \,\mathrm{V}\, [z_1, \ldots, z_t, \sigma_1, \ldots, \sigma_s]$$
$$\in \Pi S_j^1 \times \Pi G_{m_i} \overset{\text{def}}{=} A$$

existiert, für welche $[\varphi_1', \psi_1', \ldots, \varphi_s', \psi_s']$ stets Werte der Form

$$[\sigma_1'^{a_1'}, \sigma_1'^{b_1'}, \ldots, \sigma_s'^{a_s'}, \sigma_s'^{b_s'}]$$

mit einem jeweils geeigneten $[\sigma_1', \ldots, \sigma_s'] \in \Pi G_{m_i'}$ annimmt, und

2) *$m_1 \cdot \ldots \cdot m_s = m_1' \cdot \ldots \cdot m_s'$ gilt.*

Aus den Voraussetzungen 1) *und* 2) *folgt genauer, daß sich das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \Pi S_j^3 \times \Pi S_i^3 & \xrightarrow{\;f\;} & \Pi S_j^3 \times \Pi S_i^3 \\ \downarrow{\scriptstyle [\Pi h_j, \Pi p_i]} & & \downarrow{\scriptstyle [\Pi h_j, \Pi p_i']} \\ \Pi S_j^2 \times \Pi L_{m_i}(r_i) & & \Pi S_j^2 \times \Pi L_{m_i'}(r_i') \end{array} \tag{22}$$

durch einen Diffeomorphismus

$$g\colon \Pi S_j^2 \times \Pi L_{m_i}(r_i) \to \Pi S_j^2 \times \Pi L_{m_i'}(r_i')$$

kommutativ ergänzen läßt. Die Abbildung g ist dabei durch die Forderung der Kommutativität eindeutig bestimmt.

Beweis. Aus 1) folgt nach (21) und Definition 2, daß f ein Diffeomorphismus ist, der

(23) bezüglich $[\Pi h_j, \Pi p_i]$ äquivalente Punkte in bezüglich $[\Pi h_j, \Pi p_i']$ äquivalente überführt.

1) und 2) haben wegen der Monomorphie von f zur Folge, daß f sogar jede Äquivalenzklasse auf eine vollständige Äquivalenzklasse abbildet. Daher ist auch f^{-1} eine Abbildung, die

(24) bezüglich $[\Pi h_j, \Pi p_i']$ äquivalente Punkte in bezüglich $[\Pi h_j, \Pi p_i]$ äquivalente überführt.

Aus (23) und (24) und der Epimorphie der senkrechten Abbildungen in dem Diagramm (22) folgt, daß es sich durch genau eine 1:1 Abbildung g kommutativ ergänzen läßt. Wir zeigen jetzt noch die Differenzierbarkeit von g; diejenige von g^{-1} folgt analog:

Sei $x \in \Pi S_j^2 \times \Pi L_{m_i}(r_i)$ ein beliebiger Punkt. Wegen der Epimorphie von $[\Pi h_j, \Pi p_i]$ und der Rangeigenschaft (19) existiert nach dem Satz über die Umkehrbarkeit eines Systems differenzierbarer Funktionen aus der reellen Analysis eine offene Umgebung $U(x)$ sowie eine differenzierbare Abbildung φ: $U(x) \to \Pi S_j^3 \times \Pi S_i^3$ derart, daß

(25) $[\Pi h_j, \Pi p_i]\varphi$ jeden Punkt von $U(x)$ auf sich selbst abbildet.

Aus der Differenzierbarkeit von φ, f und $[\Pi\, h_j, \Pi p_i']$ folgt dann, daß

$$g \mid U(x) = g[\Pi h_j, \Pi p_i]\varphi = [\Pi h_j, \Pi p_i']f\varphi$$

differenzierbar ist (das zweite Gleichheitszeichen folgt aus der Kommutativitätseigenschaft von g). g ist also bei x differenzierbar und damit überhaupt, da x ein beliebiger Punkt des Definitionsbereiches war, q.e.d.

5. Kalkül der homogenen Funktionen und Homogenitätstransformationen

Aus Definition 2 ergeben sich einige Folgerungen, die wir als Elementarprozesse kalkülmäßig verwenden werden.

(26) *Richtungsumkehrung.* Ist f eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$[\varphi_1 \circ \psi_1, \ldots, \varphi_s \circ \psi_s] \to [\varphi_1' \circ \psi_1', \ldots, \varphi_s' \circ \psi_s'],$$

so ist f^{-1} eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$[\varphi_1' \circ \psi_1', \ldots, \varphi_s' \circ \psi_s'] \to [\varphi_1 \circ \psi_1, \ldots, \varphi_s \circ \psi_s].$$

(Hierdurch wird die Bezeichnung „Homogenitätstransformation" motiviert.)

(27) *Komposition.* Ist f eine homogene Funktion vom Typ

$$[\varphi_1 \circ \psi_1, \ldots, \varphi_s \circ \psi_s] \dashrightarrow [\varphi_1' \circ \psi_1', \ldots, \varphi_{s'}' \circ \psi_{s'}']$$

und f' eine homogene Funktion vom Typ

$$[\varphi_1' \circ \psi_1', \ldots, \varphi_{s'}' \circ \psi_{s'}'] \dashrightarrow [\varphi_1'' \circ \psi_1'', \ldots, \varphi_{s''}'' \circ \psi_{s''}''],$$

so ist $f'f$ eine homogene Funktion vom Typ

$$[\varphi_1 \circ \psi_1, \ldots, \varphi_s \circ \psi_s] \dashrightarrow [\varphi_1'' \circ \psi_1'', \ldots, \varphi_{s''}'' \circ \psi_{s''}''].$$

Der analoge Sachverhalt gilt für Homogenitätstransformationen.

(28) *Verlängern.* Ist f eine homogene Funktion vom Typ

$$[\varphi_1 \circ \psi_1, \ldots, \varphi_s \circ \psi_s] \dashrightarrow [\varphi'_1 \circ \psi'_1, \ldots, \varphi'_{s'} \circ \psi'_{s'}]$$

und sind $\varphi_{s+1}, \psi_{s+1}, \ldots, \varphi_{s+k}, \psi_{s+k}$ $(k \geqslant 1)$ Funktionen von A nach S^1, dann ist

$$[f, \mathrm{id}_{S_1^3 \times \ldots \times S_k^3}]:$$
$$S_1^3 \times \ldots \times S_s^3 \times S_1^3 \times \ldots \times S_k^3 \to S_1^3 \times \ldots \times S_{s'}^3 \times S_1^3 \times \ldots \times S_k^3$$

eine homogene Funktion vom Typ:

$$[\varphi_1 \circ \psi_1, \ldots, \varphi_{s+k} \circ \psi_{s+k}]$$
$$\dashrightarrow [\varphi'_1 \circ \psi'_1, \ldots, \varphi'_{s'} \circ \psi'_{s'}, \varphi_{s+1} \circ \psi_{s+1}, \ldots, \varphi_{s+k} \circ \psi_{s+k}].$$

Der analoge Sachverhalt gilt für Homogenitätstransformationen. (Es ist natürlich auch möglich, als zusätzliche Koordinaten andere als die letzten zu wählen.)

(29) *Permutation.* Sind $\varphi_1, \psi_1, \ldots, \varphi_s, \psi_s$ mit $s \geqslant 2$ gegeben und ist $i_1, \ldots, i_s$ eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, s$, so ist die Funktion

$$f\colon S_1^3 \times \ldots \times S_s^3 \to S_1^3 \times \ldots \times S_s^3$$

vermöge $f[q_1, \ldots, q_s] = [q_{i_1}, \ldots, q_{i_s}]$ eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$[\varphi_1 \circ \psi_1, \ldots, \varphi_s \circ \psi_s] \to [\varphi_{i_1} \circ \psi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_s} \circ \psi_{i_s}].$$

(30) *Parametersubstitution.* $\eta\colon B \to A$ sei eine Abbildung. Ist dann f eine homogene Funktion vom Typ

$$[\varphi_1 \circ \psi_1, \ldots, \varphi_s \circ \psi_s] \dashrightarrow [\varphi'_1 \circ \psi'_1, \ldots, \varphi'_{s'} \circ \psi'_{s'}]$$

mit dem Parameterbereich A, so ist f auch eine homogene Funktion vom Typ

$$[\varphi_1 \eta \circ \psi_1 \eta, \ldots, \varphi_s \eta \circ \psi_s \eta] \dashrightarrow [\varphi'_1 \eta \circ \psi'_1 \eta, \ldots, \varphi'_{s'} \eta \circ \psi'_{s'} \eta]$$

mit dem Parameterbereich B. (Ist η epimorph, so gilt auch die umgekehrte Schlußrichtung.) Der analoge Sachverhalt gilt für Homogenitätstransformationen.

Der folgende Elementarprozess (33) ist der wichtigste, da er die Koordinaten mischt. Das ihm zugrundeliegende Prinzip läßt sich bezüglich beliebiger Mengen $M_1, \ldots, M_s$; $s \geqslant 2$ wie folgt aussprechen:

(31) Durchlaufen $i_1, \ldots, i_t$; $t \geqslant 1$ eine Teilmenge der Indizes $1, \ldots, s$, in welcher der Index 1 nicht vorkommt, und ist

$$g\colon M_{i_1} \times \ldots \times M_{i_t} \to S(M_1)$$

eine Abbildung in die Gruppe $S(M_1)$ der umkehrbar eindeutigen Selbstabbildungen von M_1 auf sich, so ist

$$f\colon M_1 \times \ldots \times M_s \to M_1 \times \ldots \times M_s$$

vermöge $f[x_1, \ldots, x_s] = [g_{[x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}]}(x_1), x_2, \ldots, x_s]$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $M_1 \times \ldots \times M_s$ auf sich. (Die erste Koordinate kann hier, bei Hilfssatz 2 und (33) natürlich auch durch eine andere ersetzt werden.)

Das Prinzip (31) führt bei f zu weiteren Eigenschaften, wenn die M_i und g zusätzliche algebraische oder topologische Voraussetzungen erfüllen. Wir benutzen es in der Form von

HILFSSATZ 2. *$S_1^3 \times \ldots \times S_s^3$; $s \geqslant 2$ sei gegeben.*

1) *Ist $g\colon S_{i_1}^3 \times \ldots \times S_{i_t}^3 \to S^3$ eine differenzierbare Funktion, für welche $i_1, \ldots, i_t$; $t \geqslant 1$ eine Teilmenge der Indizes $1, \ldots, s$ durchlaufen, die den Index 1 nicht enthält, dann ist*

$$f_1\colon S_1^3 \times \ldots \times S_s^3 \to S_1^3 \times \ldots \times S_s^3$$

vermöge

$$f_1[q_1, \ldots, q_s] = [g[q_{i_1}, \ldots, q_{i_t}] \cdot q_1, q_2, \ldots, q_s] \tag{32}$$

ein Diffeomorphismus.

2) *Ist $g'\colon S_{j_1}^3 \times \ldots \times S_{j_{t'}}^3 \to S^3$ eine differenzierbare Funktion, für welche $j_1, \ldots, j_{t'}$; $t' \geqslant 1$ eine Teilmenge der Indizes $1, \ldots, s$ durchlaufen, die den Index 1 nicht enthält, dann ist*

$$f_2\colon S_1^3 \times \ldots \times S_s^3 \to S_1^3 \times \ldots \times S_s^3$$

vermöge

$$f_2[q_1, \ldots, q_s] = [q_1 \cdot g'[q_{j_1}, \ldots, q_{j_{t'}}], q_2, \ldots, q_s]$$

ein Diffeomorphismus.

3) *Sind g und g' zugleich gegeben, so ist durch*

$$f_3[q_1, \ldots, q_s] = [g[q_{i_1}, \ldots, q_{i_t}] \cdot q_1 \cdot g'[q_{j_1}, \ldots, q_{j_{t'}}], q_2, \ldots, q_s]$$

ein Diffeomorphismus

$$f_3\colon S_1^3 \times \ldots \times S_s^3 \to S_1^3 \times \ldots \times S_s^3$$

gegeben.

Beweis. Die Differenzierbarkeit von f_k folgt aus derjenigen von g bzw. g' sowie der Differenzierbarkeit der Quaternionenmultiplikation auf S^3. Da $i_1, \ldots, i_t$ bzw. $j_1, \ldots, j_{t'}$ den Index 1 nicht enthalten, ist f_k eine umkehrbar eindeutige Abbildung. Die Umkehrabbildung entsteht jeweils, wenn in der betreffenden Definition g durch $\bar{g}$ bzw. g' durch $\bar{g}'$ ersetzt wird. (Hier und im folgenden bedeutet der Querstrich über einer

Funktion nach S^1 oder S^3 diejenige Funktion, die jeweils die konjugierten, also die inversen Werte annimmt.) Der Übergang zum Inversen in S^3 ist differenzierbar; also ist $\bar{g}$ bzw. $\bar{g}'$ mit g bzw. g' differenzierbar und folglich (analog zu f_k) auch f_k^{-1}, q.e.d.

Aus Hilfssatz 2 gewinnen wir als Elementarprozeß, das

(33) *Anmultiplizieren homogener Funktionen (links, rechts oder beidseitig).*

Für Hilfssatz 2 seien die Funktionen $\varphi_1, \psi_1, \ldots, \varphi_s, \psi_s$ von A nach S^1 gegeben. Im Falle 1) und 3) setzen wir voraus, daß g eine homogene Funktion vom Typ

$$[\varphi_{i_1} \circ \psi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_t} \circ \psi_{i_t}] \dashrightarrow [\varphi_1' \circ \bar{\varphi}_1] \tag{34}$$

ist, im Falle 2) und 3), daß g' eine homogene Funktion vom Typ

$$[\varphi_{j_1} \circ \psi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_{t'}} \circ \psi_{j_{t'}}] \dashrightarrow [\bar{\psi}_1 \circ \psi_1']$$

ist. Dann ist im Falle 1) f_1 eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$[\varphi_1 \circ \psi_1, \ldots, \varphi_s \circ \psi_s] \to [\varphi_1' \circ \psi_1, \varphi_2 \circ \psi_2, \ldots, \varphi_s \circ \psi_s], \tag{33_1}$$

im Falle 2) f_2 eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$[\varphi_1 \circ \psi_1, \ldots, \varphi_s \circ \psi_s] \to [\varphi_1 \circ \psi_1', \varphi_2 \circ \psi_2, \ldots, \varphi_s \circ \psi_s] \tag{33_2}$$

und im Falle 3) f_3 eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$[\varphi_1 \circ \psi_1, \ldots, \varphi_s \circ \psi_s] \to [\varphi_1' \circ \psi_1', \varphi_2 \circ \psi_2, \ldots, \varphi_s \circ \psi_s]. \tag{33_3}$$

(Wegen Hilfssatz 2 muß für Definition 2 nur noch die Homogenitätseigenschaft von f_k nachgewiesen werden. Wir führen dies für f_1 durch; für f_2 und f_3 erfolgt der Nachweis analog. Sei $[q_1, \ldots, q_s] \in S_1^3 \times \ldots \times S_s^3$ sowie $a \in A$ mit

$$f_1[q_1, \ldots, q_s] \overset{(32)}{=} [g[q_{i_1}, \ldots, q_{i_t}] \cdot q_1, q_2, \ldots, q_s] \overset{\text{def}}{=} [q_1', \ldots, q_s']$$

gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&f_1[\varphi_1(a) \cdot q_1 \cdot \psi_1(a), \varphi_2(a) \cdot q_2 \cdot \psi_2(a), \ldots, \varphi_s(a) \cdot q_s \cdot \psi_s(a)] \\
&\quad \overset{(32)}{=} [g[\varphi_{i_1}(a) \cdot q_{i_1} \cdot \psi_{i_1}(a), \ldots \\
&\qquad \ldots, \varphi_{i_t}(a) \cdot q_{i_t} \cdot \psi_{i_t}(a)] \cdot \varphi_1(a) \cdot q_1 \cdot \psi_1(a), \varphi_2(a) \cdot q_2 \cdot \psi_2(a), \ldots] \\
&\quad \overset{(34)}{=} [\varphi_1'(a) \cdot g[q_{i_1}, \ldots, q_{i_t}] \cdot \bar{\varphi}_1(a) \cdot \varphi_1(a) \cdot q_1 \cdot \psi_1(a), \varphi_2(a) \cdot q_2 \cdot \psi_2(a), \ldots \\
&\qquad \ldots, \varphi_s(a) \cdot q_s \cdot \psi_s(a)] \\
&\quad = [\varphi_1'(a) \cdot g[q_{i_1}, \ldots, q_{i_t}] \cdot q_1 \cdot \psi_1(a), \varphi_2(a) \cdot q_2 \cdot \psi_2(a), \ldots \\
&\qquad \ldots, \varphi_s(a) \cdot q_s \cdot \psi_s(a)] \\
&\quad = [\varphi_1'(a) \cdot q_1' \cdot \psi_1(a), \varphi_2(a) \cdot q_2' \cdot \psi_2(a), \ldots, \varphi_s(a) \cdot q_s' \cdot \psi_s(a)].
\end{aligned}$$

f_1 hat also die verlangte Homogenitätseigenschaft. Bei der Rechnung haben wir von dem in (10) erwähnten Assoziativitätsgesetz Gebrauch gemacht.)

Aus der Differenzierbarkeit der Multiplikation in S^3 und analog zu dem für (33_1) geführten Homogenitätsnachweis erhalten wir den nächsten Elementarprozess.

(35) *Produkt homogener Funktionen.* $\varphi_1, \psi_1, \ldots, \varphi_s, \psi_s$; $s \geqslant 1$ sowie φ', ψ' und α seien Funktionen von A nach S^1. g sei eine homogene Funktion vom Typ

$$[\varphi_{i_1} \circ \psi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_t} \circ \psi_{i_t}] \dashrightarrow [\varphi' \circ \alpha],$$

g' eine homogene Funktion vom Typ

$$[\varphi_{j_1} \circ \psi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_{t'}} \circ \psi_{j_{t'}}] \dashrightarrow [\bar{\alpha} \circ \psi'],$$

$i_1, \ldots, i_t$; $t \geqslant 1$ und $j_1, \ldots, j_{t'}$; $t' \geqslant 1$ mögen dabei je eine Teilmenge der Indizes $1, \ldots, s$ durchlaufen. Dann ist

$$g \cdot g' \colon S_1^3 \times \ldots \times S_s^3 \to S^3$$

vermöge

$$g \cdot g'[q_1, \ldots, q_s] = g[q_{i_1}, \ldots, q_{i_t}] \cdot g'[q_{j_1}, \ldots, q_{j_{t'}}]$$

eine homogene Funktion vom Typ $[\varphi_1 \circ \psi_1, \ldots, \varphi_s \circ \psi_s] \dashrightarrow [\varphi' \circ \psi']$.

HILFSSATZ 3. *t_1 und t_2 seien nichtnegative ganze Zahlen. Dann sind die Abbildungen g_{t_1,t_2}, $g_{\bar{t}_1,t_2}$, $g_{t_1,\bar{t}_2}$ und $g_{\bar{t}_1,\bar{t}_2}$ von S^3 nach S^3 vermöge*

$$(36)\quad \begin{aligned} g_{t_1,t_2}[z_1, z_2] &= \frac{[z_1^{t_1}, z_2^{t_2}]}{\sqrt{|z_1^{t_1}|^2 + |z_2^{t_2}|^2}}, & g_{\bar{t}_1,t_2}[z_1, z_2] &= \frac{[\bar{z}_1^{t_1}, z_2^{t_2}]}{\sqrt{|z_1^{t_1}|^2 + |z_2^{t_2}|^2}}, \\ g_{t_1,\bar{t}_2}[z_1, z_2] &= \frac{[z_1^{t_1}, \bar{z}_2^{t_2}]}{\sqrt{|z_1^{t_1}|^2 + |z_2^{t_2}|^2}}, & g_{\bar{t}_1,\bar{t}_2}[z_1, z_2] &= \frac{[\bar{z}_1^{t_1}, \bar{z}_2^{t_2}]}{\sqrt{|z_1^{t_1}|^2 + |z_2^{t_2}|^2}}, \end{aligned}$$

differenzierbar.

Beweis. Für $[z_1, z_2] \in S^3$ liegt $[\overset{(-)}{z}{}_1^{t_1}, \overset{(-)}{z}{}_2^{t_2}]$ zwar i.a. nicht in S^3, ist aber von $[0, 0] \in R^4$ verschieden. Daher können die normierten Punkte $[\overset{(-)}{z}{}_1^{t_1}, \overset{(-)}{z}{}_2^{t_2}]/\sqrt{|z_1^{t_1}|^2 + |z_2^{t_2}|^2}$ gebildet werden, welche in S^3 liegen.

Jede der Abbildungen $g_{\overset{(-)}{t}_1, \overset{(-)}{t}_2}$ ist die Einschränkung einer Funktion $R^4 - [0, 0] \to R^4$, welche durch dieselbe Formel (36) auf der im R^4 offenen Menge $R^4 - [0, 0]$ definiert wird. Dabei sind die reellen Koordinatenfunktionen des Zählers und der Ausdruck im Nenner unter der Wurzel polynomial. Da der Ausdruck unter der Wurzel für Argumente aus $R^4 - [0, 0]$ positiv ist, folgt, daß die betrachteten Funktionen $R^4 - [0, 0] \to R^4$ differenzierbar sind und daher analog zu (5) auch ihre Einschränkungen $g_{\overset{(-)}{t}_1, \overset{(-)}{t}_2}$, q.e.d.

Hilfssatz 3 wird im folgenden zur Konstruktion homogener Funktionen $S^3 \to S^3$ verwendet. Die Bedingung $t_1 \geqslant 0$, $t_2 \geqslant 0$ ist dabei nötig, weil für $[z_1, z_2] \in S^3$ eine der komplexen Koordinaten Null werden kann. Diese Einschränkung wird sich aber durch die Möglichkeit der Konjugation einer oder beider Zählerkoordinaten als unerheblich erweisen. Die Abbildungsgrade betragen (s. Franz [6], Olum [16]):

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} g_{t_1,t_2} &= \operatorname{grad} g_{\bar{t}_1,\bar{t}_2} = t_1 \cdot t_2; \\ \operatorname{grad} g_{\bar{t}_1,t_2} &= \operatorname{grad} g_{t_1,\bar{t}_2} = -t_1 \cdot t_2. \end{aligned} \tag{37}$$

6. Diffeomorphismen zwischen Produkten mit dreidimensionalen Linsenräumen als Faktoren

SATZ 1. $L_{m_1}(1) \times L_{m_2}(r_2) \approx S^3 \times L_{m_1 \cdot m_2}(1)$ *für* $(m_1, m_2) = 1$.

Beweis. Wir wählen nach (12) und (13) $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ sowie a_2 und b_2 und werden mit ihnen die Folge der Homogenitätstransformationen

$$[\sigma_1 \circ 1, \sigma_2^{a_2} \circ \sigma_2^{b_2}] \xrightarrow{f_1} [\sigma_1 \circ \sigma_2, \sigma_2^{a_2} \circ \sigma_2^{b_2}] \xrightarrow{f_2} [\sigma_1 \circ \sigma_2, \sigma_1 \sigma_2 \circ 1]$$
$$\xrightarrow{f_3} [1 \circ 1, \sigma_1 \sigma_2 \circ 1] \;\forall\, [\sigma_1, \sigma_2] \in G_{m_1} \times G_{m_2} \overset{\text{def}}{=} A$$

konstruieren. Deren Komposition gemäß (27) ergibt eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$[\sigma_1 \circ 1, \sigma_2^{a_2} \circ \sigma_2^{b_2}] \to [1 \circ 1, \sigma_1 \sigma_2 \circ 1] \;\forall\, [\sigma_1, \sigma_2] \in A. \tag{38}$$

Da $\sigma_1 \sigma_2 \in G_{m_1 \cdot m_2}$ gilt und die zweite Bedingung von Hilfssatz 1 wegen $m_1 \cdot m_2 = 1 \cdot (m_1 \cdot m_2)$ erfüllt ist, folgt die Behauptung dieses Satzes dann aus Hilfssatz 1. (Alle homogenen Funktionen und Homogenitätstransformationen dieses Beweises haben A als Parameterbereich.)

Konstruktion von f_1. Aus $(r_2, m_2) \overset{(4)}{=} 1$ folgt die Existenz eines ganzzahligen t_0 mit

$$t_0 \cdot r_2 \equiv -1 \bmod m_2. \tag{39}$$

Wegen $m_2 \neq 0$ können wir t_0 als nichtnegativ annehmen, da wir sonst zu t_0 ein geeignetes Vielfaches von m_2 addieren und, weil die entstehende Zahl ebenso (39) erfüllt, t_0 durch sie ersetzen können.

