ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVIII (1966)

Sur la stabilité asymptotique de la solution d'un système non linéaire d'équations aux dérivées partielles du type parabolique*

par I. ŁOJCZYK-KRÓLIKIEWICZ (Kraków)

§ 1. Introduction.

1. Dans la présente note nous considérons un système non linéaire d'équations différentielles aux dérivées partielles du second ordre de la forme suivante:

$$(1')\qquad \frac{\partial u^i}{\partial t} = f^i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, u^1, u^2, \ldots, u^m, u^i_{x_1}, \ldots, u^i_{x_n}, u^i_{x_1x_1}, \ldots, u^i_{x_nx_n})$$

où $i = 1, 2, \ldots, m$, que nous allons noter sous une forme plus simple introduisant les notations $x = x_1, \ldots, x_n$, $u = u^1, \ldots, u^m$, $u^i_{x_j} = u^i_{x_1}, \ldots, u^i_{x_n}$, et $u^i_{x_jx_k} = u^i_{x_1x_1}, \ldots, u^i_{x_nx_n}$,

$$(1)\qquad \frac{\partial u^i}{\partial t} = f^i(t, x, u, u^i_{x_j}, u^i_{x_jx_k}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Nous admettons un système de conditions aux limites sur la surface latérale d'un domaine parabolique de la forme suivante:

$$(2)\qquad a^i(t, x)\frac{du^i}{dl^i} = \varphi^i(t, x, u^i) \qquad \text{où} \qquad \varphi^i(t, x, u^i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Nous établirons certaines conditions suffisantes pour que la solution du système (1), définie dans un domaine qui sera décrit dans la suite et satisfaisant aux conditions (2) sur la frontière parabolique, soit arbitrairement petite pour des valeurs suffisamment grandes de la variable t.

Un problème analogue a été résolu par M. Krzyżański dans le cas d'une équation linéaire parabolique et de la condition aux limites linéaire, dans la demi-bande: $\{0 \leqslant x \leqslant 1;\ t \leqslant 0\}$ (voir [5] et [6]). En appliquant la même méthode j'ai démontré des théorèmes analoques dans le cas

* Dans le cedre d'une conférence tenue à l'Université de Bari le 14. 4. 1964, M. le Prof. M. Krzyżański a exposé quelques-uns des théorèmes du travail présent.

de plusieurs variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (voir [8]). Dans la note [9] on a démontré des théorèmes analogues pour une équation presque linéaire, en se basant sur un lemme constituant un cas particulier du théorème sur les inégalités différentielles (voir J. Szarski [15]). Des problèmes analogues ont été résolus par les auteurs suivantes: A. Friedman [1], [2], [3], [4], H. Murakami [11], H. Milicer-Grużewska [10], R. Narasihman [12], P. Zeragia [16].

§ 2. Hypothèses et définitions.

2. I. Nous désignons par D un ensemble ouvert dans l'espace-temps des variables $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$, jouissant des propriétés suivantes:

1° pour chaque $t_0 \geqslant 0$ la partie de D contenue dans la couche $\{0 \leqslant t \leqslant t_0;\ x \in R^n\}$ est bornée et l'intersection de la fermeture $\bar{D}$ avec le plan $t = t_0$ est non vide. Nous introduisons les notations suivantes: D_T — la partie de D dans laquelle on a $t \geqslant T$; S_T — la projection sur le plan $t = 0$ de l'intersection de $\bar{D}$ avec le plan $t = T$; S_D — la projection sur le plan $t = 0$ de l'ensemble D (S_D, qui peut être identique au plan $t = 0$ entier, est un ensemble borné ou non);

2° pour chaque $t_0 \geqslant 0$ et pour chaque $x_0 \in S_{t_0}$ on peut faire correspondre à toute suite t_ν telle que $t_\nu > 0$ et $t_\nu \to t_0$, une suite de points x_ν de façon que $x_\nu \in S_{t_\nu}$ et $x_\nu \to x_0$.

II. Nous désignons par Σ la partie de la frontière ∂D dans laquelle on a l'inégalité $0 < t$ et par Σ_T la partie dans laquelle $T < t$. Par S_{Σ_T} nous désignons la projection de l'ensemble Σ_T sur le plan $t = 0$. Étant donnée une fonction $a(t, x)$, définie sur Σ, nous désignons par Σ^a le sous-ensemble de Σ (qui peut être vide ou bien identique à Σ) dans lequel on a $a > 0$.

