ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
VIII, 4 (1966)

Z. WESOŁOWSKI (Warszawa)

DEFORMACJA ELEMENTÓW POWIERZCHNIOWYCH I LINIOWYCH W MECHANICE KONTINUUM

U podstaw mechaniki kontinuum leży podział deformacji na dwa etapy: deformację ze średnim obrotem równym zeru i sztywny obrót. W zwykłym niebiegunowym przypadku konieczne jest przeprowadzenie tego podziału jedynie dla elementów objętościowych. Zagadnienie to jest całkowicie opracowane zarówno dla deformacji dużych, jak i małych (por. np. [1]). W przypadku biegunowym, tzn. wtedy gdy na elementy kontinuum oprócz sił działają również momenty, zachodzi potrzeba przeprowadzenia tego podziału również dla elementów powierzchniowych i liniowych [2]. Zagadnienie to nie jest dotychczas opracowane; częściowe rozwiązanie podane jest w niniejszej pracy.

Wszystkie związki podane są w notacji macierzowej. Duże końcowe litery alfabetu $\mathbf{S}, \mathbf{T}, \ldots$ oznaczają macierze symetryczne. Oznaczenia $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ zarezerwowane dla macierzy ortogonalnych, a $\mathbf{I}$ dla macierzy jednostkowej. Małe litery alfabetu łacińskiego $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ... oznaczają wektory, a małe litery alfabetu greckiego $\alpha, \beta, \ldots$ skalary.

1. Skończona deformacja.

1.1. Skończona deformacja elementu objętościowego. W celu uzyskania podstawy do dalszych rozważań podamy najpierw w skrócie związki dotyczące deformacji elementu objętościowego. W kartezjańskim prostokątnym układzie współrzędnych macierz gradientów deformacji $\mathbf{F}$ (z założenia $\det \mathbf{F} \neq 0$) podporządkowuje każdemu wektorowi $\mathbf{x}$ wektor $\mathbf{Fx}$ i określa całkowicie odkształcenie i obrót otoczenia rozpatrywanego punktu.

Rozkład deformacji na kolejno nałożone na siebie deformacje ze średnim obrotem równym zeru i obrót uzyskuje się poprzez przedstawienie $\mathbf{F}$ jako iloczynu macierzy ortogonalnej $\mathbf{R}$ i dodatnio określonej macierzy symetrycznej $\mathbf{S}$

$$\mathbf{F} = \mathbf{RS}, \quad \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}, \quad \mathbf{S}^T = \mathbf{S}, \qquad (1.1)$$
$$\mathbf{S}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{F}(\mathbf{F}^T\mathbf{F})^{-1/2}.$$

Takie przedstawienie jest zawsze możliwe [1].

Ponieważ $\mathbf{S}$ jest macierzą symetryczną, zawsze istnieją przynajmniej trzy wzajemnie ortogonalne wektory $\mathbf{x}_{(i)}$, które pod wpływem deformacji $\mathbf{S}$ nie zmieniają kierunków. Płaszczyzny wyznaczone przez wektory $\mathbf{x}_{(i)}$ są płaszczyznami symetrii deformacji $\mathbf{S}$, a średni obrót wektorów $\mathbf{x}$ jest równy zeru. Poszczególne wektory doznają jednak pewnych obrotów.

Podczas deformacji $\mathbf{R}$ każdy wektor $\mathbf{Sx}$ doznaje tylko skończonego obrotu, a pęk wektorów $\mathbf{Sx}$ obraca się jak ciało sztywne.

1.2. Skończona deformacja elementu powierzchniowego. Rozpatrujemy element powierzchniowy $d\sigma$ leżący na płaszczyźnie Π. Jednostkowy wektor normalny do Π oznaczymy przez $\mathbf{n}$, a typowy wektor styczny do Π przez $\mathbf{t}$. Zagadnienie rozkładu deformacji na deformację ze średnim obrotem równym zeru i obrót sprowadza się teraz do znalezienia macierzy symetrycznej $\mathbf{T}$ i macierzy ortogonalnej $\mathbf{Q}$ takich, że

$$\mathbf{Ft} = \mathbf{QTt}, \quad \mathbf{T}^T = \mathbf{T}, \quad \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}, \tag{1.2}$$

przy dodatkowym ograniczeniu na $\mathbf{T}$

$$\mathbf{Tt} \perp \mathbf{n}. \tag{1.3}$$

Dostatecznym i koniecznym warunkiem spełnienia (1.2) jest, by

$$\mathbf{F} - \mathbf{QT} = \mathbf{dn}^T, \tag{1.4}$$

gdzie $\mathbf{d}$ jest dowolnym wektorem. Dostatecznym i koniecznym warunkiem spełnienia (1.3) jest natomiast, by $\mathbf{n}$ było wektorem własnym macierzy symetrycznej $\mathbf{T}$(¹)

$$\mathbf{Tn} = \tau_3\mathbf{n}. \tag{1.5}$$

Na płaszczyźnie Π leżą teraz dwa wzajemnie ortogonalne wektory $\mathbf{t}_1$ i $\mathbf{t}_2$, które podczas deformacji $\mathbf{T}$ nie zmieniają swoich kierunków:

$$\mathbf{Tt}_1 = \tau_1\mathbf{t}_1, \quad \mathbf{Tt}_2 = \tau_2\mathbf{t}_2. \tag{1.6}$$