Wir betrachten nun $g_{1,t_0}\colon S^3 \to S^3$ gemäß Hilfssatz 3. Diese Funktion hat für $q = [z_1, z_2] \in S^3$ die Eigenschaft

$$g_{1,t_0}(\sigma_2^{a_2} \cdot q \cdot \sigma_2^{b_2}) \overset{(15)}{=} g_{1,t_0}[\sigma_2 \cdot z_1, \sigma_2^{r_2} \cdot z_2] \overset{(36)}{=} \frac{[\sigma_2 \cdot z_1, \sigma_2^{t_0 \cdot r_2} \cdot z_2^{t_0}]}{\sqrt{|\sigma_2 \cdot z_1|^2 + |\sigma_2^{t_0 \cdot r_2} \cdot z_2^{t_0}|^2}}$$
$$\overset{(39)}{=} \frac{[\sigma_2 \cdot z_1, \bar{\sigma}_2 \cdot z_2^{t_0}]}{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2^{t_0}|^2}} \overset{(10)}{=} \frac{[z_1, z_2^{t_0}]}{\sqrt{|z_1|^2 + |z_2^{t_0}|^2}} \cdot \sigma_2 \overset{(36)}{=} g_{1,t_0}(q) \cdot \sigma_2,$$

BU

ist also homogen vom Typ

$$[\sigma_2^{a_2}\cdot\sigma_2^{b_2}] \dashrightarrow [1\circ\sigma_2]. \tag{40}$$

Fassen wir g_{1,t_0} als Funktion der zweiten Koordinate auf und multiplizieren sie gemäß (33_2) von rechts an die erste Koordinate an, so erhalten wir die Homogenitätstransformation f_1 vom Typ $[\sigma_1\circ 1, \sigma_2^{a_2}\circ\sigma_2^{b_2}] \to$ $\to [\sigma_1\circ\sigma_2, \sigma_2^{a_2}\circ\sigma_2^{b_2}]$.

Konstruktion von f_2. Wegen $(m_1, m_2) = 1$ und $m_1\cdot m_2 \neq 0$ existieren nach dem Hauptsatz über simultane Kongruenzen nichtnegative t_1, t_2 mit

$$t_1 \equiv \begin{cases} 1 \bmod m_1, \\ 1-a_2 \bmod m_2, \end{cases} \quad t_2 \equiv \begin{cases} 1 \bmod m_1, \\ -(1+a_2) \bmod m_2. \end{cases}$$

Wir betrachten nun g_{t_1,t_2} gemäß Hilfssatz 3. Diese Funktion hat die Eigenschaft

$$\begin{aligned} g_{t_1,t_2}(\sigma_1\cdot q\cdot\sigma_2) &= g_{t_1,t_2}[\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot z_1, \sigma_1\cdot\overline{\sigma}_2\cdot z_2] = \frac{[\sigma_1^{t_1}\cdot\sigma_2^{t_1}\cdot z_1^{t_1}, \sigma_1^{t_2}\cdot\overline{\sigma}_2^{t_2}\cdot z_2^{t_2}]}{\sqrt{|\sigma_1^{t_1}\cdot\sigma_2^{t_1}\cdot z_1^{t_1}|^2 + |\sigma_1^{t_2}\cdot\overline{\sigma}_2^{t_2}\cdot z_2^{t_2}|^2}} \\ &= \frac{[\sigma_1\cdot\sigma_2^{1-a_2}\cdot z_1^{t_1}, \sigma_1\cdot\sigma_2^{1+a_2}\cdot z_2^{t_2}]}{\sqrt{|z_1^{t_1}|^2+|z_2^{t_2}|^2}} = \sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\frac{[z_1^{t_1}, z_2^{t_2}]}{\sqrt{|z_1^{t_1}|^2+|z_2^{t_2}|^2}}\cdot\overline{\sigma}_2^{a_2} \\ &= \sigma_1\cdot\sigma_2\cdot g_{t_1,t_2}(q)\cdot\overline{\sigma}_2^{a_2}, \end{aligned}$$

ist also homogen vom Typ $[\sigma_1\circ\sigma_2] \dashrightarrow [\sigma_1\cdot\sigma_2\circ\overline{\sigma}_2^{a_2}]$. Mit den nichtnegativen t_3, t_4, die

$$t_3 \equiv \begin{cases} 0 \bmod m_1, \\ -b_2 \bmod m_2, \end{cases} \quad t_4 \equiv \begin{cases} 0 \bmod m_1, \\ b_2 \bmod m_2 \end{cases}$$

erfüllen, erhalten wir analog dazu eine homogene Funktion g_{t_3,t_4} vom Typ

$$[\sigma_1\circ\sigma_2] \dashrightarrow [\overline{\sigma}_2^{b_2}\circ 1].$$

g_{t_1,t_2} und g_{t_3,t_4} fassen wir als Funktionen der ersten Koordinate auf und multiplizieren gemäß (33_3) g_{t_1,t_2} von links, g_{t_3,t_4} von rechts an die zweite Koordinate an. So erhalten wir die Homogenitätstransformation f_2 vom Typ

$$[\sigma_1\circ\sigma_2, \sigma_2^{a_2}\circ\sigma_2^{b_2}] \to [\sigma_1\circ\sigma_2, \sigma_1\cdot\sigma_2\circ 1].$$

Konstruktion von f_3. Aus demselben Grund wie bei der Konstruktion von f_2 gibt es nichtnegative t_5, t_6 mit

$$t_5 \equiv \begin{cases} -1 \bmod m_1, \\ 0 \bmod m_2, \end{cases} \quad t_6 \equiv \begin{cases} 1 \bmod m_1, \\ 0 \bmod m_2. \end{cases}$$

g_{t_5,t_6} hat die Eigenschaft

$$\begin{aligned} g_{t_5,t_6}(\sigma_1\sigma_2\cdot q) &= g_{t_5,t_6}[\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot z_1,\ \sigma_1\cdot\sigma_2\cdot z_2] \\ &= \frac{[\sigma_1^{t_5}\cdot\sigma_2^{t_5}\cdot z_1^{t_5},\ \sigma_1^{t_6}\cdot\sigma_2^{t_6}\cdot z_2^{t_6}]}{\sqrt{|\sigma_1^{t_5}\cdot\sigma_2^{t_5}\cdot z_1^{t_5}|^2+|\sigma_1^{t_6}\cdot\sigma_2^{t_6}\cdot z_2^{t_6}|^2}} = \frac{[\bar\sigma_1\cdot z_1^{t_5},\ \sigma_1\cdot z_2^{t_6}]}{\sqrt{|z_1^{t_5}|^2+|z_2^{t_6}|^2}} \\ &= \frac{[z_1^{t_5},\ z_2^{t_6}]}{\sqrt{|z_1^{t_5}|^2+|z_2^{t_6}|^2}}\cdot\bar\sigma_1 = g_{t_5,t_6}(q)\cdot\bar\sigma_1, \end{aligned}$$

ist also homogen vom Typ $[\sigma_1\cdot\sigma_2\circ 1] \dashrightarrow [1\circ\bar\sigma_1]$. Mit dem nichtnegativen t_7, welches

$$t_7 \equiv \begin{cases} 0 \bmod m_1, \\ -1 \bmod m_2 \end{cases}$$

erfüllt, erhalten wir analog dazu eine homogene Funktion g_{t_7,t_7} vom Typ $[\sigma_1\cdot\sigma_2\circ 1] \dashrightarrow [\bar\sigma_2\circ 1]$.

g_{t_5,t_6} und g_{t_7,t_7} fassen wir als Funktionen der zweiten Koordinate auf und multiplizieren g_{t_5,t_6} von links, g_{t_7,t_7} von rechts an die erste Koordinate an. So erhalten wir die Homogenitätstransformation f_3 vom Typ

$$[\sigma_1\circ\sigma_2,\ \sigma_1\cdot\sigma_2\circ 1] \to [1\circ 1,\ \sigma_1\cdot\sigma_2\circ 1], \qquad \text{q.e.d.}$$

Die Teilerfremdheitsbedingung von Satz 1 ist insbesondere erfüllt, wenn $m_1 = 1$ gilt, d.h. wir erhalten

$$S^3\times L_m(r) \approx S^3\times L_m(r') \quad \text{für beliebige } L_m(r),\ L_m(r'), \tag{41}$$

da nach Satz 1 beide Seiten zu $S^3\times L_m(1)$ diffeomorph sind. Bei (41) kommen auch Fälle vor, für die $L_m(r)$ und $L_m(r')$ nicht zum gleichen Homotopietyp gehören, beispielsweise $L_5(2)$, $L_5(1)$ (s. (8)).

Satz 2. *Sind die natürlichen Zahlen $m_1, \ldots, m_s$; $s \geqslant 2$ paarweise relativ prim, so gilt*

$$L_{m_1}(1)\times L_{m_2}(r_2)\times\ldots\times L_{m_s}(r_s) \approx S_1^3\times\ldots\times S_{s-1}^3\times L_{\Pi m_i}(1).$$

Beweis. Wir erhalten die Behauptung, indem wir Satz 1 nacheinander auf die Faktorenpaare 1, 2 bis $s-1$, s anwenden. Für $s = 4$ erhalten wir beispielsweise

$$\begin{aligned} &L_{m_1}(1)\times L_{m_2}(r_2)\times L_{m_3}(r_3)\times L_{m_4}(r_4) \approx S_1^3\times L_{m_1\cdot m_2}(1)\times L_{m_3}(r_3)\times L_{m_4}(r_4) \\ &\approx S_1^3\times S_2^3\times L_{m_1\cdot m_2\cdot m_3}(1)\times L_{m_4}(r_4) \approx S_1^3\times S_2^3\times S_3^3\times L_{m_1\cdot m_2\cdot m_3\cdot m_4}(1), \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Satz 3.

$$S^3\times L_{m_2\cdot n_2}(1)\times L_{m_3\cdot n_3}(1) \approx S^3\times L_{m_2\cdot n_3}(1)\times L_{m_3\cdot n_2}(1)$$

für natürliche Zahlen m_2, n_2, m_3, n_3 mit

$$(m_2, n_2) = (m_2, n_3) = (m_3, n_2) = (m_3, n_3) = 1.$$

(Über (m_2, m_3) und (n_2, n_3) sind keine Voraussetzungen gemacht.)

Beweis. Wir werden die Folge der Homogenitätstransformationen

$$[1\circ 1, \mu_2\cdot\nu_2\circ 1, \mu_3\cdot\nu_3\circ 1] \xrightarrow{f_1} [1\circ 1, \mu_2\circ\nu_2, \mu_3\circ\nu_3]$$
$$\xrightarrow{f_2} [\bar{\nu}_2\circ\nu_3, \mu_2\circ\nu_2, \mu_3\circ\nu_3] \xrightarrow{f_3} [\bar{\nu}_2\circ\nu_3, \mu_2\circ\nu_3, \mu_3\circ\nu_2]$$
$$\xrightarrow{f_4} [1\circ 1, \mu_2\circ\nu_3, \mu_3\circ\nu_2] \xrightarrow{f_5} [1\circ 1, \mu_2\cdot\nu_3\circ 1, \mu_3\cdot\nu_2\circ 1]$$
$$\forall [\mu_2, \nu_2, \mu_3, \nu_3] \in G_{m_2}\times G_{n_2}\times G_{m_3}\times G_{n_3} \overset{\text{def}}{=} A$$

konstruieren.

Deren Komposition ergibt eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$(42)\qquad [1\circ 1, \mu_2\cdot\nu_2\circ 1, \mu_3\cdot\nu_3\circ 1] \to [1\circ 1, \mu_2\cdot\nu_3\circ 1, \mu_3\cdot\nu_2\circ 1]$$
$$\forall [\mu_2, \nu_2, \mu_3, \nu_3] \in A.$$

Aus $(m_2, n_2) = (m_3, n_3) = 1$ folgt die Existenz ganzzahliger u_2, v_2, u_3, v_3 mit

$$(43)\qquad u_2 m_2 + v_2 n_2 = 1, \qquad u_3 m_3 + v_3 n_3 = 1.$$

Wir definieren

$$\eta_0\colon G_1\times G_{m_2\cdot n_2}\times G_{m_3\cdot n_3} \to G_{m_2}\times G_{n_2}\times G_{m_3}\times G_{n_3}$$

durch

$$\eta_0[1, \sigma_2, \sigma_3] = [\sigma_2^{v_2\cdot n_2}, \sigma_2^{u_2\cdot m_2}, \sigma_3^{v_3\cdot n_3}, \sigma_3^{u_3\cdot m_3}]$$

und substituieren vermöge η_0 gemäß (30) in (42) den Parameter. So entsteht eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$[1\circ 1, \sigma_2\circ 1, \sigma_3\circ 1] \to [1\circ 1, \sigma_2^{v_2\cdot n_2}\cdot\sigma_3^{u_3\cdot m_3}\circ 1, \sigma_3^{v_3\cdot n_3}\cdot\sigma_2^{u_2\cdot m_2}\circ 1]$$
$$\forall [1, \sigma_2, \sigma_3] \in G_1\times G_{m_2\cdot n_2}\times G_{m_3\cdot n_3}.$$

Wegen $\sigma_2^{v_2\cdot n_2} \in G_{m_2}$, $\sigma_3^{u_3\cdot m_3} \in G_{n_3}$ ist $\sigma_2^{v_2\cdot n_2}\cdot\sigma_3^{u_3\cdot m_3}$ in $G_{m_2\cdot n_3}$ enthalten. Analog dazu gilt $\sigma_3^{v_3\cdot n_3}\cdot\sigma_2^{u_2\cdot m_2} \in G_{m_3\cdot n_2}$. Da ferner $1\cdot(m_2\cdot n_2)\cdot(m_3\cdot n_3) = 1\cdot(m_2\cdot n_3)\cdot\cdot(m_3\cdot n_2)$ gilt, folgt die Behauptung dieses Satzes dann aus Hilfssatz 1.

Konstruktion von f_1. Aus (43) folgt

$$v_2\cdot n_2 - u_2\cdot m_2 \equiv \begin{cases} 1 \bmod m_2, \\ -1 \bmod n_2, \end{cases}$$

so daß

$$(44)\qquad r_2 \overset{\text{def}}{=} v_2\cdot n_2 - u_2\cdot m_2 \quad \text{zu } m_2\cdot n_2 \text{ relativ prim ist.}$$

Die ganzen Zahlen a_2, b_2 in (12) für $L_{m_2\cdot n_2}(r_2)$ können wir als $a_2 = v_2\cdot n_2$, $b_2 = u_2\cdot m_2$ wählen, denn aus (43) folgt $a_2 + b_2 = 1$ und aus

(44) $a_2 - b_2 = r_2$. Nach (38) gibt es eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$[1 \circ 1, \sigma_2^{a_2} \circ \sigma_2^{b_2}] \to [1 \circ 1, \sigma_2 \circ 1] \,\forall\, [1, \sigma_2] \in G_1 \times G_{m_2 \cdot n_2}.$$

Durch Richtungsumkehrung gemäß (26) erhalten wir daraus eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$(45) \qquad [1 \circ 1, \sigma_2 \circ 1] \to [1 \circ 1, \sigma_2^{a_2} \circ \sigma_2^{b_2}] \,\forall\, [1, \sigma_2] \in G_1 \times G_{m_2 \cdot n_2}.$$

Vermöge der Abbildung

$$\eta_1 \colon G_{m_2} \times G_{n_2} \times G_{m_3} \times G_{n_3} \to G_1 \times G_{m_2 \cdot n_2},$$

welche durch

$$\eta_1[\mu_2, \nu_2, \mu_3, \nu_3] = [1, \mu_2 \cdot \nu_2]$$

erklärt ist, substituieren wir in (45) den Parameter. Berücksichtigen wir, daß nach (43)

$$a_2 \equiv \begin{cases} 1 \bmod m_2, \\ 0 \bmod n_2, \end{cases} \qquad b_2 \equiv \begin{cases} 0 \bmod m, \\ 1 \bmod n \end{cases}$$

gilt, so erhalten wir daher eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$(46) \qquad [1 \circ 1, \mu_2 \cdot \nu_2 \circ 1] \to [1 \circ 1, \mu_2 \circ \nu_2] \,\forall\, [\mu_2, \nu_2, \mu_3, \nu_3] \in A.$$

Daraus gewinnen wir durch Verlängern gemäß (28) eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$(47) \qquad [1 \circ 1, \mu_2 \cdot \nu_2 \circ 1, \mu_3 \cdot \nu_3 \circ 1] \\ \to [1 \circ 1, \mu_2 \circ \nu_2, \mu_3 \cdot \nu_3 \circ 1] \,\forall\, [\mu_2, \nu_2, \mu_3, \nu_3] \in A.$$

Analog zu (46) gibt es eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$[1 \circ 1, \mu_3 \cdot \nu_3 \circ 1] \to [1 \circ 1, \mu_3 \circ \nu_3] \,\forall\, [\mu_2, \nu_2, \mu_3, \nu_3] \in A,$$

aus welcher wir durch Verlängern eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$(48) \qquad [1 \circ 1, \mu_2 \circ \nu_2, \mu_3 \cdot \nu_3 \circ 1] \\ \to [1 \circ 1, \mu_2 \circ \nu_2, \mu_3 \circ \nu_3] \,\forall\, [\mu_2, \nu_2, \mu_3, \nu_3] \in A$$

gewinnen.

Die Komposition von (47) und (48) ergibt die gewünschte Homogenitätstransformation f_1 vom Typ

$$(49) \qquad [1 \circ 1, \mu_2 \cdot \nu_2 \circ 1, \mu_3 \cdot \nu_3 \circ 1] \\ \to [1 \circ 1, \mu_2 \circ \nu_2, \mu_3 \circ \nu_3] \,\forall\, [\mu_2, \nu_2, \mu_3, \nu_3] \in A.$$

Konstruktion von f_5. Vertauschen wir unter Ausnutzung von $(m_2, n_3) = (m_3, n_2) = 1$ bei der Konstruktion von f_1 die Rollen von n_2

und n_3, so erhalten wir analog zu (49) eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$[1\circ 1,\ \mu_2\cdot\nu_3\circ 1,\ \mu_3\cdot\nu_2\circ 1] \to [1\circ 1,\ \mu_2\circ\nu_3,\ \mu_3\circ\nu_2]\ \forall\,[\mu_2,\nu_2,\mu_3,\nu_3]\in A,$$

aus welcher sich f_5 durch Richtungsumkehrung ergibt.

Konstruktion von f_2. Wegen $(m_2, n_2) = 1$ und $m_2\cdot n_2 \neq 0$ gibt es nichtnegative ganze Zahlen t_1, t_2 mit

$$t_1 \equiv \begin{cases} 0 \bmod m_2, \\ -1 \bmod n_2, \end{cases} \qquad t_2 \equiv \begin{cases} 0 \bmod m_2, \\ 1 \bmod n_2. \end{cases}$$

Dann ist g_{t_1,t_2} eine homogene Funktion vom Typ

$$[\mu_2\circ\nu_2] \cdots\rangle\ [\bar{\nu}_2\circ 1]\ \forall\,[\mu_2,\nu_2,\mu_3,\nu_3]\in A.$$

Wegen $(m_3, n_3) = 1$ und $m_3\cdot n_3 \neq 0$ gibt es ein nichtnegatives t_3 mit

$$t_3 \equiv \begin{cases} 0 \bmod m_3, \\ 1 \bmod n_3. \end{cases}$$

g_{t_3,t_3} ist dann eine homogene Funktion vom Typ

$$[\mu_3\circ\nu_3] \cdots\rangle\ [1\circ\nu_3]\ \forall\,[\mu_2,\nu_2,\mu_3,\nu_3]\in A.$$

g_{t_1,t_2} fassen wir als Funktion der zweiten, g_{t_3,t_3} als Funktion der dritten Koordinate auf und multiplizieren g_{t_1,t_2} von links, g_{t_3,t_3} von rechts an die erste Koordinate an. So erhalten wir die Homogenitätstransformation f_2 vom Typ

$$[1\circ 1,\ \mu_2\circ\nu_2,\ \mu_3\circ\nu_3] \to [\bar{\nu}_2\circ\nu_3,\ \mu_2\circ\nu_2,\ \mu_3\circ\nu_3]\ \forall\,[\mu_2,\nu_2,\mu_3,\nu_3]\in A.$$

Konstruktion von f_4. Wenn wir $(m_2, n_3) = (m_3, n_2) = 1$ ausnutzen, erhalten wir analog zu der Konstruktion von f_2 eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$[1\circ 1,\ \mu_2\circ\nu_3,\ \mu_3\circ\nu_2] \to [\bar{\nu}_2\circ\nu_3,\ \mu_2\circ\nu_3,\ \mu_3\circ\nu_2]\ \forall\,[\mu_2,\nu_2,\mu_3,\nu_3]\in A,$$

aus welcher sich f_4 durch Richtungsumkehrung ergibt.

Konstruktion von f_3. $g_{1,1}$ ist eine homogene Funktion vom Typ

$$[\bar{\nu}_2\circ\nu_3] \cdots\rangle\ [\bar{\nu}_2\circ\nu_3]\ \forall\,[\mu_2,\nu_2,\mu_3,\nu_3]\in A.$$

Fassen wir sie als Funktion der ersten Koordinate auf und multiplizieren sie von rechts an die zweite Koordinate an, so erhalten wir eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$(50)\qquad [\bar{\nu}_2\circ\nu_3,\ \mu_2\circ\nu_2,\ \mu_3\circ\nu_3] \to [\bar{\nu}_2\circ\nu_3,\ \mu_2\circ\nu_3,\ \mu_3\circ\nu_3]\ \forall\,[\mu_2,\nu_2,\mu_3,\nu_3]\in A.$$

$g_{\bar{1},1}$ ist eine homogene Funktion vom Typ

$$[\bar{\nu}_2\circ\nu_3] \cdots\rangle\ [\bar{\nu}_3\circ\nu_2]\ \forall\,[\mu_2,\nu_2,\mu_3,\nu_3]\in A.$$

Wir fassen sie als Funktion der ersten Koordinate auf und multiplizieren sie von rechts an die dritte Koordinate an. So erhalten wir eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$(51)\qquad [\bar{\nu}_2 \circ \nu_3, \mu_2 \circ \nu_3, \mu_3 \circ \nu_3] \to [\bar{\nu}_2 \circ \nu_3, \mu_2 \circ \nu_3, \mu_3 \circ \nu_2] \;\forall\, [\mu_2, \nu_2, \mu_3, \nu_3] \in A\,.$$

f_3 ist nun die Komposition der Homogenitätstransformationen (50) und (51), q.e.d.

Satz 4. *Zu* $S^3 \times L_{m_2}(r_2) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s)$; $s \geqslant 2$ *existieren natürliche Zahlen* $e_2, \ldots, e_s$, *die eine Teilerkette* $e_2 | \ldots | e_s$ *bilden derart, daß*

$$S^3 \times L_{m_2}(r_2) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s) \approx S^3 \times L_{e_2}(1) \times \ldots \times L_{e_s}(1)$$

gilt.

Beweis. Wenn wir Satz 1 nacheinander auf die Faktorenpaare $1, 2$ bis $1, s$ anwenden, erhalten wir

$$S^3 \times L_{m_2}(r_2) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s) \approx S^3 \times L_{m_2}(1) \times \ldots \times L_{m_s}(1).$$

Im Falle $s = 2$ ist dann mit $e_2 \overset{\text{def}}{=} m_2$ die Behauptung erwiesen. Sei also im folgenden $s \geqslant 3 \cdot m_i = p_1^{k_{i1}} \cdot \ldots \cdot p_t^{k_{it}}$; $i = 2, \ldots, s$; $t \geqslant 1$; $k_{ij} \geqslant 0$ seien die Primzahlpotenzzerlegungen der m_i durch die Gesamtheit aller Primzahlen, welche mindestens ein m_i teilen. (Wenn $m_2 = \ldots = m_s = 1$ gilt, nehmen wir irgendeine Primzahl und für alle Exponenten den Wert Null.)