III. La fonction $f^i(t, x, z, q, r)$ (voir (1)), où $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $z = (z^1, \ldots, z^m)$, $r = (r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{nn})$, définie pour $(t, x) \in D$ et z, q, r arbitraires, est dite elliptique par rapport à une suite de fonctions $u^j(t, x)$ $(j = 1, \ldots, m)$ de classe C^1 dans D, lorsque pour toute suite de nombres $r_{jk}, \tilde{r}_{jk}$ $(j, k = 1, \ldots, n)$ où $r_{jk} = r_{kj}$, $\tilde{r}_{jk} = \tilde{r}_{kj}$, telle que la forme quadratique $\sum_{j,k=1}^{n} (r_{jk} - \tilde{r}_{jk}) \lambda_j \lambda_k$ est non positive, on a l'inégalité

$$(3) \qquad f^i(t, x, u, u^i_{x_j}, r) \leqslant f^i(t, x, u, u^i_{x_j}, \tilde{r}) \qquad \text{pour} \quad (t, x) \in D$$

où $\tilde{r} = \tilde{r}_{11}, \tilde{r}_{12}, \ldots, \tilde{r}_{nn}$.

IV. Nous dirons

1° que la fonction $u(t, x)$ est régulière dans $\bar{D}$ quand elle est continue dans $\bar{D}$, de classe C^1 dans D, et y possède des dérivées partielles du second ordre par rapport aux variables continues $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

2° que la solution $u^j(t,x)$ $(j=1,\ldots,m)$, du système (1) est une solution parabolique dans D, si pour chaque $i=1,\ldots,m$, $f^i(t,x,z,q,r)$ est elliptique par rapport à la suite $u^j(t,x)$ dans D (voir [15]).

V. Nous dirons que la suite de fonctions $f^i(t,x,z,q,r)$ $(i=1,2,\ldots\ldots,m)$ satisfait à la condition W_+, lorsque l'indice i_0 étant fixé arbitrairement, les relations $z^j \leqslant \tilde{z}^j$, $j\neq i_0$, $z^{i_0}=\tilde{z}^{i_0}$ impliquent l'inégalité:

$$f^{i_0}(t,x,z,q,r)\leqslant f^{i_0}(t,x,\tilde{z},q,r)$$

dans D, pour q et r arbitraires.

VI. Nous dirons enfin qu'une solution $u^i(t,x)$ du système (1) dans D, avec les conditions (2) sur Σ, est asymptotiquement stable dans D, si à chaque $\varepsilon>0$ on peut faire correspondre un nombre $T(\varepsilon)\geqslant 0$, tel que $|u^i(t,x)|<\varepsilon$ pour $t>T$ et pour $x\in S_D$ $(i=1,\ldots,m)$.

§ 3. Un lemme auxiliaire.

3. HYPOTHÈSE A. *Il existe un nombre $T\geqslant 0$ et des fonctions $\sigma^i(t,z)$ continues et non négatives pour $t\geqslant 0$, $z^j\geqslant 0$ $(j=1,\ldots,m)$, satisfaisant à la condition W_+ pour $t\geqslant 0$, telles que*

$$f^i(t,x,z,q,r)-f^i(t,x,\tilde{z},q,r)\leqslant \sigma^i(t-T,z-\tilde{z})\qquad (i=1,\ldots,m), \tag{4}$$

pour $z^j\geqslant\tilde{z}^j$ $(j=1,\ldots,m)$, $(t,x)\in D_T$, q et r arbitraires, et que $z^i=0$ $(i=1,\ldots,m)$, soit l'unique intégrale du système d'équations ordinaires

$$\frac{dz^i}{dt}=\sigma^i(t,z^1,\ldots,z^m)\qquad (i=1,\ldots,m)$$

issue de l'origine (¹).

HYPOTHÈSE B. *Soient $\varphi^i(t,x,z)$ des fonctions définies pour $(t,x)\in\Sigma_T$, z — arbitraire, strictement croissantes par rapport à z, et soient $\alpha^i(t,x)$ des fonctions définies pour $(t,x)\in\Sigma_T$ telles que $\alpha^i(t,x)>0$ sur $\Sigma_T^{\alpha^i}$. A chaque point de Σ^{α^i} correspond une demi-droite l^i, issue de ce point, orthogonale à l'axe t et pénétrant à l'intérieur de $\bar{D}_T$.*