Każdy wektor $\mathbf{t} \perp \mathbf{n}$ można przedstawić w postaci $\mathbf{t} = \nu_1\mathbf{t}_1 + \nu_2\mathbf{t}_2$, skąd wynika

$$\mathbf{Tt} = \tau_1\nu_1\mathbf{t}_1 + \tau_2\nu_2\mathbf{t}_2, \quad \mathbf{Tt} \perp \mathbf{n}. \tag{1.7}$$

Ponieważ deformacja $\mathbf{T}$ ma na Π dwie osie symetrii (pokrywające się z $\mathbf{t}_1$ i $\mathbf{t}_2$), średni obrót elementów liniowych leżących na Π jest równy zeru. Wartość własna τ_3 odpowiadająca wektorowi $\mathbf{n}$ może być wybrana w sposób dowolny.

(¹) Dowody podanych tutaj twierdzeń są bardzo proste i dlatego je pomijamy. Również w dalszych częściach pracy nie będziemy przytaczali prostych dowodów z rachunku macierzowego.

Oznaczmy przez $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$ dwa dowolne niekolinearne wektory leżące na Π. Najogólniejszą postacią macierzy symetrycznej $\mathbf{T}$ spełniającej (1.5) jest

$$\mathbf{T} = \varphi_1 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^T + \varphi_2 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2^T + \varphi_3(\mathbf{n}\mathbf{n}^T - \mathbf{I}) + \tau_3 \mathbf{I}, \tag{1.8}$$

gdzie φ_1, φ_2, φ_3 są dowolnymi parametrami(²).

W celu znalezienia rozkładu (1.2) należy więc rozwiązać równanie macierzowe

$$\mathbf{F} - \mathbf{Q}[\varphi_1 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^T + \varphi_2 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2^T + \varphi_3(\mathbf{n}\mathbf{n}^T - \mathbf{I}) + \tau_3 \mathbf{I}] = \mathbf{d}\mathbf{n}^T, \tag{1.9}$$

przy czym przyjmuje się, że $\mathbf{n}$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, oraz τ_3 są dane.

Oznaczając

$$\mathbf{h} = -\mathbf{Q}^T \mathbf{d}, \tag{1.10}$$

zgodnie z (1.9) mamy

$$\begin{aligned}[\varphi_1 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^T + \varphi_2 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2^T + \varphi_3(\mathbf{n}\mathbf{n}^T - \mathbf{I}) + \tau_3 \mathbf{I} + \mathbf{n}\mathbf{h}^T] \times \\ \times [\varphi_1 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^T + \varphi_2 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2^T + \varphi_3(\mathbf{n}\mathbf{n}^T - \mathbf{I}) + \tau_3 \mathbf{I} + \mathbf{h}\mathbf{n}^T] = \mathbf{F}^T \mathbf{F},\end{aligned} \tag{1.11}$$

z którego można wyznaczyć bezpośrednio φ_1, φ_2, φ_3 oraz wektor $\mathbf{h}$. Po określeniu tych wielkości macierz $\mathbf{Q}$ zgodnie z (1.9) i (1.10) dana jest związkiem

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F}[\varphi_1 \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^T + \varphi_2 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2^T + \varphi_3(\mathbf{n}\mathbf{n}^T - \mathbf{I}) + \tau_3 \mathbf{I} + \mathbf{h}\mathbf{n}^T]^{-1}. \tag{1.12}$$

Pełne rozwiązanie równania (1.9) dla przypadku, kiedy deformacja jest mała, zostanie podane w rozdziale 3.

Przejdziemy obecnie do wyznaczenia niezmienników odkształcenia $\mathbf{T}$. Symetryczna macierz $\mathbf{T}$ ma w ogólnym przypadku trzy niezmienniki. Załóżmy, że są to wartości własne macierzy $\mathbf{T}$. W omówionym przypadku sens fizykalny mają jedynie te wartości własne, którym odpowiadają wektory własne leżące na Π. Spośród niezmienników należy więc wykluczyć wielkość τ_3 odpowiadającą wektorowi własnemu $\mathbf{n}$.

Wartości własne τ_k $(k = 1, 2, 3)$ spełniają równanie

$$\tau^3 - \tau^2 \operatorname{tr}\mathbf{T} + \tfrac{1}{2}\tau(\operatorname{tr}^2\mathbf{T} - \operatorname{tr}\mathbf{T}^2) - \det\mathbf{T} = 0. \tag{1.13}$$

Równanie to można podzielić przez $\tau - \tau_3$ (τ_3 jest rozwiązaniem), co prowadzi do

$$\tau^2 - \chi_1 \tau + \chi_2 = 0, \tag{1.14}$$

(²) Można w szczególności przyjąć np.