Sei jetzt j_1 und, was wegen $s \geqslant 3$ möglich ist, $i_1 < i_2$ gewählt. Dann definieren wir $m_i' = p_1^{k'_{i1}} \cdot \ldots \cdot p_t^{k'_{it}}$ durch: $k'_{i_1 j_1} = k_{i_2 j_1}$, $k'_{i_2 j_1} = k_{i_1 j_1}$, $k'_{ij} = k_{ij}$ in allen anderen Fällen, d.h., das System der m_i' unterscheidet sich von dem der m_i genau dadurch, daß

(52) zwei Primzahlpotenzen, die zum gleichen Primfaktor p_{j_1} aber verschiedenen Koordinaten $i_1 < i_2$ gehören, vertauscht worden sind. Insbesondere gilt, wenn i von i_1 und i_2 verschieden ist,

$$(53)\qquad m_i' = m_i.$$

Aus der Primzahleigenschaft der p_j folgen die Teilerfremdheitseigenschaften

$$\left(\frac{m_{i_1}}{p_{j_1}^{k_{i_1 j_1}}}, p_{j_1}^{k_{i_1 j_1}}\right) = \left(\frac{m_{i_1}}{p_{j_1}^{k_{i_1 j_1}}}, p_{j_1}^{k_{i_2 j_1}}\right) = \left(\frac{m_{i_2}}{p_{j_1}^{k_{i_2 j_1}}}, p_{j_1}^{k_{i_1 j_1}}\right) = \left(\frac{m_{i_2}}{p_{j_1}^{k_{i_2 j_1}}}, p_{j_1}^{k_{i_2 j_1}}\right) = 1.$$

Daraus folgt nach Satz 3: $S^3 \times L_{m_{i_1}}(1) \times L_{m_{i_2}}(1) \approx S^3 \times L_{m'_{i_1}}(1) \times \times L_{m'_{i_2}}(1)$ und, da nach (53) für die übrigen Koordinaten $m_i' = m_i$ gilt $S^3 \times L_{m_2}(1) \times \ldots \times L_{m_s}(1) \approx S^3 \times L_{m_2'}(1) \times \ldots \times L_{m_s'}(1)$. Schalten wir eine geeignete endliche Folge solcher Diffeomorphismen mit der Eigenschaft (52) hintereinander, so können wir die jeweils zu einem Primfaktor gehöri-

gen Exponenten k_{ij} beliebig permutieren. Insbesondere erhalten wir $S^3 \times L_{m_2}(1) \times \ldots \times L_{m_s}(1) \approx S^3 \times L_{e_2}(1) \times \ldots \times L_{e_s}(1)$ für $e_i = p_1^{l_{i1}} \cdot \ldots \cdot p_t^{l_{it}}$, wobei für alle j: $p_j^{l_{2j}} \leqslant \ldots \leqslant p_j^{l_{sj}}$ die der Größe nach geordneten $p_j^{k_{2j}} \ldots \ldots p_j^{k_{sj}}$ sind. Wegen $p_j^{l_{2j}} | \ldots | p_j^{l_{sj}} \forall j$ gilt $e_2 | \ldots | e_s$, q.e.d.

SATZ 5. $L_{m_1}(r) \times L_{m_2}(1) \approx L_{m_1}(1) \times L_{m_2}(r)$ *für* $(r, m_1 \cdot m_2) = 1$. (*Über* (m_1, m_2) *ist keine Voraussetzung gemacht.*)

Beweis. Die Voraussetzung $(r, m_1 \cdot m_2) = 1$ hat nach (4) und (12) zur Folge, daß es für $L_{m_1 \cdot m_2}(r)$ ganze Zahlen a, b mit $a + b \equiv 1 \bmod m_1 \cdot m_2$, $a - b \equiv r \bmod m_1 \cdot m_2$ gibt. Dann gilt auch

$$a + b \equiv 1 \begin{cases} \bmod m_1, \\ \bmod m_2, \end{cases} \quad a - b \equiv r \begin{cases} \bmod m_1, \\ \bmod m_2, \end{cases}$$

so daß wir a, b in (12) für $L_{m_1}(r)$ und $L_{m_2}(r)$ verwenden können.

Wir werden die Folge der Homogenitätstransformationen

$$\begin{aligned} [\sigma_1^a \circ \sigma_1^b, \sigma_2 \circ 1] &\xrightarrow{f_1} [\sigma_1^a \circ \sigma_1^b, \sigma_2 \circ \bar{\sigma}_1] \xrightarrow{f_2} [\sigma_2^a \circ \sigma_2^b, \sigma_2 \circ \bar{\sigma}_1] \\ &\xrightarrow{f_3} [\sigma_2^a \circ \sigma_2^b, 1 \circ \bar{\sigma}_1] \xrightarrow{f_4} [\sigma_2^a \circ \sigma_2^b, \sigma_1 \circ 1] \\ &\xrightarrow{f_5} [\sigma_1 \circ 1, \sigma_2^a \circ \sigma_2^b] \; \forall [\sigma_1, \sigma_2] \in G_{m_1} \times G_{m_2} \overset{\text{def}}{=} A \end{aligned}$$

konstruieren. Deren Komposition ergibt eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$[\sigma_1^a \circ \sigma_1^b, \sigma_2 \circ 1] \to [\sigma_1 \circ 1, \sigma_2^a \circ \sigma_2^b] \; \forall [\sigma_1, \sigma_2] \in A .$$

Da ferner $m_1 \cdot m_2 = m_1 \cdot m_2$ gilt, folgt die Behauptung dieses Satzes dann aus Hilfssatz 1. (Alle homogenen Funktionen und Homogenitätstransformationen dieses Beweises haben A als Parameterbereich.)

Konstruktion von f_1. Wegen $(r, m_1) = 1$ und $m_1 \neq 0$ existieren nichtnegative t_1, t_2 mit $t_1 \equiv -1 \bmod m_1$, $t_2 \cdot r \equiv 1 \bmod m_1$. g_{t_1,t_2} ist dann eine homogene Funktion von Typ $[\sigma_1^a \circ \sigma_1^b] \dashrightarrow [1 \circ \bar{\sigma}_1]$. Fassen wir sie als Funktion der ersten Koordinate auf und multiplizieren sie von rechts an die zweite Koordinate an, so erhalten wir die Homogenitätstransformation f_1 vom Typ $[\sigma_1^a \circ \sigma_1^b, \sigma_2 \circ 1] \to [\sigma_1^a \circ \sigma_1^b, \sigma_2 \circ \bar{\sigma}_1]$.

Konstruktion von f_2. Zu a gibt es $\bmod m_1 \cdot m_2$ eine nichtnegative ganze Zahl t_3. g_{t_3,t_3} ist dann eine homogene Funktion vom Typ $[\sigma_2 \circ \bar{\sigma}_1] \dashrightarrow [\sigma_2^a \circ \bar{\sigma}_1^a]$. Zu b gibt es $\bmod m_1 \cdot m_2$ ein nichtnegatives t_4, zu $-b$ ebenso ein nichtnegatives t_5. g_{t_4,t_5} ist dann eine homogene Funktion vom Typ $[\sigma_2 \circ \bar{\sigma}_1] \dashrightarrow [\bar{\sigma}_1^b \circ \sigma_2^b]$. g_{t_3,t_3} und g_{t_4,t_5} fassen wir als Funktionen der zweiten Koordinate auf und multiplizieren g_{t_3,t_3} von links, g_{t_4,t_5} von rechts an die erste Koordinate an. So erhalten wir die Homogenitätstransformation f_2 vom Typ $[\sigma_1^a \circ \sigma_1^b, \sigma_2 \circ \bar{\sigma}_1] \to [\sigma_2^a \circ \sigma_2^b, \sigma_2 \circ \bar{\sigma}_1]$.

Konstruktion von f_3. Analog zu der Konstruktion von f_1 gibt es eine homogene Funktion vom Typ $[\sigma_2^a \circ \sigma_2^b] \dashrightarrow [1 \circ \bar{\sigma}_2]$. Fassen wir

sie als Funktion der ersten Koordinate auf und multiplizieren sie gemäß (33_1) von links an die zweite Koordinate an, so erhalten wir die Homogenitätstransformation f_3 vom Typ $[\sigma_2^a \circ \sigma_2^b, \sigma_2 \circ \bar{\sigma}_1] \to [\sigma_2^a \circ \sigma_2^b, 1 \circ \bar{\sigma}_1]$.

Konstruktion von f_4. $g_{\bar{1},1}$ ist eine homogene Funktion vom Typ $[1 \circ \bar{\sigma}_2] \dashrightarrow [\sigma_2 \circ 1]$ und, da $S^3 \xrightarrow{g_{\bar{1},1}} S^3 \xrightarrow{g_{\bar{1},1}} S^3$ mit id_{S^3} übereinstimmt, sogar

(54) eine Homogenitätstransformation vom Typ $[1 \circ \bar{\sigma}_2] \to [\sigma_2 \circ 1]$.

Daraus gewinnen wir durch Verlängern die Homogenitätstransformation f_4 vom Typ $[\sigma_2^a \circ \sigma_2^b, 1 \circ \bar{\sigma}_2] \to [\sigma_2^a \circ \sigma_2^b, \sigma_2 \circ 1]$.

Konstruktion von f_5. Die Homogenitätstransformation f_5 vom Permutationstyp $[\sigma_2^a \circ \sigma_2^b, \sigma_1 \circ 1] \to [\sigma_1 \circ 1, \sigma_2^a \circ \sigma_2^b]$ existiert gem. (29), q.e.d.

Satz 6. *Ist bei $L_{m_1}(r_1) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s)$; $s \geqslant 2$ mindestens eine Verdrillungszahl $r_{i_1} \bmod m_{i_1}$ zu ± 1 kongruent und existiert ferner mindestens ein Indexpaar $i_2 \neq i_3$ mit $(m_{i_2}, m_{i_3}) = 1$, so gibt es eine Teilerkette $e_2 | \ldots | e_s$ derart, daß*

$$L_{m_1}(r_1) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s) \approx S^3 \times L_{e_2}(1) \times \ldots \times L_{e_s}(1)$$

gilt.

Beweis. Im Falle, daß i_1 mit einem der Indizes i_2, i_3 identisch ist (o. B. d. A: $i_1 = i_2 = 1, i_3 = 2$), schließen wir folgendermaßen:

$$L_{m_1}(r_1) \times L_{m_2}(r_2) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s) \overset{(7)}{\approx} L_{m_1}(1) \times L_{m_2}(r_2) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s)$$
$$\overset{\text{Satz 1}}{\approx} S^3 \times L_{m_1 \cdot m_2}(1) \times L_{m_3}(r_3) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s).$$

Wenden wir auf die letztgenannte Mannigfaltigkeit Satz 4 an, so folgt die Behauptung.

Im Falle, daß i_1 von i_2 und i_3 verschieden ist, können wir o. B. d. A. $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3$ annehmen. Wir werden eine ganze Zahl r mit

(55) $$(r, m_1 \cdot m_2) = 1$$

und

(56) $$r \equiv r_2 \bmod m_2$$

konstruieren. Dann folgt

$$L_{m_1}(r_1) \times L_{m_2}(r_2) \times L_{m_3}(r_3) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s)$$
$$\overset{(7)}{\approx} L_{m_1}(1) \times L_{m_2}(r) \times L_{m_3}(r_3) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s)$$
$$\overset{\text{Satz 5}}{\approx} L_{m_1}(r) \times L_{m_2}(1) \times L_{m_3}(r_3) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s)$$
$$\overset{\text{Satz 1}}{\approx} L_{m_1}(r) \times S^3 \times L_{m_2 \cdot m_3}(1) \times L_{m_4}(r_4) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s),$$

und die Behauptung ergibt sich, wenn wir auf die letztgenannte Mannigfaltigkeit Satz 4 anwenden.

Konstruktion von r. Im Falle $m_1 = m_2 = 1$ ist $r = 1$ möglich. Im andern Fall seien $m_1 = p_1^{k_{11}} \cdot \ldots \cdot p_t^{k_{1t}}$, $m_2 = p^{k_{21}} \cdot \ldots \cdot p_t^{k_{2t}}$; $t \geqslant 1$; $k_{ij} \geqslant 0$ die Primzahlpotenzzerlegungen von m_1, m_2 durch die Gesamtheit aller Primzahlen, die mindestens eine der Zahlen m_1, m_2 teilen. Nach dem Hauptsatz über simultane Kongruenzen existiert für $j = 1, \ldots, t$ ein r mit

$$r \equiv \begin{cases} r_2 \bmod p_j^{k_{2j}} & \text{für } k_{2j} > 0, \\ 1 \bmod p_j & \text{für } k_{2j} = 0, \end{cases}$$

denn die Moduln sind paarweise relativ prim.

Daraus folgt $r \equiv r_2 \bmod p_j^{k_{2j}} \forall j$, also (56). Wegen $(r_2, m_2) = 1$ folgt aus den simultanen Kongruenzen ferner, daß r zu allen Primfaktoren von m_1 relativ prim ist, also $(r, m_1) = 1$. Zusammen mit $(r, m_2) \overset{(56)}{=} (r_2, m_2) \overset{(4)}{=} 1$ ergibt sich dann auch (55), q.e.d.

Satz 7. *$L_{m_1 \cdot n}(r_1) \times L_{m_2}(1) \times \ldots \times L_{m_s}(1) \approx L_{m_1}(1) \times L_{m_2 \cdot n_2}(r_2) \times \ldots \times \times L_{m_s \cdot n_s}(r_s)$ für $s \geqslant 2$, natürliche Zahlen $m_1, \ldots, m_s, n, n_2, \ldots, n_s$ mit $n = n_2 \cdot \ldots \cdot n_s$, $(m_1, n) = (m_2, n_2) = \ldots = (m_s, n_s) = 1$, sowie im Falle $s \geqslant 3$ paarweise relativ primen n_i. Ferner mögen $r_1, \ldots, r_s$ die Kongruenzbedingungen*

$$r_1 \equiv \begin{cases} 1 \bmod m_1, \\ -1 \bmod n, \end{cases} \quad r_i \equiv \begin{cases} 1 \bmod m_i, \\ -1 \bmod n_i, \end{cases} \quad \textit{für } i \geqslant 2 \textit{ erfüllen.}$$

Beweis. $n_2' \ldots n_s'$ seien vermöge

$$n_i' = n / n_i \tag{57}$$

definierte natürliche Zahlen. Mit ihnen werden wir die Folge der Homogenitätstransformationen

$$[\mu_1 \circ \nu, \mu_2 \circ 1, \ldots, \mu_s \circ 1] \xrightarrow{f_1} [\mu_1 \circ \nu, \mu_2 \circ \nu^{n_2'}, \ldots, \mu_s \circ \nu^{n_s'}]$$
$$\xrightarrow{f_2} [\mu_1 \circ 1, \mu_2 \circ \nu^{n_2'}, \ldots, \mu_s \circ \nu^{n_s'}] \forall [\nu, \mu_1, \ldots, \mu_s] \in G_n \times G_{m_1} \times \ldots \times G_{m_s} \overset{\text{def}}{=} A$$

konstruieren. Deren Komposition ergibt eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$\begin{aligned} &[\mu_1 \circ \nu, \mu_2 \circ 1, \ldots, \mu_s \circ 1] \\ &\qquad \to [\mu_1 \circ 1, \mu_2 \circ \nu^{n_2'}, \ldots, \mu_s \circ \nu^{n_s'}] \forall [\nu, \mu_1, \ldots, \mu_s] \in A. \end{aligned} \tag{58}$$

Wegen $(m_1, n) = (m_2, n_2) = \ldots = (m_s, n_s) = 1$ existieren ganzzahlige $u_1, \ldots, u_s, v_1, \ldots, v_s$ mit

$$\begin{matrix} u_1 \cdot n \equiv 1 \bmod m_1, & u_i \cdot n_i \equiv 1 \bmod m_i \\ v_1 \cdot m_1 \equiv 1 \bmod n, & v_i \cdot m_i \equiv 1 \bmod n_i \end{matrix} \quad \text{für } i \geqslant 2. \tag{59}$$

Wir setzen

$$\begin{matrix} a_1 = u_1 \cdot n, & a_i = u_i \cdot n_i \\ b_1 = v_1 \cdot m_1, & b_i = v_i \cdot m_i \end{matrix} \quad \text{für } i \geqslant 2$$

und erhalten

$$a_1 + b_1 \equiv 1 \begin{cases} \bmod m_1, \\ \bmod n \end{cases}$$

und wegen $(m_1, n) = 1$: $a_1 + b_1 \equiv 1 \bmod m_1 \cdot n$. Ferner gilt

$$a_1 - b_1 \equiv \begin{cases} 1 \bmod m_1, \\ -1 \bmod n, \end{cases} \quad \text{also} \quad a_1 - b_1 \equiv r_1 \begin{cases} \bmod m_1, \\ \bmod n \end{cases}$$

und wegen $(m_1, n) = 1$: $a_1 - b_1 \equiv r_1 \bmod m_1 \cdot n$. Analog dazu gilt für $i \geqslant 2$: $a_i + b_i \equiv 1 \bmod m_i \cdot n_i$, $a_i - b_i \equiv r_i \bmod m_i \cdot n_i$. Daher können a_i, b_i in (12) für $L_{m_1 \cdot n}(r_1), L_{m_2 \cdot n_2}(r_2), \ldots, L_{m_s \cdot n_s}(r_s)$ verwendet werden.

η: $G_{m_1 \cdot n} \times G_{m_2} \times \ldots \times G_{m_s} \to G_n \times G_{m_1} \times \ldots \times G_{m_s}$ sei durch $\eta[\sigma_1, \ldots, \sigma_s] = [\sigma_1^{v_1 \cdot m_1}, \sigma_1^{u_1 \cdot n}, \sigma_2, \ldots, \sigma_s]$ definiert. Vermöge η substituieren wir in (58) den Parameter und erhalten eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$\begin{aligned} &[\sigma_1^{a_1} \circ \sigma_1^{b_1}, \sigma_2 \circ 1, \ldots, \sigma_s \circ 1] \\ &\quad \to [\sigma_1^{a_1} \circ 1, \sigma_2 \circ \sigma_1^{v_1 \cdot m_1 \cdot n_2'}, \ldots, \sigma_s \circ \sigma_1^{v_1 \cdot m_1 \cdot n_s'}] \forall [\sigma_1, \ldots, \sigma_s] \\ &\qquad \in G_{m_1 \cdot n} \times G_{m_2} \times \ldots \times G_{m_s}. \end{aligned}$$

Wir verifizieren jetzt, daß diese die Bedingungen von Hilfssatz 1 erfüllt: $\sigma_1^{a_1} = (\sigma_1^n)^{u_1}$ ist in G_{m_1} enthalten. Wir setzen $\sigma_i' = \sigma_i \cdot \sigma_1^{v_1 \cdot m_1 \cdot n_i'}$ für $i \geqslant 2$. Es gilt $\sigma_i' \in G_{m_i \cdot n_i}$, da $\sigma_i \in G_{m_i}$ und

$$(60) \qquad \sigma_1^{v_1 \cdot m_1 \cdot n_i'} \in G_{n_i}$$

$$\text{gilt wegen } (\sigma_1^{v_1 \cdot m_1 \cdot n_i'})^{n_i} \overset{(57)}{=} \sigma_1^{v_1 \cdot m_1 \cdot n} = (\sigma_1^{m_1 \cdot n})^{v_1} = 1^{v_1} = 1.$$

Mit diesen σ_i' erhalten wir für die rechte Seite der zu prüfenden Homogenitätstransformation

$$(\sigma_i')^{a_i} = \sigma_i^{u_i \cdot n_i} \cdot \sigma_1^{v_1 \cdot m_1 \cdot n_i' \cdot u_i \cdot n_i} \overset{(59),(60)}{=} \sigma_i$$

und

$$(\sigma_i')^{b_i} = \sigma_i^{m_i \cdot v_i} \cdot (\sigma_1^{v_1 \cdot m_1 \cdot n_i'})^{m_i \cdot v_i} = 1 \cdot (\sigma_1^{v_1 \cdot m_1 \cdot n_i'})^{m_i \cdot v_i} \overset{(60),(59)}{=} \sigma_1^{v_1 \cdot m_1 \cdot n_i'}.$$

Ferner folgt aus $n = n_2 \cdot \ldots \cdot n_s$: $(m_1 \cdot n) \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_s = m_1 \cdot (m_2 \cdot n_2) \cdot \ldots \cdot (m_s \cdot n_s)$, so daß sich die Behauptung dieses Satzes aus Hilfssatz 1 ergibt.

Konstruktion von f_1. Wegen $(m_1, n) = 1$ und $m_1 \cdot n \neq 0$ gibt es nichtnegative $t_2, \ldots, t_s$ mit

$$t_i \equiv \begin{cases} 0 \bmod m_1, \\ n_i' \bmod n. \end{cases}$$

Die zugehörigen g_{t_i, t_i} sind dann homogene Funktionen vom Typ

$$[\mu_1 \circ \nu] \cdots\rangle [1 \circ \nu^{n_i'}] \forall [\nu, \mu_1, \ldots, \mu_s] \in A.$$

Fassen wir sie als Funktionen der ersten Koordinate auf und multiplizieren sie von rechts an die zweite Koordinate an, so ergeben sich die Homogenitätstransformationen

$$[\mu_1 \circ \nu, \mu_i \circ 1] \to [\mu_1 \circ \nu, \mu_i \circ \nu^{n_i'}]; \quad i = 2, \ldots, s, \ \forall [\nu, \mu_1, \ldots, \mu_s] \in A.$$

Durch Verlängern erhalten wir daraus die Folge der Homogenitätstransformationen

$$\begin{aligned} [\mu_1 \circ \nu, \mu_2 \circ 1, \ldots, \mu_s \circ 1] &\to [\mu_1 \circ \nu, \mu_2 \circ \nu^{n_2'}, \mu_3 \circ 1, \ldots, \mu_s \circ 1] \to \cdots \\ &\to [\mu_1 \circ \nu, \mu_2 \circ \nu^{n_2'}, \ldots, \mu_{s-1} \circ \nu^{n_{s-1}'}, \mu_s \circ 1] \\ &\to [\mu_1 \circ \nu, \mu_2 \circ \nu^{n_2'}, \ldots, \mu_s \circ \nu^{n_s'}] \forall [\nu, \mu_1, \ldots, \mu_s] \in A, \end{aligned}$$

deren Komposition f_1 ergibt.

Konstruktion von f_2. Im Falle $s \geqslant 3$ betrachten wir die Zahlen $n_2 \cdot \ldots \cdot n_{i-1}, n_i$; $3 \leqslant i \leqslant s$. Diese sind nach Voraussetzung zueinander relativ prim. Nach (38) gibt es daher jeweils eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$(61) \qquad [\tau_i \circ 1, \nu_i \circ 1] \to [1 \circ 1, \tau_i \cdot \nu_i \circ 1] \forall [\tau_i, \nu_i] \in G_{n_2 \cdot \ldots \cdot n_{i-1}} \times G_{n_i}.$$

η_i: $G_{n_2} \times \ldots \times G_{n_s} \to G_{n_2 \cdot \ldots \cdot n_{i-1}} \times G_{n_i}$ sei durch $\eta_i[\nu_2, \ldots, \nu_s] = [\nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_{i-1}, \nu_i]$ definiert. Vermöge η_i substituieren wir in (61) den Parameter und erhalten Homogenitätstransformationen vom Typ

$$\begin{aligned} &[\nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_{i-1} \circ 1, \nu_i \circ 1] \\ &\quad \to [1 \circ 1, \nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_i \circ 1] \forall [\nu_2, \ldots, \nu_s] \in G_{n_2} \times \ldots \times G_{n_s}; \quad i = 3, \ldots, s. \end{aligned}$$

Durch Verlängern erhalten wir daraus die Folge der Homogenitätstransformationen

$$\begin{aligned} (62) \qquad [\nu_2 \circ 1, \nu_3 \circ 1, \ldots, \nu_s \circ 1] &\to [1 \circ 1, \nu_2 \cdot \nu_3 \circ 1, \nu_4 \circ 1, \ldots, \nu_s \circ 1] \to \ldots \\ &\to [1 \circ 1, \ldots, \nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_{s-1} \circ 1, \nu_s \circ 1] \\ &\to [1 \circ 1, \ldots, 1 \circ 1, \nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_s \circ 1] \forall [\nu_2, \ldots, \nu_s] \in G_{n_2} \times \ldots \times G_{n_s}. \end{aligned}$$

Die Projektion von $S_2^3 \times \ldots \times S_s^3$ auf die letzte Koordinate ist eine homogene Funktion vom Typ

$$(63) \qquad [1 \circ 1, \ldots, 1 \circ 1, \nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_s \circ 1] \dashrightarrow [\nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_s \circ 1] \; \forall [\nu_2, \ldots, \nu_s] \in G_{n_2} \times \ldots \times G_{n_s},$$

so daß wir aus der Komposition von (62) und (63) eine homogene Funktion vom Typ

$$(64) \qquad [\nu_2 \circ 1, \nu_3 \circ 1, \ldots, \nu_s \circ 1] \dashrightarrow [\nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_s \circ 1] \; \forall [\nu_2, \ldots, \nu_s] \in G_{n_2} \times \ldots \times G_{n_s}$$

erhalten.

Im Falle $s = 2$ ist (64) trivialerweise durch die identische Abbildung von S^3 auf sich gegeben. Aus (57) und der paarweisen Teilerfremdheit der n_i' für $s \geqslant 3$ folgt $(n_i', n_i) = 1$; $i = 2, \ldots, s$. Daher existieren ganzzahlige l_i mit

$$(65) \qquad l_i \cdot n_i' \equiv 1 \bmod n_i.$$

Wegen $(m_i, n_i) = 1$; $i \geqslant 2$ und $m_i \cdot n_i \neq 0$ gibt es nichtnegative t_{i_1}, t_{i_2} mit

$$t_{i_1} \equiv \begin{cases} 0 \bmod m_i, \\ -l_i \bmod n_i, \end{cases} \qquad t_{i_2} \equiv \begin{cases} 0 \bmod m_i, \\ l_i \bmod n_i. \end{cases}$$

Die Funktionen $g_{t_{i_1}, t_{i_2}}$ sind dann wegen $\nu^{n_i'} \in G_{n_i}$ homogen vom Typ

$$[\mu_i \circ \nu^{n_i'}] \dashrightarrow [\bar{\nu}^{n_i' \cdot l_i} \circ 1] \; \forall [\nu, \mu_1, \ldots, \mu_s] \in A; \qquad i \geqslant 2.$$

$\Pi g_{t_{i_1}, t_{i_2}}$: $S_2^3 \times \ldots \times S_s^3 \to S_2^3 \times \ldots \times S_s^3$ ist folglich eine homogene Funktion vom Typ

$$(66) \qquad [\mu_2 \circ \nu^{n_2'}, \ldots, \mu_s \circ \nu^{n_s'}] \dashrightarrow [\bar{\nu}^{n_2' \cdot l_2} \circ 1, \ldots, \bar{\nu}^{n_s' \cdot l_s} \circ 1] \; \forall [\nu, \mu_1, \ldots, \mu_s] \in A.$$

η': $A \to G_{n_2} \times \ldots \times G_{n_s}$ sei durch $\eta'[\nu, \mu_1, \ldots, \mu_s] = [\bar{\nu}^{n_2' \cdot l_2}, \ldots, \bar{\nu}^{n_s' \cdot l_s}]$ definiert. (Diese Definition ist wegen $(\bar{\nu}^{n_i'})^{n_i} \overset{(57)}{=} \bar{\nu}^{n} = 1$ möglich.) Vermöge η' substituieren wir in (64) den Parameter und erhalten eine homogene Funktion vom Typ

$$(67) \qquad [\bar{\nu}^{n_2' \cdot l_2} \circ 1, \ldots, \bar{\nu}^{n_s' \cdot l_s} \circ 1] \dashrightarrow [\bar{\nu}^{\sum_{i=2}^{s} n_i' \cdot l_i} \circ 1] \; \forall [\nu, \mu_1, \ldots, \mu_s] \in A.$$

Aus (57) und (65) folgt $n_i' \cdot l_i \equiv \delta_{ij} \bmod n_j$; $i \geqslant 2$, $j \geqslant 2$. Also gilt

$$(68) \qquad \sum_{i=2}^{s} n_i' \cdot l_i \equiv \sum_{i=2}^{s} \delta_{ij} = 1 \bmod n_j; \qquad j \geqslant 2.$$

Da die n_j für $s \geqslant 3$ paarweise teilerfremd sind, folgt aus (68) und $n = n_2 \cdot \ldots \cdot n_s$:

$$\sum_{i=2}^{s} n_i' \cdot l_i \equiv 1 \bmod n.$$

Die Komposition von (66) und (67) ergibt unter Berücksichtigung dieser Beziehung eine homogene Funktion vom Typ

$$[\mu_2 \circ \nu^{n_2'}, \ldots, \mu_s \circ \nu^{n_s'}] \cdots\rangle [\bar{\nu} \circ 1] \forall [\nu, \mu_1, \ldots, \mu_s] \in A.$$

Fassen wir sie als Funktion der Koordinaten $2, \ldots, s$ auf und multiplizieren sie von rechts an die erste Koordinate an, so erhalten wir die Homogenitätstransformation f_2 vom Typ

$$[\mu_1 \circ \nu, \mu_2 \circ \nu^{n_2'}, \ldots, \mu_s \circ \nu^{n_s'}]$$
$$\to [\mu_1 \circ 1, \mu_2 \circ \nu^{n_2'}, \ldots, \mu_s \circ \nu^{n_s'}] \forall [\nu, \mu_1, \ldots, \mu_s] \in A, \qquad \text{q.e.d.}$$

SATZ 8. *$L_{m_1 \cdot n}(r_1) \times L_{m_2}(1) \approx L_{m_1 \cdot n}(r_1') \times L_{m_2}(1)$ für natürliche Zahlen m_1, m_2, n mit $(m_1, n) = (m_2, n) = 1$. Ferner mögen r_1 und r_1' die Kongruenzbedingungen $r_1 \equiv 1 \bmod m_1$, $r_1 \cdot (a+b) \equiv a - b \bmod n$, $r_1' \equiv 1 \bmod m_1$, $r_1' \cdot (a+b') \equiv a - b' \bmod n$ erfüllen, wobei a, b, b' ganze Zahlen sind, für welche*

$$(a+b, n) = (a-b, n) = (a+b', n) = (a-b', n) = 1$$

gilt.

Beweis. Wir werden die Folge der Homogenitätstransformationen

$$[\mu_1 \cdot \nu^a \circ \nu^b, \mu_2 \circ 1] \xrightarrow{f_1} [\mu_1 \cdot \nu^a \circ \nu^b, \mu_2 \circ \nu] \xrightarrow{f_2} [\mu_1 \cdot \nu^a \circ \nu^{b'}, \mu_2 \circ \nu]$$
$$\xrightarrow{f_3} [\mu_1 \cdot \nu^a \circ \nu^{b'}, \mu_2 \circ 1] \forall [\nu, \mu_1, \mu_2] \in G_n \times G_{m_1} \times G_{m_2} \overset{\text{def}}{=} A$$

konstruieren. Deren Komposition ergibt eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$[\mu_1 \cdot \nu^a \circ \nu^b, \mu_2 \circ 1] \to [\mu_1 \cdot \nu^a \circ \nu^{b'}, \mu_2 \circ 1] \forall [\nu, \mu_1, \mu_2] \in A. \tag{69}$$

Wegen $(m_1, n) = 1$ gibt es eine ganze Zahl u mit $u \cdot n \equiv 1 \bmod m_1$. Aus $(m_1, n) = (a + b^{(')}, n) = 1$ folgt die Existenz ganzzahliger v_1, v_1' mit

$$v_1^{(')} \cdot m_1 \cdot (a + b^{(')}) \equiv 1 \bmod n. \tag{70}$$

Wir setzen $a_1^{(')} = u \cdot n + v_1^{(')} \cdot m_1 \cdot a$, $b_1^{(')} = v_1^{(')} \cdot m_1 \cdot b^{(')}$ und erhalten

$$a_1^{(')} + b_1^{(')} \equiv 1 \begin{cases} \bmod m_1, \\ \bmod n \end{cases}$$

und wegen $(m_1, n) = 1$

$$a_1^{(')} + b_1^{(')} \equiv 1 \bmod m_1 \cdot n. \tag{71}$$

Ferner gilt

$$a_1^{(')} - b_1^{(')} \equiv 1 \equiv r_1 \bmod m_1, \tag{72}$$

sowie $a_1^{(')} - b_1^{(')} \equiv v_1^{(')} \cdot m_1 \cdot (a - b^{(')}) \overset{\text{n.V.}}{\equiv} v_1^{(')} \cdot m_1 \cdot (a + b^{(')}) \cdot r_1^{(')} \bmod n$, also wegen (70)

$$a_1^{(')} - b_1^{(')} \equiv r_1^{(')} \bmod n. \tag{73}$$

Die Beziehungen (72) und (73) ergeben wegen der Teilerfremdheit von m_1 und n

$$a_1^{(')} - b_1^{(')} \equiv r_1^{(')} \bmod m_1 \cdot n. \tag{74}$$

(71) und (74) zeigen, daß $a_1^{(')}, b_1^{(')}$ in (12) für $L_{m_1 \cdot n}(r_1^{(')})$ verwendet werden können

$$\eta\colon G_{m_1 \cdot n} \times G_{m_2} \to G_n \times G_{m_1} \times G_{m_2}$$

sei durch $\eta[\sigma_1, \sigma_2] = [\sigma_1^{v_1 \cdot m_1}, \sigma_1^{u \cdot n}, \sigma_2]$ definiert. Vermöge η substituieren wir in (69) den Parameter und erhalten eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$[\sigma_1^{a_1} \circ \sigma_1^{b_1}, \sigma_2 \circ 1] \to [\sigma_1^{u \cdot n + v_1 \cdot m_1 \cdot a} \circ \sigma_1^{v_1 \cdot m_1 \cdot b'}, \sigma_2 \circ 1] \; \forall [\sigma_1, \sigma_2] \in G_{m_1 \cdot n} \times G_{m_2}.$$

Wir verifizieren jetzt, daß diese die Bedingungen von Hilfssatz 1 erfüllt:

Aus $(m_1, n) = 1$ und $(v_1', n) \overset{(70)}{=} 1$ folgt die Existenz eines ganzzahligen v mit

$$v \equiv 1 \bmod m_1, \qquad v \cdot v_1' \equiv v_1 \bmod n. \tag{75}$$

Für $\sigma_1' \overset{\text{def}}{=} \sigma_1^v \in G_{m_1 \cdot n}$ gilt

$$\sigma_1'^{a_1'} = \sigma_1^{v \cdot (u \cdot n + v_1' \cdot m_1 \cdot a)} = (\sigma_1^n)^{v \cdot u} \cdot (\sigma_1^{m_1})^{v \cdot v_1' a} \overset{(75)}{=} \sigma_1^{u \cdot n} \cdot \sigma_1^{m_1 \cdot v_1 \cdot a} = \sigma_1^{u \cdot n + v_1 m_1 \cdot a}$$

und

$$\sigma_1'^{b_1'} = \sigma_1^{v \cdot v_1' \cdot m_1 \cdot b'} = (\sigma_1^{m_1})^{v \cdot v_1' \cdot b'} \overset{(75)}{=} \sigma_1^{m_1 \cdot v_1 \cdot b'}$$

bei der rechten Seite der zu prüfenden Homogenitätstransformation. Ferner gilt $(m_1 \cdot n) \cdot m_2 = (m_1 \cdot n) \cdot m_2$, so daß die Behauptung dieses Satzes aus Hilfssatz 1 folgt.

Konstruktion von f_1. Wegen $(a \pm b, n) = (m_1, n) = 1$ und $m_1 \cdot n \neq 0$ gibt es nichtnegative t_1, t_2 mit

$$t_1 \equiv 0 \bmod m_1, \qquad t_1 \cdot (a + b) \equiv 1 \bmod n,$$
$$t_2 \equiv 0 \bmod m_1, \qquad t_2 \cdot (a - b) \equiv -1 \bmod n.$$

g_{t_1, t_2} ist dann eine homogene Funktion vom Typ

$$[\mu_1 \cdot \nu^a \circ \nu^b] \dashrightarrow [1 \circ \nu] \; \forall [\nu, \mu_1, \mu_2] \in A.$$

Wir fassen sie als Funktion der ersten Koordinate auf und multiplizieren sie von rechts an die zweite Koordinate an. So ergibt sich die Homogenitätstransformation f_1 vom Typ

$$[\mu_1 \cdot \nu^a \circ \nu^b, \mu_2 \circ 1] \to [\mu_1 \cdot \nu^a \circ \nu^b, \mu_2 \circ \nu] \; \forall [\nu, \mu_1, \mu_2] \in A.$$

Konstruktion von f_3. Aus $(a \pm b', n) = (m_1, n) = 1$ und $m_1 \cdot n \neq 0$ folgt analog zu der Konstruktion von f_1 die Existenz einer Homogenitätstransformation vom Typ

$$[\mu_1 \cdot \nu^a \circ \nu^{b'}, \mu_2 \circ 1] \to [\mu_1 \cdot \nu^a \circ \nu^{b'}, \mu_2 \circ \nu] \; \forall [\nu, \mu_1, \mu_2] \in A,$$

aus welcher sich f_3 durch Richtungsumkehrung ergibt.

Konstruktion von f_2. Wegen $(m_2, n) = 1$ und $m_2 \cdot n \neq 0$ gibt es nichtnegative t_3, t_4 mit

$$t_3 \equiv \begin{cases} 0 \bmod m_2, \\ -b + b' \bmod n, \end{cases} \qquad t_4 \equiv \begin{cases} 0 \bmod m_2, \\ b + b' \bmod n. \end{cases}$$

g_{t_3, t_4} ist dann eine homogene Funktion vom Typ

$$[\mu_2 \circ \nu] \dashrightarrow [\nu^{-b} \circ \nu^{b'}] \; \forall [\nu, \mu_1, \mu_2] \in A.$$

Fassen wir sie als Funktion der zweiten Koordinate auf und multiplizieren sie von rechts an die erste Koordinate an, so erhalten wir die Homogenitätstransformation f_2 vom Typ

$$[\mu_1 \cdot \nu^a \circ \nu^b, \mu_2 \circ \nu] \to [\mu_1 \cdot \nu^a \circ \nu^{b'}, \mu_2 \circ \nu] \; \forall [\nu, \mu_1, \mu_2] \in A, \qquad \text{q.e.d.}$$

7. Diffeomorphismen zwischen Produkten mit dreidimensionalen Linsenräumen und zweidimensionalen Sphären als Faktoren

Hilfssatz 4. *Sind a, b, c ganze Zahlen, so gibt es homogene Funktionen vom Typ*

$$[z^a \circ 1] \dashrightarrow [z^{b \cdot a} \circ z^{c \cdot a}] \quad \textit{und} \quad [1 \circ z^a] \dashrightarrow [z^{b \cdot a} \circ z^{c \cdot a}] \; \forall z \in S^1.$$

Beweis. Für $b + c \geqslant 0$, $b - c \geqslant 0$ ist $g_{b+c, b-c}$, für $b + c \geqslant 0$, $b - c \leqslant 0$ ist $g_{b+c, \overline{c-b}}$, für $b + c \leqslant 0$, $b - c \geqslant 0$ ist $g_{-\overline{(b+c)}, b-c}$, für $b + c \leqslant 0$, $b - c \leqslant 0$ ist $g_{-\overline{(b+c)}, \overline{c-b}}$ eine homogene Funktion vom Typ

$$[z^a \circ 1] \dashrightarrow [z^{b \cdot a} \circ z^{c \cdot a}] \; \forall z \in S^1. \tag{76}$$

$g_{1, \bar{1}}$ ist eine homogene Funktion vom Typ

$$[1 \circ z^a] \dashrightarrow [z^a \circ 1] \; \forall z \in S^1. \tag{77}$$

Die Komposition von (77) und (76) ergibt eine homogene Funktion vom Typ

$$[1 \circ z^a] \dashrightarrow [z^{b\cdot a} \circ z^{c\cdot a}]\ \forall z \in S^1, \qquad \text{q.e.d.}$$

HILFSSATZ 5. *a, b, c, d seien ganze Zahlen mit $(a+b, c+d) = (a+b, c-d) = (a-b, c+d) = (a-b, c-d) = 1$. Dann existiert für beliebige ganze Zahlen e, f eine homogene Funktion vom Typ*

$$[z^a \circ z^b, z^c \circ z^d] \dashrightarrow [z^e \circ z^f]\ \forall z \in S^1.$$

Beweis. Für $a+b \geqslant 0$, $a-b \geqslant 0$ ist $g_{a-b,a+b}$, für $a+b \geqslant 0$, $a-b \leqslant 0$ ist $g_{\overline{b-a},a+b}$, für $a+b \leqslant 0$, $a-b \geqslant 0$ ist $g_{a-b,-\overline{(a+b)}}$, für $a+b \leqslant 0$, $a-b \leqslant 0$ ist $g_{\overline{b-a},-\overline{(a+b)}}$ eine homogene Funktion vom Typ

$$[z^a \circ z^b] \dashrightarrow [z^{(a+b)\cdot(a-b)} \circ 1]\ \forall z \in S^1. \tag{78}$$

Durch Verlängern erhalten wir daraus eine homogene Funktion vom Typ

$$[z^a \circ z^b, z^c \circ z^d] \dashrightarrow [z^{(a+b)\cdot(a-b)} \circ 1, z^c \circ z^d]\ \forall z \in S^1. \tag{79}$$

Analog zu (78) gibt es eine homogene Funktion vom Typ

$$[z^c \circ z^d] \dashrightarrow [z^{(c+d)\cdot(c-d)} \circ 1]\ \forall z \in S^1,$$

aus welcher wir durch Verlängern eine homogene Funktion vom Typ

$$[z^{(a+b)\cdot(a-b)} \circ 1, z^c \circ z^d] \dashrightarrow [z^{(a+b)\cdot(a-b)} \circ 1, z^{(c+d)\cdot(c-d)} \circ 1]\ \forall z \in S^1 \tag{80}$$

gewinnen. Wir setzen $u = (a+b)\cdot(a-b)$, $v = (c+d)\cdot(c-d)$ und erhalten als Komposition von (79) und (80) eine homogene Funktion vom Typ

$$[z^a \circ z^b, z^c \circ z^d] \dashrightarrow [z^u \circ 1, z^v \circ 1]\ \forall z \in S^1. \tag{81}$$

Aus der Definition von u und v sowie den vorausgesetzten Teilerfremdheitseigenschaften folgt $(u, v) = 1$.

Daraus ergibt sich weiter

$$(u, u \pm v) = 1 \tag{82}$$

sowie

$$(u+v, u-v) = \begin{cases} 2, & \text{wenn } u, v \text{ beide ungerade sind,} \\ 1, & \text{wenn } u \not\equiv v \bmod 2. \end{cases} \tag{83}$$

Wegen (83) gibt es ganze Zahlen t_1, t_2 mit $t_1\cdot(u+v) + t_2\cdot(u-v) = 2$. Dann gilt für $x = t_1\cdot(u+v) = 2 - t_2\cdot(u-v)$

$$x \equiv \begin{cases} 0 \bmod (u+v), \\ 2 \bmod (u-v). \end{cases} \tag{84}$$

Aus (82) folgt $(u, u^2-v^2) = 1$. Daher gibt es ein ganzzahliges t_3 mit

(85) $$t_3\cdot(u^2-v^2) \equiv 1 \bmod u.$$

$y = x+t_3\cdot(1-x)\cdot(u^2-v^2)$ erfüllt die Kongruenzbeziehungen

(86) $$y \overset{(84)}{\equiv} 0 \bmod (u+v), \quad y \overset{(84)}{\equiv} 2 \bmod (u-v), \quad y \overset{(85)}{\equiv} x+(1-x) = 1 \bmod u.$$

Nach Hilfssatz 4 gibt es homogene Funktionen vom Typ

$$[z^u\circ 1] \dashrightarrow [z^u\circ 1] \text{ und } [z^v\circ 1] \dashrightarrow [1\circ z^v]\,\forall z\in S^1.$$

Deren Produkt gemäß (35) ist eine homogene Funktion vom Typ

(87) $$[z^u\circ 1, z^v\circ 1] \dashrightarrow [z^u\circ z^v]\,\forall z\in S^1.$$

Wegen (86) gibt es ganze Zahlen t_4, t_5 mit

(88) $$y = t_4(u+v), \quad y-2 = t_5\cdot(u-v).$$

Für $t_4 \geqslant 0, t_5 \geqslant 0$ ist g_{t_4,t_5}, für $t_4 \geqslant 0, t_5 \leqslant 0$ ist $g_{t_4,-\bar{t}_5}$, für $t_4 \leqslant 0$, $t_5 \geqslant 0$ ist $g_{-\bar{t}_4,t_5}$, für $t_4 \leqslant 0, t_5 \leqslant 0$ ist $g_{-\bar{t}_4,-\bar{t}_5}$ eine homogene Funktion vom Typ

(89) $$[z^u\circ z^v] \dashrightarrow [z^{y-1}\circ z]\,\forall z\in S^1.$$

(Im Falle $t_4 \geqslant 0$, $t_5 \geqslant 0$ ergibt sich die Homogenitätseigenschaft für $q = [z_1, z_2]\in S^3$ aus

$$g_{t_4,t_5}(z^u\cdot q\cdot z^v) \overset{(10)}{=} g_{t_4,t_5}[z^{u+v}\cdot z_1, z^{u-v}\cdot z_2] \overset{(36)}{=} \frac{[z^{t_4\cdot(u+v)}\cdot z_1^{t_4}, z^{t_5\cdot(u-v)}\cdot z_2^{t_5}]}{\sqrt{|z^{t_4\cdot(u+v)}\cdot z_1^{t_4}|^2+|z^{t_5\cdot(u-v)}\cdot z_2^{t_5}|^2}}$$

$$\overset{(88)}{=} \frac{[z^y\cdot z_1^{t_4}, z^{y-2}\cdot z_2^{t_5}]}{\sqrt{|z_1^{t_4}|^2+|z_2^{t_5}|^2}} \overset{(10)}{=} z^{y-1}\cdot\frac{[z_1^{t_4}, z_2^{t_5}]}{\sqrt{|z_1^{t_4}|^2+|z_2^{t_5}|^2}}\cdot z \overset{(36)}{=} z^{y-1}\cdot g_{t_4,t_5}(q)\cdot z;$$

der Nachweis in den übrigen Fällen verläuft analog.)

Die Komposition von (87) und (89) ergibt eine homogene Funktion vom Typ

(90) $$[z^u\circ 1, z^v\circ 1] \dashrightarrow [z^{y-1}\circ z]\,\forall z\in S^1.$$

Nach (86) gibt es eine ganze Zahl t_6 mit $1-y = t_6\cdot u$. Folglich existiert nach Hilfssatz 4 eine homogene Funktion vom Typ

(91) $$[z^u\circ 1] \dashrightarrow [1\circ z^{1-y}]\,\forall z\in S^1.$$

Bilden wir gemäß (35) das Produkt der homogenen Funktionen (91) und (90), so erhalten wir eine homogene Funktion vom Typ

(92) $$[z^u\circ 1, z^v\circ 1] \dashrightarrow [1\circ z]\,\forall z\in S^1.$$

Ferner existiert nach Hilfssatz 4 eine homogene Funktion vom Typ

(93) $$[1\circ z] \dashrightarrow [z^e\circ z^f]\,\forall z\in S^1.$$

Die Komposition von (81), (92) und (93) liefert eine homogene Funktion von demjenigen Typ, wie er in der Behauptung verlangt ist, q.e.d.

SATZ 9. *Es gilt*

$$S^2 \times L_{m_1}(r_1) \times L_{m_2}(r_2) \times L_{m_3}(r_3) \approx S^2 \times S^3 \times S^3 \times L_{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3}(1)$$

für $(m_1, m_2) = (m_1, m_3) = (m_2, m_3) = 1$.

Beweis. Wegen $(m_1, m_2) = 1$ gibt es ein r_1' mit

$$r_1' \equiv \begin{cases} r_1 \bmod m_1, \\ 1 \bmod m_2, \\ 1 \bmod 2. \end{cases} \tag{94}$$

(Die Kongruenzeigenschaft mod 2 ist von selbst erfüllt, wenn eine der Zahlen m_1, m_2 gerade ist, da dann $(r_1', 2) = (r_1', m_1) = (r_1, m_1) \overset{(4)}{=} 1$ oder $(r_1', 2) = (r_1', m_2) = (1, m_2) = 1$ gilt. Sind m_1 und m_2 beide ungerade, so kann sie für den Hauptsatz über simultane Kongruenzen zusätzlich gefordert werden.)