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} n_2 n_3 (n_2 - n_3) \\ n_3 n_1 (n_3 - n_1) \\ n_1 n_2 (n_1 - n_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} n_2 n_3 (n_3 - n_1) \\ n_3 n_1 (n_1 - n_2) \\ n_1 n_2 (n_2 - n_3) \end{bmatrix}.$$

gdzie

$$
(1.15)\quad \begin{aligned} \chi_1 &= \operatorname{tr}\mathbf{T}-\tau_3 = \operatorname{tr}\mathbf{T}-\mathbf{n}^T\mathbf{T}\mathbf{n},\\ \chi_2 &= \tfrac{1}{2}(\operatorname{tr}^2\mathbf{T}-\operatorname{tr}\mathbf{T}^2)-\tau_3\operatorname{tr}\mathbf{T}+\tau_3^2 = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tr}^2\mathbf{T}-\operatorname{tr}\mathbf{T}^2)-\mathbf{n}^T\mathbf{T}\mathbf{n}\operatorname{tr}\mathbf{T}+\mathbf{n}^T\mathbf{T}^2\mathbf{n}. \end{aligned}
$$

Współczynniki χ_1 oraz χ_2 określają całkowicie wartości własne τ_1 oraz τ_2 macierzy $\mathbf{T}$, są więc poszukiwanymi niezmiennikami odkształcenia $\mathbf{T}$. Z (1.15) wynika, że niezmiennikami są również

$$
(1.16)\quad \bar{\chi}_1 = \chi_1 = \operatorname{tr}\mathbf{T}-\mathbf{n}^T\mathbf{T}\mathbf{n}, \qquad \bar{\chi}_2 = \chi_1^2-2\chi_2 = \operatorname{tr}\mathbf{T}^2-\mathbf{n}^T\mathbf{T}^2\mathbf{n}.
$$

1.3. Skończona deformacja elementu liniowego. Rozpatrujemy element liniowy dl, który przed deformacją pokrywa się z wektorem $\mathbf{n}$. Zagadnienie rozkładu deformacji na odkształcenie i obrót sprowadza się do znalezienia macierzy ortogonalnej $\mathbf{P}$ i macierzy symetrycznej $\mathbf{U}$ takich, że

$$
(1.17)\quad \mathbf{F}\mathbf{n} = \mathbf{P}\mathbf{U}\mathbf{n}
$$

przy dodatkowym ograniczeniu

$$
(1.18)\quad \mathbf{U}\mathbf{n} = \lambda\mathbf{n},
$$

przy czym zgodnie z (1.1) $\lambda^2 = \mathbf{n}^T\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{n}$. Nie zwężając ogólności, przyjmiemy $\lambda > 0$. Skalar λ jest jedynym niezmiennikiem odkształcenia elementu liniowego.

Koniecznym i dostatecznym warunkiem spełnienia (1.17) jest, by

$$
(1.19)\quad \mathbf{F}-\mathbf{P}\mathbf{U} = \mathbf{d}_1\mathbf{r}_1^T+\mathbf{d}_2\mathbf{r}_2^T,
$$

gdzie $\mathbf{d}_1$ oraz $\mathbf{d}_2$ są dowolnymi wektorami, a $\mathbf{r}_1$ oraz $\mathbf{r}_2$ niekolinearnymi wektorami ortogonalnymi do $\mathbf{n}$. Wektory te traktujemy jako dane. Warunkiem spełnienia (1.18) jest natomiast możliwość przedstawienia macierzy $\mathbf{U}$ w następującej postaci:

$$
(1.20)\quad \mathbf{U} = \varphi_1\mathbf{r}_1\mathbf{r}_1^T+\varphi_2\mathbf{r}_2\mathbf{r}_2^T+\varphi_3(\mathbf{n}\mathbf{n}^T-\mathbf{I})+\lambda\mathbf{I}.
$$

Oznaczając

$$
(1.21)\quad \mathbf{h}_1 = \mathbf{P}^T\mathbf{d}_1, \qquad \mathbf{h}_2 = \mathbf{P}^T\mathbf{d}_2,
$$

zgodnie z (1.19) i (1.20) mamy równanie

$$
(1.22)\quad \begin{aligned} \mathbf{F}^T\mathbf{F} = {} & [\varphi_1\mathbf{r}_1\mathbf{r}_1^T+\varphi_2\mathbf{r}_2\mathbf{r}_2^T+\varphi_3(\mathbf{n}\mathbf{n}^T-\mathbf{I})+\lambda\mathbf{I}+\mathbf{r}_1\mathbf{h}_1^T+\mathbf{r}_2\mathbf{h}_2^T]\times\\ & \times[\varphi_1\mathbf{r}_1\mathbf{r}_1^T+\varphi_2\mathbf{r}_2\mathbf{r}_2^T+\varphi_3(\mathbf{n}\mathbf{n}^T-\mathbf{I})+\lambda\mathbf{I}+\mathbf{h}_1\mathbf{r}_1^T+\mathbf{h}_2\mathbf{r}_2^T]. \end{aligned}
$$

Po określeniu stąd wektorów $\mathbf{h}_1$ oraz $\mathbf{h}_2$ ortogonalna macierz $\mathbf{P}$ dana jest związkiem

$$
(1.23)\quad \mathbf{P} = \mathbf{F}[\varphi_1\mathbf{r}_1\mathbf{r}_1^T+\varphi_2\mathbf{r}_2\mathbf{r}_2^T+\varphi_3(\mathbf{n}\mathbf{n}^T-\mathbf{I})+\lambda\mathbf{I}+\mathbf{h}_1\mathbf{r}_1^T+\mathbf{h}_2\mathbf{r}_2^T]^{-1}.
$$

Jest natychmiast widoczne, że ani **P**, ani **U** nie są określone jednoznacznie. Bliższa dyskusja, jak również pełne rozwiązanie w jawnej formie dla przypadku, kiedy deformacja jest mała, zostaną podane w rozdziale 3.

2. Przypadki szczególne.

Bez rozwiązania równań (1.11) i (1.22) można przeprowadzić pewną analizę wzajemnych zależności między macierzami **P**, **Q**, **R** oraz **S**, **T**. Tej analizie poświęcony jest niniejszy rozdział. Rozważania oprzemy na twierdzeniu odwrotnym do twierdzenia o ortogonalności wektorów własnych macierzy symetrycznej. Jeśli

$$\mathbf{h}_1 \perp \mathbf{h}_2 \perp \mathbf{h}_3 \perp \mathbf{h}_1 \tag{2.1}$$

oraz

$$\mathbf{K}\mathbf{h}_1 \perp \mathbf{K}\mathbf{h}_2 \perp \mathbf{K}\mathbf{h}_3 \perp \mathbf{K}\mathbf{h}_1, \tag{2.2}$$

a macierz **K** jest symetryczna i dodatnio określona, to wektory $\mathbf{h}_1$, $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{h}_3$ są wektorami własnymi macierzy **K**([3])

$$\mathbf{K}\mathbf{h}_1 = \varkappa_1\mathbf{h}_1, \quad \mathbf{K}\mathbf{h}_2 = \varkappa_2\mathbf{h}_2, \quad \mathbf{K}\mathbf{h}_3 + \varkappa_3\mathbf{h}_3. \tag{2.3}$$

2.1. Przypadek $\mathbf{s}_1 \perp \mathbf{n}$. Rozpatrzymy najpierw przypadek, kiedy jeden z wektorów własnych $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ macierzy **S** leży w płaszczyźnie Π. Bez ograniczenia ogólności założymy $|\mathbf{s}_1| = |\mathbf{s}_2| = |\mathbf{s}_3| = 1$. Mamy

$$\mathbf{s}_2 \sin\vartheta + \mathbf{s}_3 \cos\vartheta = \mathbf{n}, \tag{2.4}$$

$$\mathbf{s}_1 \perp \mathbf{s}_2 \cos\vartheta - \mathbf{s}_3 \sin\vartheta \perp \mathbf{n} \perp \mathbf{s}_1, \tag{2.5}$$

gdzie ϑ jest kątem między wektorami $\mathbf{s}_3$ oraz $\mathbf{n}$. Wobec (1.2)

$$\mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{s}_1 = \mathbf{R}\sigma_1\mathbf{s}_1 = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{s}_1, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{R}\mathbf{S}(\mathbf{s}_2\cos\vartheta - \mathbf{s}_3\sin\vartheta) = \mathbf{R}(\sigma_2\mathbf{s}_2\cos\vartheta - \sigma_3\mathbf{s}_3\sin\vartheta) = \mathbf{Q}\mathbf{T}(\mathbf{s}_2\cos\vartheta - \mathbf{s}_3\sin\vartheta),$$

skąd wynika

$$\mathbf{T}\mathbf{s}_1 \perp \mathbf{T}(\mathbf{s}_2\cos\vartheta - \mathbf{s}_3\sin\vartheta). \tag{2.7}$$

Wobec (1.3), (1.5) i (2.5) mamy również

$$\mathbf{T}\mathbf{s}_1 \perp \mathbf{T}\mathbf{n}, \quad \mathbf{T}(\mathbf{s}_2\cos\vartheta - \mathbf{s}_3\sin\vartheta) \perp \mathbf{n}. \tag{2.8}$$

([3]) Z równości $(\mathbf{K}\mathbf{h}_1, \mathbf{K}\mathbf{h}_2) = (\mathbf{K}\mathbf{h}_2, \mathbf{K}\mathbf{h}_3) = (\mathbf{K}\mathbf{h}_3, \mathbf{K}\mathbf{h}_1) = 0$ dla symetrycznego **K** wynika $(\mathbf{K}^2\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = (\mathbf{K}^2\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_3) = 0$, co wobec $(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_3) = 0$ prowadzi do $\mathbf{K}^2\mathbf{h}_1 = \varkappa^2\mathbf{h}_1$. Dla dodatnio określonej macierzy **K** ostatnia równość równoważna jest $\mathbf{K}\mathbf{h}_1 = \varkappa_1\mathbf{h}_1$.