Aus (94) folgt

$$(r_1', m_1) = (r_1', m_2) = (r_1', 2) = 1. \tag{95}$$

Zusammen mit $(m_1, m_2) = 1$ ergibt sich daraus analog zu (94) die Existenz eines r_2' mit

$$r_2' \equiv \begin{cases} 1 \bmod m_1, \\ r_2 \bmod m_2, \\ 1 \bmod r_1', \\ 1 \bmod 2. \end{cases} \tag{96}$$

Wir haben folglich

$$(r_2', m_1) = (r_2', m_2) = (r_2', r_1') = (r_2', 2) = 1. \tag{97}$$

Da r_1' und r_2' nach (95) und (97) ungerade sind, sind

$$a_1 = \frac{1+r_1'}{2}, \quad b_1 = \frac{1-r_1'}{2}, \quad a_2 = \frac{1+r_2'}{2}, \quad b_2 = \frac{1-r_2'}{2}$$

ganze Zahlen. Sie erfüllen

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = 1, \tag{98}$$

$$a_1 - b_1 = r_1' \overset{(94)}{\equiv} r_1 \bmod m_1, \qquad a_2 - b_2 = r_2' \overset{(96)}{\equiv} r_2 \bmod m_2,$$

können also in (12) für $L_{m_1}(r_1)$ und $L_{m_2}(r_2)$ verwendet werden. Wegen $(m_1, m_2) = 1$ gibt es ganzzahlige u, v mit

$$u \cdot m_2 \equiv 1 \bmod m_1, \qquad v \cdot m_1 \equiv 1 \bmod m_2. \tag{99}$$

Mit den bis jetzt bestimmten Größen werden wir die Folge der Homogenitätstransformationen

$$\begin{aligned}
&[z\circ 1,\ \sigma_1^{a_1}\circ\sigma_1^{b_1},\ \sigma_2^{a_2}\circ\sigma_2^{b_2}] \xrightarrow{f_1} [z\circ\sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v},\ \sigma_1^{a_1}\circ\sigma_1^{b_1},\ \sigma_2^{a_2}\circ\sigma_2^{b_2}]\\
&\xrightarrow{f_2} [z\circ\sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v},\ z^{m_2\cdot a_1}\circ z^{m_2\cdot b_1},\ \sigma_2^{a_2}\circ\sigma_2^{b_2}]\\
&\xrightarrow{f_3} [z\circ\sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v},\ z^{m_2\cdot a_1}\circ z^{m_2\cdot b_1},\ z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2}]\\
&\xrightarrow{f_4} [1\circ\sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v},\ z^{m_2\cdot a_1}\circ z^{m_2\cdot b_1},\ z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2}]\\
&\xrightarrow{f_5} [\sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v}\circ 1,\ z^{m_2\cdot a_1}\circ z^{m_2\cdot b_1},\ z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2}]\ \forall\,[z,\sigma_1,\sigma_2]\in S^1\times G_{m_1}\times G_{m_2}
\end{aligned}$$

konstruieren. Deren Komposition ergibt eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$\begin{aligned}
(100)\quad &[z\circ 1,\ \sigma_1^{a_1}\circ\sigma_1^{b_1},\ \sigma_2^{a_2}\circ\sigma_2^{b_2}]\\
&\to [\sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v}\circ 1,\ z^{m_2\cdot a_1}\circ z^{m_2\cdot b_1},\ z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2}]\ \forall\,[z,\sigma_1,\sigma_2]\in S^1\times G_{m_1}\times G_{m_2}.
\end{aligned}$$

a_3, b_3 seien für $L_{m_3}(r_3)$ gemäß (12) gewählt. Vermöge der Projektion von $S^1\times G_{m_1}\times G_{m_2}\times G_{m_3}$ nach $S^1\times G_{m_1}\times G_{m_2}$ substituieren wir in (100) den Parameter und erhalten durch anschließendes Verlängern eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$\begin{aligned}
(101)\quad &[z\circ 1,\ \sigma_1^{a_1}\circ\sigma_1^{b_1},\ \sigma_2^{a_2}\circ\sigma_2^{b_2},\ \sigma_3^{a_3}\circ\sigma_3^{b_3}]\\
&\to [\sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v}\circ 1,\ z^{m_2\cdot a_1}\circ z^{m_2\cdot b_1},\ z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2},\ \sigma_3^{a_3}\circ\sigma_3^{b_3}]\ \forall\,[z,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3]\\
&\qquad\qquad \in S^1\times G_{m_1}\times G_{m_2}\times G_{m_3}.
\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $(m_1\cdot m_2, m_3)=1$ gilt, gibt es nach (38) eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$[\sigma\circ 1,\ \sigma_3^{a_3}\circ\sigma_3^{b_3}] \to [1\circ 1,\ \sigma\cdot\sigma_3\circ 1]\ \forall\,[\sigma,\sigma_3]\in G_{m_1\cdot m_2}\times G_{m_3}.$$

$\eta\colon S^1\times G_{m_1}\times G_{m_2}\times G_{m_3}\to G_{m_1\cdot m_2}\times G_{m_3}$ sei durch $\eta[z,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3] = [\sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v},\sigma_3]$ definiert. In der zuletzt genannten Homogenitätstransformation substituieren wir vermöge η den Parameter und erhalten durch anschließendes Verlängern eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$\begin{aligned}
(102)\quad &[\sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v}\circ 1,\ z^{m_2\cdot a_1}\circ z^{m_2\cdot b_1},\ z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2},\ \sigma_3^{a_3}\circ\sigma_3^{b_3}]\\
&\to [1\circ 1,\ z^{m_2\cdot a_1}\circ z^{m_2\cdot b_1},\ z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2},\ \sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v}\cdot\sigma_3\circ 1]\ \forall\,[z,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3]\\
&\qquad\qquad \in S^1\times G_{m_1}\times G_{m_2}\times G_{m_3}.
\end{aligned}$$

Nun gilt

$$(103)\qquad \begin{aligned}
&\big(m_2\cdot(a_1+b_1),\ m_1\cdot(a_2+b_2)\big) \overset{(98)}{=} (m_2, m_1) = 1,\\
&\big(m_2\cdot(a_1+b_1),\ m_1\cdot(a_2-b_2)\big) \overset{(98)}{=} (m_2, m_1\cdot r_2') \overset{(97)}{=} 1,\\
&\big(m_2\cdot(a_1-b_1),\ m_1\cdot(a_2+b_2)\big) \overset{(98)}{=} (m_2\cdot r_1', m_1) \overset{(95)}{=} 1,\\
&\big(m_2\cdot(a_1-b_1),\ m_1\cdot(a_2-b_2)\big) \overset{(98)}{=} (m_2\cdot r_1', m_1\cdot r_2') \overset{(95),(97)}{=} 1.
\end{aligned}$$

Daher gibt es nach Hilfssatz 5 eine homogene Funktion vom Typ

$$(104)\qquad [z^{m_2\cdot a_1}\circ z^{m_2\cdot b_1},\, z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2}] \dashrightarrow [z\circ 1]\,\forall z\in S^1,$$

oder, wenn wir den Parameter vermöge der Projektion von $S^1\times G_{m_1}\times\times G_{m_2}\times G_{m_3}$ nach S^1 substituieren: $\forall[z,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3]\in S^1\times G_{m_1}\times G_{m_2}\times G_{m_3}$. Wir fassen (104) als Funktion der zweiten und dritten Koordinate auf und multiplizieren diese von links an die erste Koordinate an. So erhalten wir eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$(105)\qquad [1\circ 1,\, z^{m_2\cdot a_1}\circ z^{m_2\cdot b_1},\, z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2},\, \sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v}\cdot\sigma_3\circ 1]$$
$$\to [z\circ 1,\, z^{m_2\cdot a_1}\circ z^{m_2\cdot b_1},\, z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2},\, \sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v}\cdot\sigma_3\circ 1]\,\forall[z,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3]$$
$$\in S^1\times G_{m_1}\times G_{m_2}\times G_{m_3}.$$

Nach Hilfssatz 4 gibt es (s. (104)) homogene Funktionen vom Typ

$$[z\circ 1] \dashrightarrow [1\circ z^{-m_2\cdot a_1}],$$
$$[z\circ 1] \dashrightarrow [z^{-m_2\cdot b_1}\circ 1]\,\forall[z,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3]\in S^1\times G_{m_1}\times G_{m_2}\times G_{m_3}.$$

Wir fassen sie als Funktionen der ersten Koordinate auf und multiplizieren die erste von links, die zweite von rechts an die zweite Koordinate an. So erhalten wir eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$(106)\qquad [z\circ 1,\, z^{m_2\cdot a_1}\circ z^{m_2\cdot b_1},\, z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2},\, \sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v}\cdot\sigma_3\circ 1]$$
$$\to [z\circ 1,\, 1\circ 1,\, z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2},\, \sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v}\cdot\sigma_3\circ 1]\,\forall[z,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3]$$
$$\in S^1\times G_{m_1}\times G_{m_2}\times G_{m_3}.$$

Verfahren wir mit der dritten Koordinate analog, so erhalten wir eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$(107)\qquad [z\circ 1,\, 1\circ 1,\, z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2},\, \sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v}\cdot\sigma_3\circ 1]$$
$$\to [z\circ 1,\, 1\circ 1,\, 1\circ 1,\, \sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v}\cdot\sigma_3\circ 1]\,\forall[z,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3]$$
$$\in S^1\times G_{m_1}\times G_{m_2}\times G_{m_3}.$$

Die Komposition von (101), (102), (105), (106) und (107) ergibt eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$[z\circ 1,\, \sigma_1^{a_1}\circ\sigma_1^{b_1},\, \sigma_2^{a_2}\circ\sigma_2^{b_2},\, \sigma_3^{a_3}\circ\sigma_3^{b_3}]$$
$$\to [z\circ 1,\, 1\circ 1,\, 1\circ 1,\, \sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v}\cdot\sigma_3\circ 1]\,\forall[z,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3]$$
$$\in S^1\times G_{m_1}\times G_{m_2}\times G_{m_3}.$$

Da bei dieser $\sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v}\cdot\sigma_3\in G_{m_1\cdot m_2\cdot m_3}$ gilt und $m_1\cdot m_2\cdot m_3 = 1\cdot 1\cdot\cdot(m_1\cdot m_2\cdot m_3)$ erfüllt ist, folgt die Behauptung dieses Satzes dann aus Hilfssatz 1.

Konstruktion von f_1. Analog zu (40) gibt es homogene Funktionen vom Typ

$$(108)\qquad \begin{gathered}[\sigma_1^{a_1}\circ\sigma_1^{b_1}]\cdots\rightarrow[\sigma_1\circ 1],\\ [\sigma_2^{a_2}\circ\sigma_2^{b_2}]\cdots\rightarrow[1\circ\sigma_2]\,\forall\,[z,\sigma_1,\sigma_2]\in S^1\times G_{m_1}\times G_{m_2}\overset{\text{def}}{=}A.\end{gathered}$$

Deren Produkt ist eine homogene Funktion vom Typ

$$(109)\qquad [\sigma_1^{a_1}\circ\sigma_1^{b_1},\,\sigma_2^{a_2}\circ\sigma_2^{b_2}]\cdots\rightarrow[\sigma_1\circ\sigma_2]\,\forall\,[z,\sigma_1,\sigma_2]\in A.$$

Wegen $(m_1, m_2) = 1$, $m_1\cdot m_2 \neq 0$ existieren nichtnegative t_1, t_2 mit

$$t_1 \equiv \begin{cases} -u \bmod m_1,\\ -v \bmod m_2,\end{cases}\qquad t_2 \equiv \begin{cases} +u \bmod m_1,\\ -v \bmod m_2.\end{cases}$$

g_{t_1,t_2} ist eine homogene Funktion vom Typ

$$(110)\qquad [\sigma_1\circ\sigma_2]\cdots\rightarrow[1\circ\sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v}]\,\forall\,[z,\sigma_1,\sigma_2]\in A.$$

Die Komposition von (109) und (110) ergibt eine homogene Funktion vom Typ

$$[\sigma_1^{a_1}\circ\sigma_1^{b_1},\,\sigma_2^{a_2}\circ\sigma_2^{b_2}]\cdots\rightarrow[1\circ\sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v}]\,\forall\,[z,\sigma_1,\sigma_2]\in A.$$

Fassen wir sie als Funktion der zweiten und dritten Koordinate auf und multiplizieren sie von rechts an die erste Koordinate an, so erhalten wir die Homogenitätstransformation f_1 vom Typ

$$[z\circ 1,\,\sigma_1^{a_1}\circ\sigma_1^{b_1},\,\sigma_2^{a_2}\circ\sigma_2^{b_2}]\rightarrow[z\circ\sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v},\,\sigma_1^{a_1}\circ\sigma_1^{b_1},\,\sigma_2^{a_2}\circ\sigma_2^{b_2}]\,\forall\,[z,\sigma_1,\sigma_2]\in A.$$

Konstruktion von f_2. Wegen

$$m_2\cdot u \overset{(99)}{\equiv} \begin{cases} 1 \bmod m_1,\\ 0 \bmod m_2\end{cases}$$

ist $g_{m_2\cdot a_1, m_2\cdot a_1}$ für $m_2\cdot a_1 \geqslant 0$, $g_{-\overline{m_2\cdot a_1},-\overline{m_2\cdot a_1}}$ für $m_2\cdot a_1 \leqslant 0$ eine homogene Funktion vom Typ $[z\circ\sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v}]\cdots\rightarrow[z^{m_2\cdot a_1}\circ\sigma_1^{-a_1}]\,\forall\,[z,\sigma_1,\sigma_2]\in A$. Analog dazu gibt es eine homogene Funktion vom Typ

$$[z\circ\sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v}]\cdots\rightarrow[\sigma_1^{-b_1}\circ z^{m_2\cdot b_1}]\,\forall\,[z,\sigma_1,\sigma_2]\in A.$$

Wir fassen sie als Funktionen der ersten Koordinate auf und multiplizieren die erste von links, die zweite von rechts an die zweite Koordinate an. So erhalten wir die Homogenitätstransformation f_2 vom Typ

$$\begin{aligned}&[z\circ\sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v},\,\sigma_1^{a_1}\circ\sigma_1^{b_1},\,\sigma_2^{a_2}\circ\sigma_2^{b_2}]\\ &\qquad\rightarrow[z\circ\sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v},\,z^{m_2\cdot a_1}\circ z^{m_2\cdot b_1},\,\sigma_2^{a_2}\circ\sigma_2^{b_2}]\,\forall\,[z,\sigma_1,\sigma_2]\in A.\end{aligned}$$

Konstruktion von f_3. Wir nutzen

$$m_1\cdot v \overset{(99)}{\equiv} \begin{cases} 0 \bmod m_1,\\ 1 \bmod m_2\end{cases}$$

aus und erhalten f_3, wenn wir das Verfahren der Konstruktion von f_2 analog auf die dritte Koordinate übertragen.

Konstruktion von f_4. Aus (103) folgt nach Hilfssatz 5 analog zu (104) die Existenz einer homogenen Funktion vom Typ

$$[z^{m_2\cdot a_1}\circ z^{m_2\cdot b_1},\, z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2}] \dashrightarrow [1\circ \bar{z}]\,\forall\,[z,\sigma_1,\sigma_2]\in A.$$

Wir fassen sie als Funktion der zweiten und dritten Koordinate auf und multiplizieren sie von links an die erste Koordinate an. So erhalten wir die Homogenitätstransformation f_4 vom Typ

$$[z\circ\sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v},\, z^{m_2\cdot a_1}\circ z^{m_2\cdot b_1},\, z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2}]$$
$$\to [1\circ\sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v},\, z^{m_2\cdot a_1}\circ z^{m_2\cdot b_1},\, z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2}]\,\forall\,[z,\sigma_1,\sigma_2]\in A.$$

Konstruktion von f_5. $g_{1,\bar{1}}$ ist analog zu (54) eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$[1\circ\sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v}] \to [\sigma_1^{-u}\cdot\sigma_2^{-v}\circ 1]\,\forall\,[z,\sigma_1,\sigma_2]\in A.$$

Daraus ergibt sich f_5 durch Verlängern, q.e.d.

SATZ 10. *Sind die natürlichen Zahlen $m_1,\ldots,m_s$; $s\geqslant 3$ paarweise relativ prim, so gilt:*

$$S^2\times L_{m_1}(r_1)\times\ldots\times L_{m_s}(r_s)\approx S^2\times S_1^3\times\ldots\times S_{s-1}^3\times L_{\Pi m_i}(1).$$

Beweis. $S^2\times L_{m_1}(r_1)\times\ldots\times L_{m_s}(r_s)\overset{\text{Satz 9}}{\approx} S^2\times S_1^3\times S_2^3\times L_{m_1\cdot m_2\cdot m_3}(1)\times$ $\times L_{m_4}(r_4)\times\ldots\times L_{m_s}(r_s)\overset{\text{Satz 2}}{\approx} S^2\times S_1^3\times\ldots\times S_{s-1}^3\times L_{\Pi m_i}(1)$, q.e.d.

SATZ 11. *Es gilt*

$$S^2\times L_{m_1}(r_1)\times L_{m_2}(r_2)\times L_{m_3}(r_3)\approx S^2\times S^3\times L_{m_1\cdot m_2}(1)\times L_{m_3}(1)$$

für $(m_1,m_2)=(m_1,m_3)=1$. (Über (m_2,m_3) ist im Gegensatz zu Satz 9 keine Voraussetzung gemacht.)

Beweis. Bis einschließlich (100) wurde im Beweis von Satz 9 m_3 und insbesondere $(m_1,m_3)=(m_2,m_3)=1$ nicht verwendet. Wir können daher die Bezeichnungen und Ergebnisse desselben bis (100) übernehmen.

Bei (96), (97) können wir r_2' so wählen, daß

$$(r_2',m_3)=1 \tag{111}$$

gilt.

(Denn, da $m_1, m_2, 2$ und wegen $(r_1',2)\overset{(95)}{=}1$ auch r_1' von Null verschieden sind und r_2' nach (97) zu $m_1\cdot m_2\cdot r_1'\cdot 2$ relativ prim ist, gibt es ein r mit

$$(r,\, m_3\cdot m_1\cdot m_2\cdot|r_1'|\cdot 2)\overset{(55)}{=}1 \tag{112}$$

und

$$r\overset{(56)}{\equiv} r_2' \bmod m_1\cdot m_2\cdot|r_1'|\cdot 2. \tag{113}$$

r hat wegen (113) ebenso wie r_2' die Eigenschaften (96), also auch (97). Zusätzlich folgt aus (112) aber $(r, m_3) = 1$, so daß wir, falls r_2' nicht ohnehin (111) erfüllt, r_2' durch r ersetzen können.)

Ferner übernehmen wir aus dem Beweis von Satz 9 (103) und erhalten analog zu (104) aus Hilfssatz 5 eine homogene Funktion vom Typ

$$[z^{m_2 \cdot a_1} \circ z^{m_2 \cdot b_1}, z^{m_1 \cdot a_2} \circ z^{m_1 \cdot b_2}] \dashrightarrow [1 \circ z^{m_2}] \,\forall\, [z, \sigma_1, \sigma_2] \in S^1 \times G_{m_1} \times G_{m_2}.$$

Wir fassen sie als Funktion der zweiten und dritten Koordinate auf und multiplizieren sie von rechts an die erste Koordinate an. So erhalten wir eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$(114) \quad [\sigma_1^{-u} \cdot \sigma_2^{-v} \circ 1, z^{m_2 \cdot a_1} \circ z^{m_2 \cdot b_1}, z^{m_1 \cdot a_2} \circ z^{m_1 \cdot b_2}]$$
$$\to [\sigma_1^{-u} \cdot \sigma_2^{-v} \circ z^{m_2}, z^{m_2 \cdot a_1} \circ z^{m_2 \cdot b_1}, z^{m_1 \cdot a_2} \circ z^{m_1 \cdot b_2}] \,\forall\, [z, \sigma_1, \sigma_2] \in S^1 \times G_{m_1} \times G_{m_2}.$$

Für $a_1 \geqslant 0$ ist $g_{\bar{a}_1, \bar{a}_1}$, für $a_1 \leqslant 0$ ist $g_{-a_1, -a_1}$ eine homogene Funktion vom Typ

$$(115) \quad [\sigma_1^{-u} \cdot \sigma_2^{-v} \circ z^{m_2}] \dashrightarrow \sigma_1^{u \cdot a_1} \cdot \sigma_2^{v \cdot a_1} \circ z^{-m_2 \cdot a_1}] \,\forall\, [z, \sigma_1, \sigma_2] \in S^1 \times G_{m_1} \times G_{m_2}.$$

Analog dazu gibt es eine homogene Funktion vom Typ

$$(116) \quad [\sigma_1^{-u} \cdot \sigma_2^{-v} \circ z^{m_2}] \dashrightarrow [z^{-m_2 \cdot b_1} \circ \sigma_1^{u \cdot b_1} \cdot \sigma_2^{v \cdot b_1}] \,\forall\, [z, \sigma_1, \sigma_2] \in S^1 \times G_{m_1} \times G_{m_2}.$$

Fassen wir sie als Funktionen der ersten Koordinate auf und multiplizieren die erste von links, die zweite von rechts an die zweite Koordinate an, so erhalten wir eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$(117) \quad [\sigma_1^{-u} \cdot \sigma_2^{-v} \circ z^{m_2}, z^{m_2 \cdot a_1} \circ z^{m_2 \cdot b_1}, z^{m_1 \cdot a_2} \circ z^{m_1 \cdot b_2}]$$
$$\to [\sigma_1^{-u} \cdot \sigma_2^{-v} \circ z^{m_2}, \sigma_1^{u \cdot a_1} \sigma_2^{v \cdot a_1} \circ \sigma_1^{u \cdot b_1} \cdot \sigma_2^{v \cdot b_1}, z^{m_1 \cdot a_2} \circ z^{m_1 \cdot b_2}] \,\forall\, [z, \sigma_1, \sigma_2]$$
$$\in S^1 \times G_{m_1} \times G_{m_2}.$$

Wegen $(r_1', m_1 \cdot m_2) \overset{(95)}{=} 1$ und der Definition von a_1, b_1 gibt es nach (40) eine homogene Funktion vom Typ

$$(118) \quad [\mu^{a_1} \circ \mu^{b_1}] \dashrightarrow [1 \circ \mu] \,\forall\, \mu \in G_{m_1 \cdot m_2}.$$

η_1: $S^1 \times G_{m_1} \times G_{m_2} \to G_{m_1 \cdot m_2}$ sei durch $\eta_1[z, \sigma_1, \sigma_2] = \sigma_1^u \cdot \sigma_2^v$ definiert. Vermöge η_1 substituieren wir in (118) den Parameter und erhalten eine homogene Funktion vom Typ

$$[\sigma_1^{u \cdot a_1} \cdot \sigma_2^{v \cdot a_1} \circ \sigma_1^{u \cdot b_1} \cdot \sigma_2^{v \cdot b_1}] \dashrightarrow [1 \circ \sigma_1^u \cdot \sigma_2^v] \,\forall\, [z, \sigma_1, \sigma_2] \in S^1 \times G_{m_1} \times G_{m_2}.$$

Fassen wir sie als Funktion der zweiten Koordinate auf und multiplizieren sie von links an die erste Koordinate an, so erhalten wir eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$(119) \quad [\sigma_1^{-u} \cdot \sigma_2^{-v} \circ z^{m_2}, \sigma_1^{u \cdot a_1} \cdot \sigma_2^{v \cdot a_1} \circ \sigma_1^{u \cdot b_1} \cdot \sigma_2^{v \cdot b_1}, z^{m_1 \cdot a_2} \circ z^{m_1 \cdot b_2}]$$
$$\to [1 \circ z^{m_2}, \sigma_1^{u \cdot a_1} \cdot \sigma_2^{v \cdot a_1} \circ \sigma_1^{u \cdot b_1} \cdot \sigma_2^{v \cdot b_1}, z^{m_1 \cdot a_2} \circ z^{m_1 \cdot b_2}] \,\forall\, [z, \sigma_1, \sigma_2] \in S^1 \times G_{m_1} \times G_{m_2}.$$

Die Komposition von (100), (114), (117) und (119) ergibt eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$(120)\qquad [z\circ 1,\ \sigma_1^{a_1}\circ\sigma_1^{b_1},\ \sigma_2^{a_2}\circ\sigma_2^{b_2}]$$
$$\to [1\circ z^{m_2},\ \sigma_1^{u\cdot a_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot a_1}\circ\sigma_1^{u\cdot b_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot b_1},\ z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2}]\ \forall\,[z,\sigma_1,\sigma_2]\in S^1\times G_{m_1}\times G_{m_2}.$$

a_3, b_3 seien für $L_{m_3}(r_3)$ gemäß (12) gewählt. Wir werden die Folge der Homogenitätstransformationen

$$[z\circ 1,\ \sigma_1^{a_1}\circ\sigma_1^{b_1},\ \sigma_2^{a_2}\circ\sigma_2^{b_2},\ \sigma_3^{a_3}\circ\sigma_3^{b_3}]$$
$$\xrightarrow{f_1^*} [1\circ z^{m_2},\ \sigma_1^{u\cdot a_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot a_1}\circ\sigma_1^{u\cdot b_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot b_1},\ z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2},\ \sigma_3^{a_3}\circ\sigma_3^{b_3}]$$
$$\xrightarrow{f_2^*} [\sigma_3\circ z^{m_2},\ \sigma_1^{u\cdot a_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot a_1}\circ\sigma_1^{u\cdot b_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot b_1},\ z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2},\ \sigma_3^{a_3}\circ\sigma_3^{b_3}]$$
$$\xrightarrow{f_3^*} [\sigma_3\circ z^{m_2},\ \sigma_1^{u\cdot a_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot a_1}\circ\sigma_1^{u\cdot b_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot b_1},\ z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2},\ z^{-m_2\cdot a_3}\circ z^{-m_2\cdot b_3}]$$
$$\xrightarrow{f_4^*} [\sigma_3\circ z^{m_2},\ \sigma_1^{u\cdot a_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot a_1}\circ\sigma_1^{u\cdot b_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot b_1},\ z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2},\ z\circ 1]$$
$$\xrightarrow{f_5^*} [\sigma_3\circ 1,\ \sigma_1^{u\cdot a_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot a_1}\circ\sigma_1^{u\cdot b_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot b_1},\ z^{m_1\cdot a_2}\circ z^{m_1\cdot b_2},\ z\circ 1]$$
$$\xrightarrow{f_6^*} [\sigma_3\circ 1,\ \sigma_1^{u\cdot a_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot a_1}\circ\sigma_1^{u\cdot b_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot b_1},\ 1\circ 1,\ z\circ 1]$$
$$\xrightarrow{f_7^*} [z\circ 1,\ 1\circ 1,\ \sigma_1^{u\cdot a_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot a_1}\circ\sigma_1^{u\cdot b_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot b_1},\ \sigma_3\circ 1]$$
$$\xrightarrow{f_8^*} [z\circ 1,\ 1\circ 1,\ \sigma_1^{u}\cdot\sigma_2^{v}\circ 1,\ \sigma_3\circ 1]\ \forall\,[z,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3]$$
$$\in S^1\times G_{m_1}\times G_{m_2}\times G_{m_3}\overset{\text{de}}{=} A$$

konstruieren.