Zgodnie z wypowiedzianym wyżej twierdzeniem, wektory (2.5) są więc wektorami własnymi macierzy $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T}\mathbf{s}_1 = \tau_1\mathbf{s}_1, \quad \mathbf{T}(\mathbf{s}_2\cos\vartheta - \mathbf{s}_3\sin\vartheta) = \tau_2(\mathbf{s}_2\cos\vartheta - \mathbf{s}_2\sin\vartheta), \tag{2.9}$$
$$\mathbf{T}(\mathbf{s}_2\sin\vartheta + \mathbf{s}_3\cos\vartheta) = \tau_3(\mathbf{s}_2\sin\vartheta + \mathbf{s}_3\cos\vartheta).$$

Podstawiając teraz (2.9) do (2.6), wobec tożsamości $|\mathbf{R}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$, $|\mathbf{Q}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ mamy

$$\tau_1 = \sigma_1, \quad \tau_2 = (\sigma_2^2\cos^2\vartheta + \sigma_3^2\sin^2\vartheta)^{1/2}. \tag{2.10}$$

Macierze $\mathbf{T}$ i $\mathbf{S}$ mają więc jeden wspólny wektor własny i jednakowe odpowiadające mu wartości własne. Wobec (2.10) z (2.6) wynika, że oś obrotu skończonego $\mathbf{R}^T\mathbf{Q}$ jest ortogonalna do $\mathbf{n}$ i pokrywa się z wektorem $\mathbf{s}_1$. Kąt obrotu skończonego φ określony jest związkiem

$$\cos\varphi = (\sigma_2\cos^2\vartheta + \sigma_3\sin^2\vartheta)(\sigma_2^2\cos^2\vartheta + \sigma_3^2\sin^2\vartheta)^{1/2}. \tag{2.11}$$

Przechodząc do rozważania elementu liniowego, zgodnie z (1.1), (1.17) i (2.4) mamy

$$\mathbf{P}^T\mathbf{R}(\sigma_2\mathbf{s}_2\sin\vartheta + \sigma_3\mathbf{s}_3\cos\vartheta) = \lambda(\mathbf{s}_2\sin\vartheta + \mathbf{s}_3\cos\vartheta), \tag{2.12}$$

$$\lambda = (\sigma_2^2\sin^2\vartheta + \sigma_3^2\cos^2\vartheta)^{1/2}. \tag{2.13}$$

Jeśli przyjąć, że oś obrotu skończonego jest ortogonalna do $\mathbf{n}$ (związek (2.12) nie określa jednoznacznie kierunku osi obrotu, lecz tylko płaszczyznę, na której ta oś leży), to pokrywa się ona z wektorem $\mathbf{s}_1$, a dla kąta obrotu ψ mamy

$$\cos\psi = (\sigma_2\sin^2\vartheta + \sigma_3\cos^2\vartheta)(\sigma_2^2\sin^2\vartheta + \sigma_3^2\cos^2\vartheta)^{-1/2}. \tag{2.14}$$

2.2. Przypadek $\mathbf{s}_3 = \mathbf{n}$. Dwa wektory własne macierzy $\mathbf{S}$ leżą teraz na płaszczyźnie Π. W celu otrzymania związków dla rozważanego przypadku należy więc do podanych wyżej związków podstawić $\vartheta = 0$. W szczególności mamy

$$\mathbf{T}\mathbf{s}_1 = \tau_1\mathbf{s}_1, \quad \mathbf{T}\mathbf{s}_2 = \tau_2\mathbf{s}_2, \quad \mathbf{T}\mathbf{s}_3 = \tau_3\mathbf{s}_3, \tag{2.15}$$

$$\tau_1 = \sigma_1, \quad \tau_2 = \sigma_2, \quad \lambda = \sigma_3, \tag{2.16}$$

$$\cos\varphi = \cos\psi = 1. \tag{2.17}$$

Wektory własne macierzy $\mathbf{S}$ są więc jednocześnie wektorami własnymi macierzy $\mathbf{T}$. Wartości własne odpowiadające wektorom własnym leżącym na Π są przy tym jednakowe. Wynika stąd, że zachodzi równość

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} + (\tau_3 - \sigma_3)\mathbf{n}\mathbf{n}^T, \tag{2.19}$$

przy czym τ_3 jest dowolnym parametrem.

Wobec (2.6) i (2.16) mamy

(2.19) $$\mathbf{R}\mathbf{s}_1 = \mathbf{Q}\mathbf{s}_1, \quad \mathbf{R}\mathbf{s}_2 = \mathbf{Q}\mathbf{s}_2, \quad \mathbf{s}_1 \perp \mathbf{s}_2,$$

skąd wynika

(2.20) $$\mathbf{R} = \mathbf{Q},$$

Dla elementu liniowego wobec (2.13) zachodzi

(2.21) $$\lambda = \sigma_3, \quad \mathbf{R}\mathbf{s}_3 = \mathbf{P}\mathbf{s}_3.$$

Macierz $\mathbf{P}$ określona jest więc z dokładnością do ortogonalnej macierzy $\mathbf{P}^*$, spełniającej związek $\mathbf{P}^*\mathbf{n} = \mathbf{n}$, tzn. do macierzy (patrz [1], sect. 37)

(2.22) $$\mathbf{P}^* = \mathbf{I}\cos\beta + \mathbf{n}\mathbf{n}^T(1-\cos\beta) + \mathrm{dual}\,\mathbf{n}\sin\beta,$$

gdzie β jest dowolnym parametrem, a $\mathrm{dual}\,\mathbf{n}$ antysymetryczną macierzą określoną związkami $(.)_{23} = n_1$ itd. Jednym z rozwiązań jest $\mathbf{P} = \mathbf{R}$ ($\beta = 0$). Należy podkreślić, że w ogólnym przypadku, kiedy $\mathbf{n}$ nie jest wektorem własnym macierzy $\mathbf{S}$, $\mathbf{P} = \mathbf{R}$ nie jest rozwiązaniem. Rezultaty te można streścić w następujący sposób: Jeśli $\mathbf{n}$ jest wektorem własnym macierzy $\mathbf{S}$, to obroty skończone elementu powierzchniowego i objętościowego są jednakowe, $\mathbf{Q} = \mathbf{R}$. Obrót skończony elementu liniowego określony jest niejednoznacznie, ale jednym z rozwiązań jest $\mathbf{P} = \mathbf{R}$. Macierz odkształcenia elementu powierzchniowego określona jest z dokładnością do jednego parametru τ_3, a jednym z rozwiązań jest $\mathbf{T} = \mathbf{S}$.

3. Mała deformacja.

3.1. Mała deformacja elementu objętościowego. Załóżmy, że macierze $\mathbf{R}$ oraz $\mathbf{S}$ można przedstawić w postaci

(3.1) $$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \varepsilon\mathbf{R}', \quad \mathbf{S} = \mathbf{I} + \varepsilon\mathbf{S}',$$

gdzie ε jest małym parametrem. Tak obrót, jak i odkształcenie są więc małe(4).

Wobec (1.1) mamy

(3.2) $$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \varepsilon\mathbf{S}' + \varepsilon\mathbf{R}', \quad \varepsilon\mathbf{S}' = \tfrac{1}{2}(\mathbf{F}+\mathbf{F}^T) - \mathbf{I}, \quad \varepsilon\mathbf{R}' = \tfrac{1}{2}(\mathbf{F}-\mathbf{F}^T).$$

Symetryczna macierz $\mathbf{S}'$ jest macierzą małego odkształcenia elementu objętościowego. Antysymetryczna macierz $\mathbf{R}'$ jest macierzą małego obrotu elementu objętościowego.

---

(4) Tożsamość $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ pociąga za sobą $\mathbf{R}' = -\mathbf{R}'^T$, natomiast tożsamość $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ pociąga za sobą $\mathbf{S}' = \mathbf{S}'^T$.

3.2. Mała deformacja elementu powierzchniowego. Zakładając, że macierze $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{T}$ oraz τ_3 można przedstawić w postaci

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I}+\varepsilon\mathbf{Q}', \quad \mathbf{T} = \mathbf{I}+\varepsilon\mathbf{T}', \quad \mathbf{Q}'^T = -\mathbf{Q}', \quad \mathbf{T}'^T = \mathbf{T}', \quad \tau_3 = 1+\varepsilon\tau_3', \tag{3.3}$$

na mocy (1.9) i (3.2) otrzymujemy równanie

$$\mathbf{S}'+\mathbf{R}'-\mathbf{Q}'-[\tau_3'\mathbf{I}+\varphi_1\mathbf{r}_1\mathbf{r}_1^T+\varphi_2\mathbf{r}_2\mathbf{r}_2^T+\varphi_3(\mathbf{n}\mathbf{n}^T-\mathbf{I})] = \mathbf{d}\mathbf{n}^T, \tag{3.4}$$

którego ogólne rozwiązanie jest następujące:

$$\mathbf{T}' = \mathbf{S}'-\mathbf{n}\mathbf{n}^T\mathbf{S}'-\mathbf{S}'\mathbf{n}\mathbf{n}^T+(\mathbf{n}^T\mathbf{S}'\mathbf{n}+\tau_3')\mathbf{n}\mathbf{n}^T, \tag{3.5}$$