Deren Komposition ergibt eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$[z\circ 1,\ \sigma_1^{a_1}\circ\sigma_1^{b_1},\ \sigma_2^{a_2}\circ\sigma_2^{b_2},\ \sigma_3^{a_3}\circ\sigma_3^{b_3}]$$
$$\to [z\circ 1,\ 1\circ 1,\ \sigma_1^{u}\cdot\sigma_2^{v}\circ 1,\ \sigma_3\circ 1]\ \forall\,[z,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3]\in A.$$

Da bei dieser $\sigma_1^u\cdot\sigma_2^v\in G_{m_1\cdot m_2}$ gilt und $m_1\cdot m_2\cdot m_3 = 1\cdot(m_1\cdot m_2)\cdot m_3$ erfüllt ist, folgt die Behauptung dieses Satzes dann aus Hilfssatz 1.

Konstruktion von f_1^*. f_1^* ergibt sich, wenn wir in (120) vermöge der Projektion von A nach $S^1\times G_{m_1}\times G_{m_2}$ den Parameter substituieren und anschließend verlängern.

Konstruktion von f_2^*. Analog zu (40), (108), gibt es eine homogene Funktion vom Typ

$$[\sigma_3^{a_3}\circ\sigma_3^{b_3}]\ \cdots\!\to\ [\sigma_3\circ 1]\ \forall\,[z,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3]\in A.$$

Fassen wir sie als Funktion der vierten Koordinate auf und multiplizieren sie von links an die erste Koordinate an, so erhalten wir f_2^*.

Konstruktion von f_3^*. Analog zu (115), (116) gibt es homogene Funktionen vom Typ

$$[\sigma_3 \circ z^{m_2}] \dashrightarrow [z^{-m_2 \cdot a_3} \circ \sigma_3^{-a_3}],$$

$$[\sigma_3 \circ z^{m_2}] \dashrightarrow [\sigma_3^{-b_3} \circ z^{-m_2 \cdot b_3}] \forall [z, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3] \in A.$$

Fassen wir sie als Funktionen der ersten Koordinate auf und multiplizieren die erste von links, die zweite von rechts an die vierte Koordinate an, so erhalten wir f_3^*.

Konstruktion von f_4^*. Wegen $\sigma_3 \in G_{m_3}$ gibt es analog zu (115), (116) eine homogene Funktion vom Typ

$$[\sigma_3 \circ z^{m_2}] \dashrightarrow [z^{m_2 \cdot m_3} \circ 1] \forall [z, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3] \in A.$$

Durch Verlängern erhalten wir aus ihr eine homogene Funktion vom Typ

$$(121) \qquad [\sigma_3 \circ z^{m_2}, z^{m_1 \cdot a_2} \circ z^{m_1 \cdot b_2}] \dashrightarrow [z^{m_2 \cdot m_3} \circ 1, z^{m_1 \cdot a_2} \circ z^{m_1 \cdot b_2}] \forall [z, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3] \in A.$$

Nun gilt: $a_2 + b_2 \overset{(98)}{=} 1$ ist zu $m_2 \cdot m_3$ relativ prim. $a_2 - b_2 \overset{(98)}{=} r_2'$ ist zu m_2 nach (97), zu m_3 nach (111) relativ prim. Verwenden wir überdies die vollständige Teilerfremdheitsaussage $(m_2 \cdot m_3, m_1) = 1$ der Voraussetzung, so erhalten wir $\big(m_2 \cdot m_3, m_1 \cdot (a_2 + b_2)\big) = \big(m_2 \cdot m_3, m_1 \cdot (a_2 - b_2)\big) = 1$. Daher existieren nach Hilfssatz 5 homogene Funktionen vom Typ

$$(122) \qquad \begin{aligned} &[z^{m_2 \cdot m_3} \circ 1, z^{m_1 \cdot a_2} \circ z^{m_1 \cdot b_2}] \dashrightarrow [z \circ z^{m_2 \cdot a_3}], \\ &[z^{m_2 \cdot m_3} \circ 1, z^{m_1 \cdot a_2} \circ z^{m_1 \cdot b_2}] \dashrightarrow [z^{m_2 \cdot b_3} \circ 1] \forall z \in S^1, \end{aligned}$$

oder, wenn wir den Parameter vermöge der Projektion von A nach S_1 substituieren: $\forall [z, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3] \in A$.

Die Komposition von (121) und (122) ergibt homogene Funktionen vom Typ

$$[\sigma_3 \circ z^{m_2}, z^{m_1 \cdot a_2} \circ z^{m_1 \cdot b_2}] \dashrightarrow [z \circ z^{m_2 \cdot a_3}],$$

$$[\sigma_3 \circ z^{m_2}, z^{m_1 \cdot a_2} \circ z^{m_1 \cdot b_2}] \dashrightarrow [z^{m_2 \cdot b_3} \circ 1] \forall [z, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3] \in A.$$

Fassen wir sie als Funktionen der ersten und dritten Koordinate auf und multiplizieren die erste von links, die zweite von rechts an die vierte Koordinate an, so erhalten wir f_4^*.

Konstruktion von f_5^*. Aus Hilfssatz 4 und anschließender Parametersubstitution erhalten wir eine homogene Funktion vom Typ

$$(123) \qquad [z \circ 1] \dashrightarrow [z^{-m_2} \circ 1] \forall [z, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3] \in A.$$

Fassen wir sie als Funktion der vierten Koordinate auf und multiplizieren sie von rechts an die erste Koordinate an, so ergibt sich f_5^*.

Konstruktion von f_6^*. Analog zu (123) gibt es homogene Funktionen vom Typ

$$[z \circ 1] \dashrightarrow [1 \circ z^{-m_1 \cdot a_2}],\ [z \circ 1] \dashrightarrow [z^{-m_1 \cdot b_2} \circ 1]\ \forall [z, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3] \in A.$$

Fassen wir sie als Funktionen der vierten Koordinate auf und multiplizieren die erste von links, die zweite von rechts an die dritte Koordinate an, so erhalten wir f_6^*.

Konstruktion von f_7^*. f_7^* entsteht durch Permutation der Koordinaten.

Konstruktion von f_8^*. Wegen $(r_1', m_1 \cdot m_2) \overset{(95)}{=} 1$ und der Definition von a_1, b_1 gibt es nach (38) eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$[1 \circ 1, \mu^{a_1} \circ \mu^{b_1}] \to [1 \circ 1, \mu \circ 1]\ \forall \mu \in G_{m_1 \cdot m_2}.$$

Vermöge der durch $\eta_2[z, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3] = \sigma_1^u \cdot \sigma_2^v$ definierten Abbildung $\eta_2\colon A \to G_{m_1 \cdot m_2}$ substituieren wir in ihr den Parameter und erhalten durch anschließendes Verlängern die Homogenitätstransformation f_8^* vom Typ

$$[z \circ 1, 1 \circ 1, \sigma_1^{u \cdot a_1} \cdot \sigma_2^{v \cdot a_1} \circ \sigma_1^{u \cdot b_1} \cdot \sigma_2^{v \cdot b_1}, \sigma_3 \circ 1]$$
$$\to [z \circ 1, 1 \circ 1, \sigma_1^u \cdot \sigma_2^v \circ 1, \sigma_3 \circ 1]\ \forall [z, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3] \in A, \qquad \text{q.e.d.}$$

SATZ 12. *Ist bei*

$$S^2 \times L_{m_1}(r_1) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s); \quad s \geqslant 3,$$

$(m_1, m_2) = (m_1, m_3) = 1$ *erfüllt, so gibt es eine Teilerkette* $e_2 | \ldots | e_s$ *derart, daß*

$$S^2 \times L_{m_1}(r_1) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s) \approx S^2 \times S^3 \times L_{e_2}(1) \times \ldots \times L_{e_s}(1)$$

gilt.

Beweis. Aus Satz 11 folgt

$$S^2 \times L_{m_1}(r_1) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s)$$
$$\approx S^2 \times S^3 \times L_{m_1 \cdot m_2}(1) \times L_{m_3}(1) \times L_{m_4}(r_4) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s),$$

und die Behauptung ergibt sich, wenn wir auf die letztgenannte Mannigfaltigkeit Satz 4 anwenden, q.e.d.

HILFSSATZ 6. *m_1 und m_2 seien relativ prime natürliche Zahlen. Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl n ganze Zahlen a, b, die $(a \cdot m_1 + b \cdot m_2, n) = (a \cdot m_1 - b \cdot m_2, n) = 1$ erfüllen.*

Beweis. Sei $n = n_1 \cdot n_2$ diejenige Darstellung von n als Produkt zweier natürlicher Zahlen, bei welcher n_2 der größte Teiler von n mit

$$(n_2, 2 \cdot m_1 \cdot m_2) = 1 \tag{124}$$

ist.

(125) n_1 besitzt folglich höchstens solche Primteiler, die auch $2 \cdot m_1 \cdot m_2$ teilen.

Wegen $(m_1, m_2) = 1$ gibt es ganze Zahlen t_1, t_2 mit

$$t_1 \cdot m_1 + t_2 \cdot m_2 = 1. \tag{126}$$

Ferner folgt aus (124) die Existenz einer ganzen Zahl t_3 mit

$$t_3 \cdot 2 \cdot m_1 \cdot m_2 \equiv 1 \bmod n_2. \tag{127}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} x &= -1 + 2 \cdot t_1 \cdot m_1 + 2 \cdot t_2 \cdot m_2 \cdot t_3 \cdot 2 \cdot m_1 \cdot m_2 \\ &\overset{(126)}{=} 1 - 2 \cdot t_2 \cdot m_2 + 2 \cdot t_2 \cdot m_2 \cdot t_3 \cdot 2 \cdot m_1 \cdot m_2 \end{aligned} \tag{128}$$

und erhalten die Kongruenzbeziehungen

$$x \equiv \begin{cases} -1 \bmod 2 \cdot m_1, \\ 1 \bmod n_2, \\ 1 \bmod 2 \cdot m_2. \end{cases} \tag{129}$$

(Die erste Beziehung folgt aus dem ersten Ausdruck für x in (128), die zweite aus dem zweiten unter Berücksichtigung von (127); die dritte Kongruenzbeziehung folgt ebenfalls aus dem zweiten Ausdruck für x in (128).)

Wegen (129) sind

$$a = \frac{x+1}{2 \cdot m_1} \quad \text{und} \quad b = \frac{x-1}{2 \cdot m_2}$$

ganze Zahlen. Für diese gilt

$$\begin{aligned} a \cdot m_1 + b \cdot m_2 &= \frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{2} = x, \\ a \cdot m_1 - b \cdot m_2 &= \frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{2} = 1. \end{aligned} \tag{130}$$

$(a \cdot m_1 - b \cdot m_2, n) = 1$ ist daher trivialerweise erfüllt. $(x, n_2) = 1$ folgt aus (129). Wäre (x, n_1) größer als 1, so müßte nach (125) auch $(x, 2m_1 \cdot m_2) \neq 1$ gelten, im Widerspruch zu (129).

Aus $(x, n_1) = (x, n_2)$ und $n = n_1 \cdot n_2$ folgt nun $(a \cdot m_1 + b \cdot m_2, n) \overset{(130)}{=} (x, n) = 1$, q.e.d.

Satz 13. *Es gilt*

$$\begin{aligned} &S^2 \times S^2 \times L_{m_1}(r_1) \times L_{m_2}(r_2) \times L_{m_3}(r_3) \times L_{m_4}(r_4) \\ &\qquad \approx S^2 \times S^2 \times S^3 \times S^3 \times L_{m_1 \cdot m_2}(1) \times L_{m_3 \cdot m_4}(1) \end{aligned}$$

für $(m_1, m_2) = (m_3, m_4) = 1$.

Beweis. Bis einschließlich (120) wurde im Beweis von Satz 11 m_3 und insbesondere $(m_1, m_3) = 1$ nicht verwendet. Wir können daher die Bezeichnungen und Ergebnisse desselben bis (120) übernehmen.

Wegen $(m_3, m_4) = 1$ gibt es analog zu (120) mit analog bestimmten Größen $r_3', r_4', a_3, b_3, a_4, b_4, u', v'$ eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$(131)\qquad [z\circ 1, \sigma_3^{a_3}\circ\sigma_3^{b_3}, \sigma_4^{a_4}\circ\sigma_4^{b_4}]$$
$$\to [1\circ z^{m_4}, \sigma_3^{u'\cdot a_3}\cdot\sigma_4^{v'\cdot a_3}\circ\sigma_3^{u'\cdot b_3}\cdot\sigma_4^{v'\cdot b_3}, z^{m_3\cdot a_4}\circ z^{m_3\cdot b_4}]\ \forall\,[z, \sigma_3, \sigma_4]$$
$$\in S^1\times G_{m_3}\times G_{m_4}.$$

r_4' können wir dabei so wählen, daß als Analogon zu (111)

(132) $(r_4', r_2') = 1$ gilt, denn r_2' ist nach (97) von Null verschieden.

$\eta_2\colon S_1^1\times S_2^1\times G_{m_1}\times G_{m_2}\times G_{m_3}\times G_{m_4}\to S^1\times G_{m_1}\times G_{m_2}$ sei durch $\eta_2[z_1, z_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] = [z_1, \sigma_1, \sigma_2]$ definiert. Vermöge η_2 substituieren wir in (120) den Parameter und erhalten durch anschließendes Verlängern eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$(133)\qquad [z_1\circ 1, z_2\circ 1, \sigma_1^{a_1}\circ\sigma_1^{b_1}, \sigma_2^{a_2}\circ\sigma_2^{b_2}, \sigma_3^{a_3}\circ\sigma_3^{b_3}, \sigma_4^{a_4}\circ\sigma_4^{b_4}]$$
$$\to [1\circ z_1^{m_2}, z_2\circ 1, \sigma_1^{u\cdot a_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot a_1}\circ\sigma_1^{u\cdot b_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot b_1},$$
$$z_1^{m_1\cdot a_2}\circ z_1^{m_1\cdot b_2}, \sigma_3^{a_3}\circ\sigma_3^{b_3}, \sigma_4^{a_4}\circ\sigma_4^{b_4}]\ \forall\,[z_1, z_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4]$$
$$\in S_1^1\times S_2^1\times G_{m_1}\times G_{m_2}\times G_{m_3}\times G_{m_4}\overset{\text{def}}{=} A.$$

Aus (131) erhalten wir ebenso eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$(134)\qquad [1\circ z_1^{m_2}, z_2\circ 1, \sigma_1^{u\cdot a_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot a_1}\circ\sigma_1^{u\cdot b_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot b_1}, z_1^{m_1\cdot a_2}\circ z_1^{m_1\cdot b_2}, \sigma_3^{a_3}\circ\sigma_3^{b_3}, \sigma_4^{a_4}\circ\sigma_4^{b_4}]$$
$$\to [1\circ z_1^{m_2}, 1\circ z_2^{m_4}, \sigma_1^{u\cdot a_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot a_1}\circ\sigma_1^{u\cdot b_1}\cdot\sigma_2^{v\cdot b_1}, z_1^{m_1\cdot a_2}\circ z_1^{m_1\cdot b_2},$$
$$\sigma_3^{u'\cdot a_3}\cdot\sigma_4^{v'\cdot a_3}\circ\sigma_3^{u'\cdot b_3}\cdot\sigma_4^{v'\cdot b_3}, z_2^{m_3\cdot a_4}\circ z_2^{m_3\cdot b_4}]\ \forall\,[z_1, z_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4]\in A.$$

Da $(m_1, m_2) = 1$ vorausgesetzt ist und $m_4\cdot|r_2'|$ nach (97) eine natürliche Zahl ist, existieren nach Hilfssatz 6 ganzzahlige a, b mit

$$(135)\qquad (a\cdot m_1\pm b\cdot m_2, m_4\cdot r_2') = 1.$$

Wir werden die Folge der Homogenitätstransformationen

$$[1\circ z_1^{m_2}, 1\circ z_2^{m_4}, z_1^{m_1\cdot a_2}\circ z_1^{m_1\cdot b_2}, z_2^{m_3\cdot a_4}\circ z_2^{m_3\cdot b_4}]$$
$$\overset{f_1^*}{\to} [1\circ z_1^{m_2}, z_1^{-m_1}\circ z_2^{m_4}, z_1^{m_1\cdot a_2}\circ z_1^{m_1\cdot b_2}, z_2^{m_3\cdot a_4}\circ z_2^{m_3\cdot b_4}]$$
$$\overset{f_2^*}{\to} [1\circ z_1^{m_2}, z_1^{-m_1}\circ z_2^{m_4}, z_2^{m_4\cdot a_2}\circ z_2^{m_4\cdot b_2}, z_2^{m_3\cdot a_4}\circ z_2^{m_3\cdot b_4}]$$

$$\xrightarrow{f_3^*} [z_2^a \circ z_1^{m_2},\ z_1^{-m_1} \circ z_2^{m_4},\ z_2^{m_4 \cdot a_2} \circ z_2^{m_4 \cdot b_2},\ z_2^{m_3 \cdot a_4} \circ z_2^{m_3 \cdot b_4}]$$

$$\xrightarrow{f_4^*} [z_2^a \circ z_1^{m_2},\ z_1^{-m_1} \circ z_2^b,\ z_2^{m_4 \cdot a_2} \circ z_2^{m_4 \cdot b_2},\ z_2^{m_3 \cdot a_4} \circ z_2^{m_3 \cdot b_4}]$$

$$\xrightarrow{f_5^*} [z_2^a \circ z_1^{m_2},\ z_1^{-m_1} \circ z_2^b,\ z_2^{m_4 \cdot a_2} \circ z_2^{m_4 \cdot b_2},\ z_2 \circ 1]$$

$$\xrightarrow{f_6^*} [z_2^a \circ z_1^{m_2},\ z_1^{-m_1} \circ z_2^b,\ 1 \circ 1,\ z_2 \circ 1]$$

$$\xrightarrow{f_7^*} [z_2^a \circ z_1^{m_2},\ z_1^{-m_1} \circ 1,\ 1 \circ 1,\ z_2 \circ 1]$$

$$\xrightarrow{f_8^*} [1 \circ z_1^{m_2},\ z_1^{-m_1} \circ 1,\ 1 \circ 1,\ z_2 \circ 1]$$

$$\xrightarrow{f_9^*} [1 \circ z_1^{m_2},\ z_1^{-m_1} \circ 1,\ z_1 \circ 1,\ z_2 \circ 1] \xrightarrow{f_{10}^*} [1 \circ z_1^{m_2},\ 1 \circ 1,\ z_1 \circ 1,\ z_2 \circ 1]$$

$$\xrightarrow{f_{11}^*} [1 \circ 1,\ 1 \circ 1,\ z_1 \circ 1,\ z_2 \circ 1]$$

$$\xrightarrow{f_{12}^*} [z_1 \circ 1,\ z_2 \circ 1,\ 1 \circ 1,\ 1 \circ 1]\ \forall\, [z_1, z_2] \in S_1^1 \times S_2^1$$

konstruieren.

Dann bilden wir deren Komposition, substituieren in ihr den Parameter vermöge der Projektion von A nach $S_1^1 \times S_2^1$ und erhalten durch anschließendes Verlängern eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$(136)\quad [1 \circ z_1^{m_2},\ 1 \circ z_2^{m_4},\ \sigma_1^{u \cdot a_1} \cdot \sigma_2^{v \cdot a_1} \circ \sigma_1^{u \cdot b_1} \cdot \sigma_2^{v \cdot b_1},\ z_1^{m_1 \cdot a_2} \circ z_1^{m_1 \cdot b_2},\ \sigma_3^{u' \cdot a_3} \cdot$$
$$\cdot\, \sigma_4^{v' \cdot a_3} \circ \sigma_3^{u' \cdot b_3} \cdot \sigma_4^{v' \cdot b_3},\ z_2^{m_3 \cdot a_4} \circ z_2^{m_3 \cdot b_4}] \to [z_1 \circ 1,\ z_2 \circ 1,\ \sigma_1^{u \cdot a_1} \cdot \sigma_2^{v \cdot a_1} \circ \sigma_1^{u \cdot b_1} \cdot \sigma_2^{v \cdot b_1},$$
$$1 \circ 1,\ \sigma_3^{u' \cdot a_3} \cdot \sigma_4^{v' \cdot a_3} \circ \sigma_3^{u' \cdot b_3} \cdot \sigma_4^{v' \cdot b_3},\ 1 \circ 1]\ \forall\, [z_1, z_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] \in A.$$

Letztens entsteht durch Permutation der Koordinaten eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$(137)\quad [z_1 \circ 1,\ z_2 \circ 1,\ \sigma_1^{u \cdot a_1} \cdot \sigma_2^{v \cdot a_1} \circ \sigma_1^{u \cdot b_1} \cdot \sigma_2^{v \cdot b_1},\ 1 \circ 1,$$
$$\sigma_3^{u' \cdot a_3} \cdot \sigma_4^{v' \cdot a_3} \circ \sigma_3^{u' \cdot b_3} \cdot \sigma_4^{v' \cdot b_3},\ 1 \circ 1] \to [z_1 \circ 1,\ z_2 \circ 1,\ 1 \circ 1,\ 1 \circ 1,$$
$$\sigma_1^{u \cdot a_1} \cdot \sigma_2^{v \cdot a_1} \circ \sigma_1^{u \cdot b_1} \cdot \sigma_2^{v \cdot b_1},\ \sigma_3^{u' \cdot a_3} \cdot \sigma_4^{v' \cdot a_3} \circ \sigma_3^{u' \cdot b_3} \cdot \sigma_4^{v' \cdot b_3}]$$
$$\forall\, [z_1, z_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] \in A.$$

Die Komposition von (133), (134), (136) und (137) ergibt eine Homogenitätstransformation vom Typ

$$[z_1 \circ 1,\ z_2 \circ 1,\ \sigma_1^{a_1} \circ \sigma_1^{b_1},\ \sigma_2^{a_2} \circ \sigma_2^{b_2},\ \sigma_3^{a_3} \circ \sigma_3^{b_3},\ \sigma_4^{a_4} \circ \sigma_4^{b_4}]$$
$$\to [z_1 \circ 1,\ z_2 \circ 1,\ 1 \circ 1,\ 1 \circ 1,\ \sigma_1^{u \cdot a_1} \cdot \sigma_2^{v \cdot a_1} \circ \sigma_1^{u \cdot b_1} \cdot \sigma_2^{v \cdot b_1},$$
$$\sigma_3^{u' \cdot a_3} \cdot \sigma_4^{v' \cdot a_3} \circ \sigma_3^{u' \cdot b_3} \cdot \sigma_4^{v' \cdot b_3}]\ \forall\, [z_1, z_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] \in A.$$

Wegen $\sigma_1^u \cdot \sigma_2^v \in G_{m_1 \cdot m_2}$, $\sigma_3^{u'} \cdot \sigma_4^{v'} \in G_{m_3 \cdot m_4}$, $(r_1', m_1 \cdot m_2) \overset{(95)}{=} 1$, $a_1 + b_1 \overset{(98)}{=} 1$, $a_1 - b_1 \overset{(98)}{=} r_1'$ und analog dazu $(r_3', m_3 \cdot m_4) = 1$, $a_3 + b_3 = 1$, $a_3 - b_3 = r_3'$ sowie $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot m_4 = 1 \cdot 1 \cdot (m_1 \cdot m_2) \cdot (m_3 \cdot m_4)$ folgt aus ihr gemäß Hilfssatz 1

$$S^2 \times S^2 \times L_{m_1}(r_1) \times \ldots \times L_{m_4}(r_4) \approx S^2 \times S^2 \times S^3 \times S^3 \times L_{m_1 \cdot m_2}(r_1') \times L_{m_3 \cdot m_4}(r_3').$$

Wenn wir auf die Faktorenpaare 3,5 und 3,6 der letztgenannten Mannigfaltigkeit Satz 1 anwenden, so folgt die Behauptung dieses Satzes.

Konstruktion von f_1^*. Aus (103) folgt nach Hilfssatz 5 analog zu (104) die Existenz einer homogenen Funktion vom Typ

$$(138) \qquad [1 \circ z_1^{m_2}, z_1^{m_1 \cdot a_2} \circ z^{m_1 \cdot b_2}] \dashrightarrow [z_1^{-m_1} \circ 1] \; \forall [z_1, z_2] \in S_1^1 \times S_2^1.$$

Fassen wir sie als Funktion der ersten und dritten Koordinate auf und multiplizieren sie von links an die zweite Koordinate an, so erhalten wir f_1^*.

Konstruktion von f_2^*. Für $a_2 \geqslant 0$ ist $g_{a_2, \bar{a}_2}$, für $a_2 \leqslant 0$ ist $g_{-\bar{a}_2, -a_2}$ eine homogene Funktion vom Typ

$$(139) \qquad [z_1^{-m_1} \circ z_2^{m_4}] \dashrightarrow [z_2^{m_4 \cdot a_2} \circ z_1^{-m_1 \cdot a_2}] \; \forall [z_1, z_2] \in S_1^1 \times S_2^1.$$

Analog dazu gibt es eine homogene Funktion vom Typ

$$[z_1^{-m_1} \circ z_2^{m_4}] \dashrightarrow [z_1^{-m_1 \cdot b_2} \circ z_2^{m_4 \cdot b_2}] \; \forall [z_1, z_2] \in S_1^1 \times S_2^1.$$

Fassen wir sie als Funktionen der zweiten Koordinate auf und multiplizieren die erste von links, die zweite von rechts an die dritte Koordinate an, so erhalten wir f_2^*.

Konstruktion von f_3^*, f_4^*. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\big(m_4 \cdot (a_2 + b_2), m_3 \cdot (a_4 + b_4)\big) \overset{(98),(98)'}{=} (m_4 \cdot m_3) \overset{\text{n.V.}}{=} 1, \\
&\big(m_4 \cdot (a_2 + b_2), m_3 \cdot (a_4 - b_4)\big) \overset{(98),(98)'}{=} (m_4, m_3 \cdot r_4') \overset{\text{n.V.},(97)'}{=} 1, \\
&\big(m_4 (a_2 - b_2), m_3 \cdot (a_4 + b_4)\big) \overset{(98),(98)'}{=} (m_4 \cdot r_2', m_3) \overset{\text{n.V.},(111)}{=} 1, \\
&\big(m_4 \cdot (a_2 - b_2), m_3 \cdot (a_4 - b_4)\big) \overset{(98),(98)'}{=} (m_4 \cdot r_2', m_3 \cdot r_4') \overset{\text{n.V.},(97)',(111),(132)}{=} 1;
\end{aligned}$$

dabei sind mit ( )′ die zu ( ) analogen Beziehungen für die vor (131) eingeführten Zahlen bezeichnet. Daher gibt es nach Hilfssatz 5 (s. 138)) homogene Funktionen vom Typ

$$(140) \qquad [z_2^{m_4 \cdot a_2} \circ z_2^{m_4 \cdot b_2}, z_2^{m_3 \cdot a_4} \circ z_2^{m_3 \cdot b_4}] \dashrightarrow [z_2^a \circ 1],$$

$$[z_2^{m_4 \cdot a_2} \circ z_2^{m_4 \cdot b_2}, z_2^{m_3 \cdot a_4} \circ z_2^{m_3 \cdot b_4}] \dashrightarrow [z_2^{-m_4} \circ z_2^b] \; \forall [z_1, z_2] \in S_1^1 \times S_2^1.$$

Fassen wir sie als Funktionen der dritten und vierten Koordinaten auf und multiplizieren die erste von links an die erste Koordinate an, so erhalten wir f_3^*. Multiplizieren wir anschließend die zweite Funktion von rechts an die zweite Koordinate an, so erhalten wir f_4^*.

Konstruktion von f_5^*. Analog zu (139) gibt es homogene Funktionen vom Typ

$$[z_2^a \circ z_1^{m_2}] \dashrightarrow [z_2^{m_1 \cdot a} \circ z_1^{m_1 \cdot m_2}],$$
$$[z_1^{-m_1} \circ z_2^b] \dashrightarrow [z_1^{-m_1 \cdot m_2} \circ z_2^{m_2 \cdot b}] \;\forall\; [z_1, z_2] \in S_1^1 \times S_2^1.$$

Deren Produkt ist eine homogene Funktion vom Typ

$$[z_2^a \circ z_1^{m_2}, z_1^{-m_1} \circ z_2^b] \dashrightarrow [z_2^{m_1 \cdot a} \circ z_2^{m_2 \cdot b}] \;\forall\; [z_1, z_2] \in S_1^1 \times S_2^1.$$

Durch Verlängern erhalten wir daraus eine homogene Funktion vom Typ

$$(141) \quad [z_2^a \circ z_1^{m_2}, z_1^{-m_1} \circ z_2^b, z_2^{m_4 \cdot a_2} \circ z_2^{m_4 \cdot b_2}]$$
$$\dashrightarrow [z_2^{m_1 \cdot a} \circ z_2^{m_2 \cdot b}, z_2^{m_4 \cdot a_2} \circ z_2^{m_4 \cdot b_2}] \;\forall\; [z_1, z_2] \in S_1^1 \times S_2^1.$$

Es gilt

$$\big(m_1 \cdot a \pm m_2 \cdot b,\, m_4 \cdot (a_2 + b_2)\big) \overset{(98)}{=} (m_1 \cdot a \pm m_2 \cdot b,\, m_4) \overset{(135)}{=} 1,$$
$$\big(m_1 \cdot a \pm m_2 \cdot b,\, m_4 \cdot (a_2 - b_2)\big) \overset{(98)}{=} (m_1 \cdot a \pm m_2 \cdot b,\, m_4 \cdot r_2') \overset{(135)}{=} 1.$$

Daher gibt es analog zu (140) homogene Funktionen vom Typ

$$(142) \quad [z_2^{m_1 \cdot a} \circ z_2^{m_2 \cdot b}, z_2^{m_4 \cdot a_2} \circ z_2^{m_4 \cdot b_2}] \dashrightarrow [z_2 \circ z_2^{-m_3 \cdot a_4}],$$
$$[z_2^{m_1 \cdot a} \circ z_2^{m_2 \cdot b}, z_2^{m_4 \cdot a_2} \circ z_2^{m_4 \cdot b_2}] \dashrightarrow [z_2^{-m_3 \cdot b_4} \circ 1] \;\forall\; [z_1, z_2] \in S_1^1 \times S_2^1.$$

Durch Komposition von (141) und (142) erhalten wir homogene Funktionen vom Typ

$$[z_2^a \circ z_1^{m_2}, z_1^{-m_1} \circ z_2^b, z_2^{m_4 \cdot a_2} \circ z_2^{m_4 \cdot b_2}] \dashrightarrow [z_2 \circ z_2^{-m_3 \cdot a_4}],$$
$$[z_2^a \circ z_1^{m_2}, z_1^{-m_1} \circ z_2^b, z_2^{m_4 \cdot a_2} \circ z_2^{m_4 \cdot b_2}] \dashrightarrow [z_2^{-m_3 \cdot b_4} \circ 1] \;\forall\; [z_1, z_2] \in S_1^1 \times S_2^1.$$

Fassen wir sie als Funktionen der ersten, zweiten und dritten Koordinate auf und multiplizieren die erste von links, die zweite von rechts an die vierte Koordinate an, so erhalten wir f_5^*.

Konstruktion von f_6^*, f_7^*, f_8^*. Aus Hilfssatz 4 und anschließender Parametersubstitution erhalten wir homogene Funktionen vom Typ

$$[z_2 \circ 1] \dashrightarrow [1 \circ z_2^{-m_4 \cdot a_2}], \qquad [z_2 \circ 1] \dashrightarrow [z_2^{-m_4 \cdot b_2} \circ 1],$$
$$[z_2 \circ 1] \dashrightarrow [z_2^{-b} \circ 1], \qquad [z_2 \circ 1] \dashrightarrow [1 \circ z_2^{-a}] \;\forall\; [z_1, z_2] \in S_1^1 \times S_2^1.$$

Wir fassen sie als Funktionen der vierten Koordinate auf. Multiplizieren wir die erste Funktion von links, die zweite von rechts an die dritte Koordinate an, so erhalten wir f_6^*. Anschließend multiplizieren wir die dritte Funktion von rechts an die zweite Koordinate an und erhalten f_7^*. Zuletzt multiplizieren wir die vierte Funktion von links an die erste Koordinate an und erhalten f_8^*.

Konstruktion von f_9^*. Analog zu (138) gibt es wegen $(m_1, m_2) = 1$ eine homogene Funktion vom Typ

$$[1 \circ z_1^{m_2}, z_1^{-m_1} \circ 1] \dashrightarrow [z_1 \circ 1] \forall [z_1, z_2] \in S_1^1 \times S_2^1.$$

Fassen wir sie als Funktion der ersten und zweiten Koordinate auf und multiplizieren sie von links an die dritte Koordinate an, so erhalten wir f_9^*.

Konstruktion von f_{10}^*, f_{11}^*. Aus Hilfssatz 4 und anschließender Parametersubstitution erhalten wir homogene Funktionen vom Typ

$$[z_1 \circ 1] \dashrightarrow [1 \circ z_1^{m_1}], \qquad [z_1 \circ 1] \dashrightarrow [z_1^{-m_2} \circ 1] \forall [z_1, z_2] \in S_1^1 \times S_2^1.$$

Wir fassen sie als Funktionen der dritten Koordinate auf und multiplizieren die erste von links an die zweite Koordinate an. So erhalten wir f_{10}^*. Multiplizieren wir anschließend die zweite Funktion von rechts an die erste Koordinate an, so erhalten wir f_{11}^*.

Konstruktion von f_{12}^*. f_{12}^* entsteht durch Permutation der Koordinaten, q.e.d.

SATZ 14. *Ist bei*

$$S^2 \times S^2 \times L_{m_1}(r_1) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s); \qquad s \geqslant 4,$$

$(m_1, m_2) = (m_3, m_4) = 1$ *erfüllt, so gibt es eine Teilerkette* $e_3 | \ldots | e_s$ *derart, daß*

$$S^2 \times S^2 \times L_{m_1}(r_1) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s) \approx S^2 \times S^2 \times S^3 \times S^3 \times L_{e_3}(1) \times \ldots \times L_{e_s}(1)$$

gilt.

Beweis. Aus Satz 13 folgt

$$\begin{aligned} &S^2 \times S^2 \times L_{m_1}(r_1) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s) \\ &\quad \approx S^2 \times S^2 \times S^3 \times S^3 \times L_{m_1 \cdot m_2}(1) \times L_{m_3 \cdot m_4}(1) \times L_{m_5}(r_5) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s), \end{aligned}$$

und die Behauptung ergibt sich, wenn wir auf die letztgenannte Mannigfaltigkeit Satz 4 anwenden, q.e.d.

8. Folgerungen aus den Abschnitten 6 und 7

$$S_1^2 \times \ldots \times S_t^2 \times L_{m_1}(r_1) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s) \approx S_1^2 \times \ldots \times S_t^2 \times L_{m_1'}(r_1') \times \ldots \times L_{m_s'}(r_s');$$

$t \geqslant 0$, $s \geqslant 1$ sei ein nach den Sätzen 1 bis 14, deren Kombination oder anderweitig gewonnener Diffeomorphismus. Sind dann für $S_1^2 \times \ldots \times S_t^2 \times \times L_{m_1}(r_1) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s)$ und $S_1^2 \times \ldots \times S_t^2 \times L_{m_1'}(r_1') \times \ldots \times L_{m_s'}(r_s')$ C^1-Triangulationen gegeben, so sind

(143) die zugehörigen Simplizialkomplexe nach Whitehead [21] kombinatorisch äquivalent.

$g_j^{(\prime)}\colon \Sigma_j^{(\prime)2} \to S_j^2$, $f_i^{(\prime)}\colon K_i^{(\prime)} \to L_{m_i^{(\prime)}}(r_i^{(\prime)})$ seien C^1-Triangulationen gemäß Whitehead [21]. (Für Linsenräume können beispielsweise die von Franz [5] und Milnor [12], [13] angegebenen genommen werden.) Dann sind auch die Produkttriangulationen

$$[\Pi g_j^{(\prime)}, \Pi f_i^{(\prime)}]\colon \Sigma_1^{(\prime)2} \times \ldots \times \Sigma_t^{(\prime)2} \times K_1^{(\prime)} \times \ldots \times K_s^{(\prime)} \to S_1^2 \times \ldots \times S_t^2 \times L_{m_1^{(\prime)}}(r_1^{(\prime)}) \times \ldots \times L_{m_s^{(\prime)}}(r_s^{(\prime)})$$

C^1-Triangulationen; dabei sei $\Sigma_1^{(\prime)2} \times \ldots \times \Sigma_t^{(\prime)2} \times K_1^{(\prime)} \times \ldots \times K_s^{(\prime)}$ derjenige Simplizialkomplex, der sich aus den Faktoren durch baryzentrische Unterteilung der Simplexprodukte nach aufsteigender Dimension ergibt. Aus (143) folgt daher

$$(144) \qquad \Sigma_1^2 \times \ldots \times \Sigma_t^2 \times K_1 \times \ldots \times K_s \equiv \Sigma_1'^2 \times \ldots \times \Sigma_t'^2 \times K_1' \times \ldots \times K_s'.$$

Es gilt sogar noch stärker: sind $\tilde{g}_j^{(\prime)}\colon \tilde{\Sigma}_j^{(\prime)2} \to S_j^2$, $\tilde{f}_i^{(\prime)}\colon \tilde{K}_i^{(\prime)} \to L_{m_i^{(\prime)}}(r_i^{(\prime)})$ beliebige Triangulationen, so ist für die Produkttriangulationen $[\Pi \tilde{g}_j^{(\prime)}, \Pi \tilde{f}_i^{(\prime)}]$:

$$\tilde{\Sigma}_1^{(\prime)2} \times \ldots \times \tilde{\Sigma}_t^{(\prime)2} \times \tilde{K}_1^{(\prime)} \times \ldots \times \tilde{K}_s^{(\prime)} \to S_1^2 \times \ldots \times S_t^2 \times L_{m_1^{(\prime)}}(r_1^{(\prime)}) \times \ldots \times L_{m_s^{(\prime)}}(r_s^{(\prime)}),$$

$$(145) \qquad \tilde{\Sigma}_1^2 \times \ldots \times \tilde{\Sigma}_t^2 \times \tilde{K}_1 \times \ldots \times \tilde{K}_s \equiv \tilde{\Sigma}_1'^2 \times \ldots \times \tilde{\Sigma}_t'^2 \times \tilde{K}_1' \times \ldots \times \tilde{K}_s'$$

erfüllt; denn, da die Hauptvermutung für zwei- und dreidimensionale Mannigfaltigkeiten gilt (Papakyriakopoulos [17], Moise [14] oder Bing [1]), folgt

$$\tilde{\Sigma}_j^{(\prime)2} \equiv \Sigma_j^{(\prime)2}\ \forall j; \qquad \tilde{K}_i^{(\prime)} \equiv K_i^{(\prime)}\ \forall i,$$

also

$$(146) \quad \tilde{\Sigma}_1^{(\prime)2} \times \ldots \times \tilde{\Sigma}_t^{(\prime)2} \times \tilde{K}_1^{(\prime)} \times \ldots \times \tilde{K}_s^{(\prime)} \equiv \Sigma_1^{(\prime)2} \times \ldots \times \Sigma_t^{(\prime)2} \times K_1^{(\prime)} \times \ldots \times K_s^{(\prime)};$$

und (145) ergibt sich als Folge von (144) und (146). Analog zu (7) b) bezeichnen wir die durch (145) beschriebene Situation als

$$(147) \qquad S_1^2 \times \ldots \times S_t^2 \times L_{m_1}(r_1) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s) \equiv S_1^2 \times \ldots \times S_t^2 \times L_{m_1'}(r_1') \times \ldots \times L_{m_s'}(r_s')$$

für alle Produkttriangulationen.

Alle bisherigen Sätze dieser Arbeit, bei welchen die Moduln m_i' auf der rechten Seite eine Teilerkette bilden — dies sind die Sätze mit den Nummern 1, 2, 4, 6, 9, 10, 12, 14 —, lösen für jeweil seinen bestimmten Typ von Produkten aus dreidimensionalen Linsenräumen und zweidimensionalen Sphären das Homöomorphieproblem mit gleichzeitiger Angabe einer Normalform. Wir beschreiben diesen Tatbestand ausführlich an dem Beispiel von Satz 6:

Satz 15. *Gegeben seien die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten vom Typ* $M = L_{m_1}(r_1) \times \ldots \times L_{m_s}(r_s)$; $s \geqslant 2$, $r_{i_1} \equiv \pm 1 \bmod m_{i_1}$ *für mindestens*

ein $1 \leqslant i_1 \leqslant s$ *und* $(m_{i_2}, m_{i_3}) = 1$ *für mindestens ein Indexpaar* $i_2 \neq i_3$. *Für solche Mannigfaltigkeiten sind die folgenden Aussagen gleichwertig:* a) $M \approx M'$; b) $M \equiv M'$ *für alle Produkttriangulationen*; c) $M \sim M'$; d) $M \simeq M'$; e) $s = s'$, $\pi_1(M) \approx \pi_1(M')$. *In jeder der durch* a) ... e) *gleichermaßen bestimmten Klasse gibt es als Normalform genau eine Mannigfaltigkeit*

$$S^3 \times L_{e_2}(1) \times \ldots \times L_{e_s}(1) \quad \textit{mit} \quad e_2 | \ldots | e_s.$$

Beweis. a) $\Rightarrow$ b) ist die Aussage von (147). b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) sind triviale Aussagen. d) $\Rightarrow$ e): $\pi_1(M) \approx \pi_1(M')$ ist trivial; der Vergleich der dritten Homotopiegruppen ergibt $s = s'$. e) $\Rightarrow$ a): Aus Satz 6 folgt

$$(148) \qquad M \approx S^3 \times L_{e_2}(1) \times \ldots \times L_{e_s}(1), \qquad M' \approx S^3 \times L_{e_2'}(1) \times \ldots \times L_{e_s'}(1)$$

für

$$(149) \qquad e_2 | \ldots | e_s, \qquad e_2' | \ldots | e_s'.$$

Weiterhin haben wir

$$(150) \qquad Z_{e_2} \times \ldots \times Z_{e_s} \overset{(148)}{\approx} \pi_1(M) \overset{e)}{\approx} \pi_1(M') \overset{(148)}{\approx} Z_{e_2'} \times \ldots \times Z_{e_s'}.$$

Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen folgt aus (149) und (150): $e_i = e_i'$ für $i = 2, \ldots, s$. Daher sind in (148) die rechten Seiten identisch, woraus $M \approx M'$ folgt.

Normalform. Bilden wir die Klassen nach dem Kriterium a), so ergibt Satz 6 die Existenz einer Mannigfaltigkeit $S^3 \times L_{e_2}(1) \times \ldots \times L_{e_s}(1)$; $e_2 | \ldots | e_s$ in einer jeden Klasse. Sie ist eindeutig bestimmt, da für $S^3 \times \times L_{e_2}(1) \times \ldots \times L_{e_s}(1) \approx S^3 \times L_{e_2'}(1) \times \ldots \times L_{e_{s'}'}(1)$ mit $e_2 | \ldots | e_s$, $e_2' | \ldots | e_{s'}'$ der Vergleich der dritten Homotopiegruppen oder der Dimension $s = s'$ zur Folge hat, und der Vergleich der Fundamentalgruppen nun wiederum $e_i = e_i'$ für $i = 2, \ldots, s$ ergibt, q.e.d.

Da die Teilerkette $e_1 | \ldots | e_s$ zu $Z_{m_1} \times \ldots \times Z_{m_s}$ im Falle paarweise relativ primer m_i die Form $1 | \ldots | 1 | m_1 \cdot \ldots \cdot m_s$ hat, ergibt sich analog zu dem Eindeutigkeitsbeweis der Normalform in Satz 15, daß Satz 6 die Sätze 1, 2, 3 und 4, Satz 12 die Sätze 9, 10 und 11 umfaßt.

9. Lokal-triviale Faserbündel

Nach Steenrod [20], S. 135 läßt sich $L_m(1)$ als 1-Sphärenbündel

$$(151) \qquad p_m \colon L_m(1) \to S^2$$

über S^2 darstellen.

x sei ein Basispunkt aus $L_m(1)$, $p_m(x) \in S^2$ werde mit b bezeichnet und $p_m^{-1}(b)$, ein zur Faser S^1 homöomorpher Teilraum von $L_m(1)$, mit A.

Dann erhalten wir (Steenrod [20], S. 90) die exakte Homotopiesequenz S_m:

$$\pi_1(S^2, b) \xleftarrow{p_{m*}} (\pi_1 L_m(1), x) \xleftarrow{j_{m*}} \pi_1(A, x) \xleftarrow{\Delta_m} \pi_2(S^2, b) \xleftarrow{p_{m*}} \pi_2(L_m(1), x) \leftarrow \dots$$

des Bündels. Aus der Exaktheit folgt, daß bei geeigneter Auswahl der erzeugenden Elemente für die zu Z isomorphen Gruppen $\pi_2(S^2, b)$ und $\pi_1(A, x)$

(152) der Homomorphismus Δ_m: $\pi_2(S^2, b) \to \pi_1(A, x)$ den Abbildungsgrad m hat.

Sind die 1-Sphärenbündel p_{m_i}: $L_{m_i}(1) \to S_i^2$; $i = 1, \dots, s$, $s \geqslant 1$ gegeben, so ist Πp_{m_i}: $\Pi L_{m_i}(1) \to \Pi S_i^2$ ein Bündel mit $S_1^1 \times \dots \times S_s^1$ als Faser. Die Homotopiesequenz des Produktbündels ist in natürlicher Weise zu der Produktsequenz ΠS_{m_i} isomorph, d.h., wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$(153)\qquad \begin{tikzcd}
 & \Pi\pi_1(S_i^2, b_i) \arrow[d, "\alpha"] & \Pi\pi_1(L_{m_i}(1), x_i) \arrow[l, "\Pi(p_{m_i*})"'] \arrow[d, "\beta"] & \arrow[l, "\Pi(j_{m_i*})"'] \\
 & \pi_1(\Pi S_i^2, [b_1, \dots, b_s]) & \pi_1(\Pi L_{m_i}(1), [x_1, \dots, x_s]) \arrow[l, "(\Pi p_{m_i})_*"'] & \arrow[l, "(\Pi j_{m_i})_*"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\arrow[l, "\Pi(j_{m_i*})"'] & \Pi\pi_1(A_i, x_i) \arrow[d, "\gamma"] & \Pi\pi_2(S_i^2, b_i) \arrow[l, "\Pi\Delta_{m_i}"'] \arrow[d, "\alpha"] & \arrow[l, "\Pi(p_{m_i*})"'] & \dots \\
\arrow[l, "(\Pi j_{m_i})_*"'] & \pi_1(\Pi A_i, [x_1, \dots, x_s]) & \pi_2(\Pi S_i^2, [b_1, \dots, b_s]) \arrow[l, "\Delta"'] & \arrow[l, "(\Pi p_{m_i})_*"'] & \dots,
\end{tikzcd}$$

bei welchem die senkrechten Homomorphismen die nach Hu [9], S. 143 f. gegebenen Isomorphismen sind. So berechnet sich beispielsweise, wenn

α_{m_i}: $(S_i^2, b_i) \to (\Pi S_i^2, [b_1, \dots, b_s])$ die Injektionen,

α^{m_i}: $(\Pi S_i^2, [b_1, \dots, b_s]) \to (S_i^2, b_i)$ die Projektionen sind, α vermöge

$$(154)\qquad \alpha[a_1, \dots, a_s] = \alpha_{m_1*}(a_1) + \dots + \alpha_{m_s*}(a_s)$$

und die Umkehrabbildung α^{-1} vermöge

$$\alpha^{-1}(a) = [\alpha_*^{m_1}(a), \dots, \alpha_*^{m_s}(a)].$$

Seien jetzt die Bündel Πp_{m_i}: $\Pi L_{m_i}(1) \to \Pi S_i^2$ und $\Pi p_{m_i'}$: $\Pi L_{m_i'}(1) \to \Pi S_i^2$; $i = 1, \dots, s$, $s \geqslant 1$ gegeben sowie ein fasertreuer Homöomorphismus f: $\Pi L_{m_i}(1) \to \Pi L_{m_i'}(1)$. Dann läßt sich das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\Pi L_{m_i}(1) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Pi p_{m_i}"] & \Pi L_{m_i'}(1) \arrow[d, "\Pi p_{m_i'}"] \\
\Pi S_i^2 \arrow[r, "g"] & \Pi S_i^2
\end{tikzcd}$$

kommutativ durch einen Homöomorphismus g: $\Pi S_i^2 \to \Pi S_i^2$ ergänzen; g ist dabei durch die Forderung der Kommutativität eindeutig bestimmt

(vergleiche Hilfssatz 1). Die Basispunkte $[x_1^{(\prime)}, \ldots, x_s^{(\prime)}] \in \Pi L_{m_i^{(\prime)}}(1)$ seien so gewählt, daß $f[x_1, \ldots, x_s] = [x_1', \ldots, x_s']$ gilt. Dann sind die Homotopiesequenzen S und S' der Produktbündel in natürlicher Weise isomorph, d.h., wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$
(155)\qquad
\begin{tikzcd}
\pi_1(\Pi S_i^2, [b_1, \ldots, b_s]) \arrow[d, "g_*"] & \pi_1\big(\Pi L_{m_i}(1), [x_1, \ldots, x_s]\big) \arrow[l, "(\Pi p_{m_i})_*"'] \arrow[d, "f_*"] & \arrow[l, "(\Pi j_{m_i})_*"'] \\
\pi_1(\Pi S_i^2, [b_1', \ldots, b_s']) & \pi_1\big(\Pi L_{m_i'}(1), [x_1', \ldots, x_s']\big) \arrow[l, "(\Pi p_{m_i'})_*"'] & \arrow[l, "(\Pi j_{m_i'})_*"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\arrow[r, "(\Pi j_{m_i})_*"] & \pi_1(\Pi A_i, [x_1, \ldots, x_s]) \arrow[d, "(f|\Pi A_i)_*"] & \pi_2(\Pi S_i^2, [b_1, \ldots, b_s]) \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[d, "g_*"] & \arrow[l, "(\Pi p_{m_i})_*"'] \ldots \\
\arrow[r, "(\Pi j_{m_i'})_*"] & \pi_1(\Pi A_i', [x_1', \ldots, x_s']) & \pi_2(\Pi S_i^2, [b_1', \ldots, b_s']) \arrow[l, "\Delta'"'] & \arrow[l, "(\Pi p_{m_i'})_*"'] \ldots,
\end{tikzcd}
$$

bei welchem die senkrechten Homomorphismen Isomorphismen sind.