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{R}'+\mathbf{n}\mathbf{n}^T\mathbf{S}'-\mathbf{S}'\mathbf{n}\mathbf{n}^T. \tag{3.6}$$

Pomocniczy wektor $\mathbf{d}$ jest przy tym określony związkiem

$$\mathbf{d} = 2\mathbf{S}'\mathbf{n}-(\mathbf{n}^T\mathbf{S}'\mathbf{n}+\tau_3')\mathbf{n}. \tag{3.7}$$

Podczas gdy macierz małego obrotu $\mathbf{Q}'$ określona jest jednoznacznie, macierz $\mathbf{T}'$ określona jest z dokładnością do jednego parametru τ_3'. Ponieważ τ_3' nie ma wpływu na odkształcenie elementu powierzchniowego, więc dla wygody, nie zwężając ogólności, będziemy przyjmowali

$$\tau_3' = -\mathbf{n}^T\mathbf{S}'\mathbf{n}. \tag{3.8}$$

3.3. Mała deformacja elementu liniowego. Zakładając, że macierze $\mathbf{P}$ oraz $\mathbf{U}$ można przedstawić w postaci

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}+\epsilon\mathbf{P}', \quad \mathbf{U} = \mathbf{I}+\epsilon\mathbf{U}', \tag{3.9}$$

zgodnie z (1.19) otrzymujemy równanie

$$\mathbf{S}'+\mathbf{R}'-\mathbf{P}'-[\varphi_1\mathbf{r}_1\mathbf{r}_1^T+\varphi_2\mathbf{r}_2\mathbf{r}_2^T+\varphi_3(\mathbf{n}\mathbf{n}^T-\mathbf{I})+\lambda\mathbf{I}] = \mathbf{d}_1\mathbf{r}_1^T+\mathbf{d}_2\mathbf{r}_2^T, \tag{3.10}$$

którego ogólnym rozwiązaniem jest

$$\mathbf{U}' = -\mathbf{S}'+\mathbf{n}\mathbf{n}^T\mathbf{S}'+\mathbf{S}'\mathbf{n}\mathbf{n}^T+\varphi_1\mathbf{r}_1\mathbf{r}_1^T+\varphi_2\mathbf{r}_2\mathbf{r}_2^T+\varphi_3(\mathbf{n}\mathbf{n}^T-\mathbf{I}), \tag{3.11}$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R}'-\mathbf{n}\mathbf{n}^T\mathbf{S}'+\mathbf{S}'\mathbf{n}\mathbf{n}^T+\nu\,\mathrm{dual}\,\mathbf{n}, \tag{3.12}$$

Parametry φ_1, φ_2, φ_3 oraz ν mogą być wybrane dowolnie. Niejednoznaczność określenia $\mathbf{U}$ wynika stąd, że sens fizyczny ma tylko operacja $\mathbf{U}$ na $\mathbf{n}$. Nie ma takiego sensu operacja $\mathbf{U}$ na $\mathbf{t}$. Niejednoznaczność określenia $\mathbf{P}$ wynika stąd, że dwa położenia elementu liniowego określają tylko płaszczyznę, w której leży oś obrotu, nie określają natomiast samej osi obrotu. Dla wygody będziemy dalej przyjmowali $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \nu = 0$. W tym przypadku oś obrotu względnego elementu liniowego względem elementu objętościowego jest prostopadła do rozpatrywanego elementu liniowego.

3.4. Podstawowe tożsamości. Dla macierzy $\mathbf{P}', \mathbf{Q}', \mathbf{R}', \mathbf{S}', \mathbf{T}', \mathbf{U}'$ zachodzi wiele ważnych dla zastosowań tożsamości (por. np. [2]). W ogólnym przypadku $\mathbf{P}' \neq \mathbf{Q}' \neq \mathbf{R}'$. Jak wynika z (3.6) i (3.12), na to, żeby $\mathbf{P}' = \mathbf{Q}' = \mathbf{R}'$, potrzeba i wystarczy, by $\mathbf{n}$ było wektorem własnym macierzy $\mathbf{S}'$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{Q}' = \mathbf{R}' \Leftrightarrow \mathbf{S}'\mathbf{n} \| \mathbf{n}. \tag{3.13}$$

Mnożąc skalarowo wektor dual $\mathbf{Q}'$ — dual $\mathbf{R}'$ przez wektor $\mathbf{n}$, otrzymujemy

$$(\text{dual}\,\mathbf{Q}' - \text{dual}\,\mathbf{R}')\cdot\mathbf{n} = 0. \tag{3.14}$$

Zgodnie z (3.13) i (3.14) wektor obrotu względnego dual $\mathbf{Q}'$—dual $\mathbf{R}'$ (elementu powierzchniowego względem elementu objętościowego) jest więc albo równy zeru, albo leży w płaszczyźnie rozpatrywanego elementu powierzchniowego.

Podobnie mnożąc wektor dual $\mathbf{P}'$—dual $\mathbf{R}'$ przez wektor $\mathbf{n}$, mamy

$$(\text{dual}\,\mathbf{P}' - \text{dual}\,\mathbf{R}')\cdot\mathbf{n} = 0. \tag{3.15}$$

Wektor obrotu względnego dual $\mathbf{P}'$—dual $\mathbf{R}'$ (elementu liniowego względem elementu objętościowego) jest więc albo równy zeru, albo ortogonalny do rozpatrywanego elementu liniowego. Odejmując stronami (3.14) (3.15), otrzymujemy również

$$(\text{dual}\,\mathbf{Q}' - \text{dual}\,\mathbf{P}')\cdot\mathbf{n} = 0. \tag{3.16}$$

Wektor obrotu względnego dual $\mathbf{Q}'$—dual $\mathbf{P}'$ (elementu objętościowego względem elementu liniowego) jest więc albo równy zeru, albo leży w płaszczyźnie rozpatrywanego elementu powierzchniowego.

Wyznaczymy teraz średnie wartości obrotu elementu powierzchniowego i liniowego, uśredniając $\mathbf{P}'$ oraz $\mathbf{Q}'$ na kierunki w przestrzeni. Oprzemy się przy tym o łatwe do sprawdzenia związki

$$\int_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\,d\mathscr{S} = 0, \qquad \int_{\mathscr{S}} \mathbf{n}\mathbf{n}^T d\mathscr{S} = \tfrac{4}{3}\pi\mathbf{I}, \tag{3.17}$$

gdzie $\mathscr{S}$ oznacza jednostkową kulę. Całkując (3.5) i (3.11) na $\mathscr{S}$ i wykorzystując (3.17), otrzymujemy

$$(\mathbf{T}')_{\text{śr}} = \tfrac{1}{3}\mathbf{S}', \qquad (\mathbf{U}')_{\text{śr}} = -\tfrac{1}{3}\mathbf{S}', \tag{3.18}$$

gdzie przez $(\ )_{\text{śr}}$ oznaczono wartość średnią. Całkując natomiast (3.6) oraz (3.12), otrzymujemy

$$(\mathbf{P}')_{\text{śr}} = (\mathbf{Q}')_{\text{śr}} = \mathbf{R}'. \tag{3.19}$$

Ostatnia z ważnych tożsamości powstaje przez dodanie stronami (3.6) i (3.12)

$$2\mathbf{R}' = \mathbf{P}' + \mathbf{Q}'. \tag{3.20}$$

Obrót elementu objętościowego jest więc średnią arytmetyczną obrotów elementu powierzchniowego i prostopadłego do niego elementu liniowego, niezależnie od tego, czy **n** jest wektorem własnym macierzy **S**′, czy też nie. Podobną tożsamość można zbudować dla **S**′, **T**′, **U**′, nie miałaby ona jednak geometrycznego znaczenia.

Prace cytowane

[1] C. Truesdel, R. Toupin, *The classical field theories, Flügge's Encyclopedia of Physics*, Vol. III/1, Berlin 1960.

[2] Z. Wesołowski, *On the couple stresses in an elastic continuum*, Arch. Mech. Stos. 17 (1965), str. 219-232.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN, WARSZAWA
THE JOHNS HOPKINS UNIVERSITY, BALTIMORE, MD. USA

Praca wpłynęła 18. 3. 1965

З. ВЕСОЛОВСКИ (Варшава)

ВРАЩЕНИЕ И ДЕФОРМАЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

РЕЗЮМЕ

Рассматривается вопрос о разложении деформации поверхностных и линейных элементов сплошной среды на деформацию со средним вращением равным нулю и на вращение. Строится уравнение конечной деформации и анализируется частные случаи положения элементов. В случае малых деформаций дается общее решение вопроса, доказывается между прочим, что: а) вектор вращения поверхностного элемента относительно обьёмного элемента равен нулю, или лежит в плоскости поверхностного элемента; б) вращение поверхностного, линейного и обьёмного элементов одинаковы тогда и только тогда, когда нормаль к поверхностному элементу и касательная к линейному элементу является собственным вектором матрицы малой деформации обьёмного элемента.

Z. WESOŁOWSKI (Warszawa)

DEFORMATION OF SURFACE AND LINEAR ELEMENTS IN CONTINUUM MECHANICS

SUMMARY

The deformation of surface and linear elements of a continuum is decomposed into a rotation and a deformation with mean rotation equal zero. After constructing equations for finite deformation an analysis of some special cases of element position is given. For infinitesimal deformations the complete solution is given. It is proved that a) the vector of rotation of the surface element with respect to the volume element is either equal to zero or lies in the plane of the surface element, b) the rotations of the surface, linear, and volume elements are equal if and only if the normal vector to the surface element and the tangent vector to the linear element are eigenvectors of the matrix of small deformation of the volume element.