Hilfssatz 7. *Ist für die Bündel* $[p_{m_1}, p_{m_2}]\colon L_{m_1}(1) \times L_{m_2}(1) \to S_1^2 \times S_2^2$ *und* $[p_1, p_{m_1 \cdot m_2}]\colon S^3 \times L_{m_1 \cdot m_2}(1) \to S_1^2 \times S_2^2$ *ein fasertreuer Homöomorphismus* $f\colon L_{m_1}(1) \times L_{m_2}(1) \to S^3 \times L_{m_1 \cdot m_2}(1)$ *gegeben, so folgt, daß mindestens einer der Moduln* m_1, m_2 *den Wert* 1 *hat.*

Beweis. Aus (153) und (155) folgt das kommutative Diagramm

$$
(156)\qquad
\begin{tikzcd}
\pi_1(A_1, x_1) \times \pi_1(A_2, x_2) \arrow[d, "\gamma'^{-1}(f|A_1 \times A_2)_*\gamma"] & \pi_2(S_1^2, b_1) \times \pi_2(S_2^2, b_2) \arrow[l, "{[\Delta_{m_1}, \Delta_{m_2}]}"'] \arrow[d, "\alpha'^{-1} g_* \alpha"] \\
\pi_1(A_1', x_1') \times \pi_1(A_2', x_2') & \pi_2(S_1^2, b_1') \times \pi_2(S_2^2, b_2'), \arrow[l, "{[\Delta_1, \Delta_{m_1 \cdot m_2}]}"']
\end{tikzcd}
$$

bei welchem

(157) die senkrechten Homomorphismen Isomorphismen sind.

Die erzeugenden Elemente der zu Z isomorphen Gruppen $\pi_2(S_i^2, b_i^{(\prime)})$, $\pi_1(A_i^{(\prime)}, x_i^{(\prime)})$ wählen wir so, daß (152) gilt. Sind $a_1^{(\prime)} \in \pi_2(S_1^2, b_1^{(\prime)})$, $a_2^{(\prime)} \in \pi_2(S_2^2, b_2^{(\prime)})$ solche erzeugenden Elemente, so nehmen wir

(158) $[a_1^{(\prime)}, 0]$ und $[0, a_2^{(\prime)}]$ als Basis für $\pi_2(S_1^2, b_1^{(\prime)}) \times \pi_2(S_2^2, b_2^{(\prime)})$.

Bei $\pi_1(A_1^{(\prime)}, x_1^{(\prime)}) \times \pi_1(A_2^{(\prime)}, x_2^{(\prime)})$ verfahren wir analog. Dann erhalten wir für alle ganzzahligen t_1, t_2

$$
\begin{aligned}
(159)\qquad \alpha'^{-1} g_* \alpha [t_1 \cdot a_1, t_2 \cdot a_2] &\overset{(154)}{=} \alpha'^{-1} [t_1 \cdot g_* \alpha_{m_1 *}(a_1) + t_2 \cdot g_* \alpha_{m_2 *}(a_2)] \\
&\overset{(154)}{=} [t_1 \cdot \alpha_*^1 g_* \alpha_{m_1 *}(a_1) + t_2 \cdot \alpha_*^1 g_* \alpha_{m_2 *}(a_2), \\
&\qquad t_1 \cdot \alpha_*^{m_1 \cdot m_2} g_* \alpha_{m_1 *}(a_1) + t_2 \cdot \alpha_*^{m_1 \cdot m_2} g_* \alpha_{m_2 *}(a_2)] \\
&= \big[\big(t_1 \cdot \operatorname{grad}(\alpha^1 g \alpha_{m_1})_* + t_2 \cdot \operatorname{grad}(\alpha^1 g \alpha_{m_2})_*\big) \cdot a_1', \\
&\qquad \big(t_1 \cdot \operatorname{grad}(\alpha^{m_1 \cdot m_2} g \alpha_{m_1})_* + t_2 \cdot \operatorname{grad}(\alpha^{m_1 \cdot m_2} g \alpha_{m_2})_*\big) \cdot a_2'\big];
\end{aligned}
$$

dabei ist $\operatorname{grad}(a^{m'_j} g a_{m_i})_*$ der Abbildungsgrad von

$$(a^{m'_j} g a_{m_i})_* \colon \pi_2(S_i^2, b_i) \to \pi_2(S_j^2, b'_j)$$

bezüglich der erzeugenden Elemente a_i, a'_j. (159) besagt, daß $a'^{-1} g_* a$ bezüglich der in (158) gewählten Basen durch die ganzzahlige Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad}(a^1 g a_{m_1})_* & \operatorname{grad}(a^1 g a_{m_2})_* \\ \operatorname{grad}(a^{m_1 \cdot m_2} g a_{m_1})_* & \operatorname{grad}(a^{m_1 \cdot m_2} g a_{m_2})_* \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Wegen (157) ist $\mathfrak{A}$ unimodular.

Beschreiben wir bezüglich der Basen (158) auch die übrigen Homomorphismen von (156), so erhalten wir aus der Kommutativität des Diagramms die Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m_1 \cdot m_2 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cdot \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \tag{160}$$

in ganzzahligen Matrizen; dabei folgt die Gestalt der Diagonalmatrizen aus (152).

Nach Hopf [7] ist nun für $a^1 g \colon S_1^2 \times S_2^2 \to S_1^2$ eine der partiellen Abbildungen $a^1 g a_{m_i} \colon S_i^2 \to S_1^2$ (d.h., eine der Kompositionen von $a^1 g$ mit den Injektionen) unwesentlich; eine der Zahlen $\operatorname{grad}(a^1 g a_{m_1})_*$, $\operatorname{grad}(a^1 g a_{m_2})_*$ ist also Null. Sei dies o.B.d.A. die zweite. Da $\mathfrak{A}$ unimodular ist, muß dann für das erste Glied der ersten Zeile

$$\operatorname{grad}(a^1 g a_{m_1})_* = \pm 1 \tag{161}$$

gelten.

Die Matrizengleichung (160) ergibt, daß

(162) $\operatorname{grad}(a^1 g a_{m_1})_*$ durch m_1 teilbar ist.

Nun folgt aus (161) und (162) $m_1 = 1$ für die natürliche Zahl m_1, q.e.d.

Aus Satz 1 und Hilfssatz 7 folgt unmittelbar

Satz 16. *$m_1 \geqslant 2$, $m_2 \geqslant 2$ seien natürliche Zahlen mit $(m_1, m_2) = 1$. Dann gilt zwar $L_{m_1}(1) \times L_{m_2}(1) \approx S^3 \times L_{m_1 \cdot m_2}(1)$; es existiert aber kein fasertreuer Homöomorphismus*

$$f \colon L_{m_1}(1) \times L_{m_2}(1) \to S^3 \times L_{m_1 \cdot m_2}(1)$$

für die Bündel

$$[p_{m_1}, p_{m_2}] \colon L_{m_1}(1) \times L_{m_2}(1) \to S^2 \times S^2,$$
$$[p_1, p_{m_1 \cdot m_2}] \colon S^3 \times L_{m_1 \cdot m_2}(1) \to S^2 \times S^2.$$

Satz 16 liefert daher Beispiele für Bündel mit gleicher Basis — $S^2 \times S^2$ —, gleicher Faser — $S^1 \times S^1$ — und homöomorphen Totalräumen, welche nicht fasertreu homöomorph sind.

Hilfssatz 7 läßt sich mit derselben Schlußweise auf $s \geqslant 2$ Faktoren dahingehend verallgemeinern, daß unter den natürlichen Zahlen $m_1, \ldots, m_s$ höchstens eine von 1 verschieden sein kann. Dies liefert mit Satz 2 ein Analogon zu Satz 16 für paarweise relativ prime $m_1, \ldots, m_s$; $s \geqslant 2$, von denen mindestens zwei nicht kleiner als 2 sind.

10. Anhang

(Beziehungen zur h-Cobordismentheorie, Primfaktorzerlegung von Mannigfaltigkeiten)

A) Sei $n \geqslant 4$ gegeben. Da $R^{n-3} \times S^3$ eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, gibt es eine differenzierbare Einbettung $f_1\colon D^n \to R^{n-3} \times S^3$ für die abgeschlossene Einheitskugel $D^n \subseteq R^n$. Ferner gibt es (vermöge einer Kugelschicht) eine differenzierbare Einbettung $R^1 \times S^3 \to R^4$, also auch eine differenzierbare Einbettung $R^{n-3} \times S^3 \to R^n$. Da R^n zu der offenen Einheitskugel $\underline{D^n} \subseteq R^n$ diffeomorph ist, gibt es daher eine differenzierbare Einbettung $f_3\colon R^{n-3} \times S^3 \to \underline{D^n}$. Aus (41) erhalten wir einen Diffeomorphismus

$$f_2\colon R^{n-3} \times S^3 \times L_m(r) \to R^{n-3} \times S^3 \times L_m(r')$$

für beliebige $L_m(r)$, $L_m(r')$.

Dann ist

$$(163) \qquad i\colon D^n \times L_m(r) \xrightarrow{[f_1, \mathrm{id}\, L_m(r)]} R^{n-3} \times S^3 \times L_m(r)$$
$$\xrightarrow{f_2} R^{n-3} \times S^3 \times L_m(r') \xrightarrow{[f_3, \mathrm{id}\, L_m(r')]} \underline{D^n} \times L_m(r'); \qquad n \geqslant 4$$

eine differenzierbare Einbettung von $D^n \times L_m(r)$ in das Innere von $D^n \times L_m(r')$. Dies ist eine Verallgemeinerung des Resultates von Milnor [12], S. 578, wo $L_m(r) \simeq L_m(r')$ als zusätzliche Voraussetzung gemacht ist.

Wir machen im folgenden ebenfalls diese Einschränkung, d.h. $\pm r \cdot r'$ sei quadratischer Rest mod m (s. (8)). In diesem Fall läßt sich der Beweis von Satz 1 mit Hilfe der Formel (37) zur Berechnung der Abbildungsgrade so modifizieren, daß wir bei (41) einen Diffeomorphismus $f\colon S^3 \times L_m(r) \to S^3 \times L_m(r')$ erhalten, dessen partielle Abbildungen $\alpha f \alpha_q\colon L_m(r) \to L_m(r')$ den Abbildungsgrad ± 1 haben, nach Franz [6] oder Olum [16] also Homotopieäquivalenzen sind. (Dabei ist die Injektion $\alpha_q\colon L_m(r) \to S^3 \times L_m(r)$ durch $\alpha_q(x) = [q, x]$ für einen Basispunkt $q \in S^3$ erklärt und $\alpha\colon S^3 \times L_m(r') \to L_m(r')$ die Projektion.) Gehen wir davon aus, daß f diese zusätzliche Eigenschaft hat, so ist in (163) die zugehörige Einbettung i ebenfalls eine Homotopieäquivalenz. Daraus folgt nach Milnor [12], S. 578 und 579, daß die differenzierbare Mannigfaltigkeit $W_n = D^n \times$

$\times L_m(r') - i(\underline{D^n} \times L_m(r))$; $n \geqslant 4$ einen h-Cobordismus zwischen ihren Randkomponenten $S^{n-1} \times L_m(r')$ und $i(S^{n-1} \times L_m(r))$ ergibt.

Für die Konstruktion von i in (163) lassen sich f_2 (vermöge Satz 1) sowie f_1 und f_3 explizit angeben. Dadurch können wir eine explizite Beschreibung des h-Cobordismus $\big(W_n; S^{n-1} \times L_m(r'), i(S^{n-1} \times L_m(r))\big)$ erhalten. Vielleicht enthält eine solche Beschreibung Informationen für die Entscheidung der noch offenen Frage, ob W_n topologisch ein Produkt ist oder nicht.

Wäre beispielsweise $W_4 \sim I \times S^3 \times L_m(r)$ (für das abgeschlossene Einheitsintervall I) richtig, so ergäbe sich durch „Einfüllen" von $i(\underline{D^4} \times L_m(r))$: $D^4 \times L_m(r) \sim D^4 \times L_m(r')$ und, da wir auf beiden Seiten eine weitere Vollkugel anmultiplizieren können,

$$D^n \times L_m(r) \sim D^n \times L_m(r'), \qquad n \geqslant 4. \tag{164}$$

Für die Ränder ergäbe sich aus (164)

$$S^{n-1} \times L_m(r) \sim S^{n-1} \times L_m(r'), \qquad n \geqslant 4. \tag{165}$$

Analoge Resultate würden folgen, wenn W_n für ein $n > 4$ topologisch ein trivialer h-Cobordismus wäre.

Aus (164) und für Sphären gerader Dimension auch aus (165) ergäben sich nach Milnor [12], S. 588

(166) Gegenbeispiele gegen die Hauptvermutung bei Mannigfaltigkeiten, da sich die rechte und die linke Seite für

$$L_m(r) \simeq L_m(r'), \qquad L_m(r) \not\equiv L_m(r') \tag{167}$$

(beispielsweise $m = 7$, $r = 2$, $r' = 1$) durch die Franz-Reidemeister-Torsion [5], [18] kombinatorisch und differenzierbar unterscheiden lassen.

$D^4 \times L_m(r)$ und $D^4 \times L_m(r')$ sind also unter den Bedingungen (167) Beispiele für kombinatorisch und differenzierbar verschiedene Mannigfaltigkeiten, für die das Innere (Milnor [12]) und die Ränder (Satz 1) diffeomorph sind. Ihre topologische Gleichheit hätte — ebenso wie die topologische Trivialität von $\big(W_4; S^3 \times L_m(r'), i(S^3 \times L_m(r))\big)$ — die Konsequenzen (164), (165) und (166).

B) Wir setzen weiterhin $L_m(r) \simeq L_m(r')$ voraus. Dann sind nach Milnor [12] $L_m(r) \times S^n$ und $L_m(r') \times S^n$ für $n \geqslant 2$ h-cobordant. Daraus folgt nach Kwun und Szczarba [11]

$$L_m(r) \times S^n \times S^1 \approx L_m(r') \times S^n \times S^1. \tag{168}$$

Solche Ergebnisse der h-Cobordismentheorie lassen sich mit denjenigen dieser Arbeit zu weiteren kombinieren. Wir erhalten beispielsweise unter den Voraussetzungen $(m_1, m_2) = 1$, $n \geqslant 2$ und $\pm r_1 \equiv k^2 \bmod m_1$:

$$(169)\qquad L_{m_1}(r_1)\times L_{m_2}(r_2)\times S^n\times S^1 \overset{(168)}{\approx} L_{m_1}(1)\times L_{m_2}(r_2)\times S^n\times S^1$$
$$\overset{\text{Satz 1}}{\approx} S^3\times L_{m_1\cdot m_2}(1)\times S^n\times S^1.$$

(Für $n\neq 3$, $L_{m_1}(r_1)\not\equiv L_{m_1}(1)$, $L_{m_2}(r_2)\not\equiv L_{m_2}(1)$ ist (169) keine Aussage der Sätze 1 bis 15.)

C) Einen topologischen Raum X wollen wir *prim* nennen, wenn aus $X\sim X_1\times X_2$ stets folgt, daß (mindestens) ein Faktor einpunktig ist (s. Borsuk [3]). Der andere Faktor ist dann folglich zu X homöomorph.

SATZ 17. *S^n ist für alle $n\geqslant 0$ ein primer Raum.*

Beweis. S^0 ist trivialerweise prim, da die Punktezahl 2 eine Primzahl ist.

Sei also $n\geqslant 1$ und

$$(170)\qquad S^n\sim X_1\times X_2.$$

Dann folgt aus $\pi_q(S^n)\approx\pi_q(X_1)\times\pi_q(X_2)\ \forall q>0$ (Hu [9], S. 143 f.)

$$(171)\qquad \pi_q(X_1)\times\pi_q(X_2)\approx\begin{cases}0 & \text{für } 0<q<n,\\ Z & \text{für } q=n.\end{cases}$$

Sei o.B.d.A. $\pi_n(X_1)\not\approx 0$. Dann folgt aus (171) und dem Hurewicz-Satz der Homotopietheorie

$$(172)\qquad H_n(X_1)\not\approx 0 \quad \text{für die } n\text{-te singuläre Homologiegruppe.}$$

X_1 und X_2 sind mit S^n $(n\geqslant 1)$ bogenweise zusammenhängende Kompakten und ANR-Räume (Hu [9], S. 30). Daher gilt, wie man über approximierende Polyeder von X_1 zeigen kann,

$$(173)\qquad H_q(X_1)\approx 0 \quad \text{für alle } q>\dim(X_1);$$

dabei sind wiederum singuläre Homologiegruppen gemeint und der Dimensionsbegriff von Hurewicz-Wallman [10], den wir in diesem Beweis weiterhin verwenden.

Aus (172) und (173) folgt

$$(174)\qquad \dim(X_1)\geqslant n.$$

Vermöge (170) gibt es in S^n eine zu X_1 homöomorphe Teilmenge X_1'. Dann gilt

$$(175)\qquad \dim(X_1)\ \big(=\dim(X_1')\big)\leqslant n.$$

Die Ungleichungen (174) und (175) haben

$$(176)\qquad \dim(X_1)\ \big(=\dim(X_1')\big)=n$$

zur Folge.

Nach Hurewicz-Wallman [10], S. 46, Corollar 1 enthält daher X_1 (mit X_1') eine zum n-dimensionalen abgeschlossenen Würfel $I^n = \underbrace{I \times \ldots \times I}_{n \text{ Faktoren}}$ homöomorphe Teilmenge $Y \subseteq X_1$.

Da X_2 und I kompakt sind und I eindimensional ist, können wir auf $I^n \times X_2$ die Produktregel für Dimensionen in ihrer starken Form anwenden, d.h., wir erhalten durch Iteration von Hurewicz-Wallman [10], S. 34, Anmerkung 3,

$$\text{(177)} \qquad \dim(Y \times X_2) = \dim(I^n \times X_2) = n + \dim(X_2) \overset{(176)}{=} \dim(X_1) + \dim(X_2).$$

Zusammen mit der aus der Teilraumbeziehung $X_1 \times X_2 \supseteq Y \times X_2$ herrührenden Ungleichung $\dim(X_1 \times X_2) \geqslant \dim(Y \times X_2)$ haben wir folglich

$$\text{(178)} \qquad \dim(X_1 \times X_2) \geqslant \dim(X_1) + \dim(X_2)$$

gezeigt.

Koppeln wir (178) mit der gewöhnlichen Produktregel $\dim(X_1 \times X_2) \leqslant \dim(X_1) + \dim(X_2)$, so erhalten wir

$$\text{(179)} \qquad n = \dim(S^n) = \dim(X_1 \times X_2) = \dim(X_1) + \dim(X_2).$$

Aus (179) und (176) folgt, daß X_2 nulldimensional ist. Da X_2 bogenweise zusammenhängend ist, kann dies nur der Fall sein, wenn X_2 einpunktig ist, q.e.d.

Im Beweis von Satz 17 haben wir nur Homotopiesphäreneigenschaften verwendet, d.h., Satz 17 läßt sich auch für Homotopiesphären aussprechen.

Aus Satz 17 folgt unmittelbar, daß

(180) dreidimensionale Linsenräume prim sind,

denn, ist eine Faktordarstellung $L_m(r) \sim X_1 \times X_2$ gegeben, so gilt für die universellen Überlagerungen $S^3, \tilde{X}_1$ und $\tilde{X}_2$: $S^3 \sim \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2$. Einer der Faktoren $\tilde{X}_i$ ist nach Satz 17 einpunktig und der zugehörige Grundraum X_i dann auch wegen der Epimorphie der Überlagerungsabbildung $\tilde{X}_i \to X_i$.

(180) gilt ebenso für $(2n-1)$-dimensionale Linsenräume mit $n \geqslant 3$ (s. Franz [5]), da diese von S^{2n-1} überlagert werden, und noch allgemeiner für beliebige Räume, die von einer Homotopiesphäre überlagert werden.

Die Sätze 1 bis 14 enthalten, da die bei ihnen vorkommenden topologischen Faktoren als prim erwiesen wurden, Beispiele gegen die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung bei Mannigfaltigkeiten bezüglich des topologischen Produktes. Aus Satz 1 erhalten wir beispielsweise $L_2(1) \times$

$\times L_3(1) \approx S^3 \times L_6(1)$, $S^3 \times L_5(2) \approx S^3 \times L_5(1)$ (s. (41)); diese Beispiele zeigen, daß die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung noch nicht einmal „bis auf Homotopie" gültig ist.

Im Gegensatz dazu sind die übrigen mir bekannten verschiedenen Faktorzerlegungen einer Mannigfaltigkeit — etwa diejenigen des R^4 von Bing [2] und anderen, $R^n \times L_m(r) \approx R^n \times L_m(r')$ für $n \geqslant 3$ und $L_m(r) \simeq L_m(r')$ bei Milnor [12], diejenigen der h-Cobordismentheorie (s. (168)), letztens diejenigen mit Homotopiesphären und Homotopiezellen als Faktoren (Hirsch [8]) — so beschaffen, daß für $\Pi X_i \sim \Pi Y_i$ bei geeigneter Anordnung der Faktoren $X_i \simeq Y_i \, \forall i$ gilt.

Zusätze bei der Korrektur.

(I) Bei P. Hilton and J. Roitberg, *Note on principal S^3-bundles,* Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), S. 957-959 sind ebenfalls Mannigfaltigkeiten M^n angegeben, die homotop-verschiedene Faktorzerlegungen gestatten, allerdings von höherer Dimension als $n = 6$.

(II) Im Rahmen einer weiteren Arbeit werden wir zeigen, daß (1) nicht uneingeschränkt gültig ist. Beispielsweise sind $L_5(1) \times L_5(2)$ und $L_5(1) \times L_5(1)$ sowie $L_5(1) \times L_5(2)$ und $L_5(2) \times L_5(2)$ jeweils von verschiedenem Homotopietyp.

Literaturverzeichnis

[1] R. H. Bing, *An alternative proof that 3-manifolds can be triangulated*, Ann. Math. 69 (1959), S. 37-65.

[2] — *The cartesian product of a certain non-manifold and a line is E^4*, ibidem 70 (1959), S. 399-412.

[3] K. Borsuk, *On the decomposition of manifolds into products of curves and surfaces*, Fund. Math. 33 (1945), S. 273-298.

[4] E. J. Brody, *The topological classification of lens spaces*, Ann. Math. 71 (1959), S. 163-184.

[5] W. Franz, *Über die Torsion einer Überdeckung*, J. reine angew. Math. 173 (1935), S. 245-254.

[6] — *Abbildungsklassen und Fixpunktklassen dreidimensionaler Linsenräume*, ibidem 185 (1941), S. 65-77.

[7] H. Hopf, *Über die Topologie der Gruppenmannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen*, Ann. Math. 42 (1939), S. 22-52.

[8] M. W. Hirsch, *On homotopy spheres of low dimension*, in: *Differential and combinatorial topology*, A Symposium in Honor of Marston Morse, Princeton 1965.

[9] S. T. Hu, *Homotopy theory*, New York and London 1959.

[10] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension theory*, 2. Auflage, Princeton 1948.

[11] K. W. Kwun and R. H. Szczarba, *Product and sum theorems for Whitehead torsion*, Ann. Math. 82 (1964), S. 183-190.

[12] J. Milnor, *Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct*, ibidem 74 (1961), S. 575-590.

[13] — *Whitehead torsion*, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), S. 358-426.

[14] E. E. Moise, *Affine structures in 3-manifolds* V, Ann. Math. 56 (1951), S. 96-114.

[15] J. R. Munkres, *Elementary differential topology*, Princeton 1963.

[16] P. Olum, *Mappings of manifolds and the notion of degree*, Ann. Math. 58 (1953), S. 458-480.

[17] Ch. Papakyriakopoulos, *A new proof of the invariance of the homology groups of a complex*, Bull. Soc. Math. Grèce 22 (1943), S. 1-154.

[18] K. Reidemeister, *Homotopieringe und Linsenräume*, Abhandl. Math. Seminar Hamb. Univ. 11 (1935), S. 102-109.

[19] G. de Rham, *Complexes à automorphismes et homéomorphie différentiable*, Ann. Inst. Fourier 2 (1950), S. 51-67.

[20] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton 1951.

[21] J. H. C. Whitehead, *On C^1-complexes*, Ann. Math. 41 (1939), S. 809-824.