LEMME. *Soit $u^i(t,x)$ une solution régulière et parabolique du système* (1) *dans D. Nous admettons la condition W_+ pour $f^i(t,x,z,q,r)$ et nous supposons qu'il existe un nombre $T>0$, tel que l'hypothèse A soit satisfaite dans D_T. Nous supposons que les fonctions $u^i(t,x)$ admettent une dérivée*

(¹) Les hypothèses admises ci-dessus sont nécessaires pour pouvoir appliquer le théorème sur les inégalités différentielles, et elles sont identiques aux hypothèses du théorème 1 du travail [15]. Le problème consistant à étudier l'allure asymptotique de la solution $u(t,x)$ sous l'hypothèse A a été posé par M. le Prof. J. Szarski.

suivant la demi-droite l^i, en tout point de $\Sigma_T^{a^i}$ et vérifient les conditions aux limites

$$(5)\qquad \varphi^i(t, x, u^i) = \begin{cases} a^i(t, x)\dfrac{du^i}{dl^i} & sur \quad \Sigma_T^{a^i}, \\ 0 & sur \quad \Sigma_T - \Sigma_T^{a^i}. \end{cases}$$

Nous supposons encore qu'il existe deux systèmes de fonctions $V^i(t, x)$ et $v^i(t, x)$, régulières dans D, qui satisfont aux conditions suivantes:

1° $V^i(t, x) \geqslant 0$, $v^i(t, x) \leqslant 0$ *dans* D_T $(i = 1, \ldots, m)$;

2° $V^i(t, x) < \varepsilon$ *et* $v^i(t, x) > -\varepsilon$ *pour* $t > T(\varepsilon)$ *et* $x \in \bar{S}_D$ $(i = 1, \ldots, m)$;

3° *Dans le domaine D_T ont lieu les inégalités*

$$(6)\qquad \frac{\partial V^i}{\partial t} \geqslant f^i(t, x, V, V^i_{x_j}, V^i_{x_jx_k}) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$(7)\qquad \frac{\partial v^i}{\partial t} \leqslant f^i(t, x, v, v^i_{x_j}, v^i_{x_jx_k}) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

en outre, supposons que $f^i(t, x, z, q, r)$ soient elliptiques par rapport à $v^i(t, x)$;

4° *Pour $x \in S_T$ nous avons*

$$(8)\qquad v^i(T, x) \leqslant u^i(T, x) \leqslant V^i(T, x) \qquad (i = 1, \ldots, m);$$

5° *Les fonctions $V^i(t, x)$ et $v^i(t, x)$ admettent une dérivée suivant la demi-droite l^i en tout point de $\Sigma_T^{a^i}$ et vérifient les inégalités:*

$$(9)\qquad \varphi^i\big(t, x, V^i(t, x)\big) \geqslant \begin{cases} a^i(t, x)\dfrac{dV^i}{dl^i} & sur \quad \Sigma_T^{a^i}, \\ 0 & sur \quad \Sigma_T - \Sigma_T^{a^i} \end{cases}$$

et

$$(10)\qquad \varphi^i\big(t, x, v^i(t, x)\big) \leqslant \begin{cases} a^i(t, x)\dfrac{dv^i}{dl^i} & sur \quad \Sigma_T^{a^i}, \\ 0 & sur \quad \Sigma_T - \Sigma_T^{a^i}. \end{cases}$$

Dans ces conditions on a $\lim\limits_{t\to\infty} u^i(t, x) = 0$ uniformément par rapport à $x \in \bar{S}_D$.

Démonstration. Nous appliquons le théorème de J. Szarski deux fois: d'abord aux systèmes $u^i(t, x)$ et $V^i(t, x)$; il en résulte que

$$(11)\qquad u^i(t, x) \leqslant V^i(t, x), \qquad (t, x) \in D_T \ (i = 1, \ldots, m).$$

Ensuite nous appliquons ce théorème aux fonctions $v^i(t, x)$ et $u^i(t, x)$ et nous obtenons l'inégalité

$$(12)\qquad v^i(t, x) \leqslant u^i(t, x) \quad \text{dans } D_T \ (i = 1, \ldots, m).$$

Il résulte des hypothèses 2° et des inégalités (11) et (12) que $|u^i(t,x)| < \varepsilon$ dans D_T.

Remarque 1. Le théorème ci-dessus, est à certains égards, plus faible que le théorème 1 du travail [9]. Nous y avons supposé qu'il existe une seule fonction $V(t,x)$ satisfaisant aux conditions analogues à (8) et (11); ici, nous introduisons deux systèmes de fonctions. Quand le système (1) est seulement une juxtaposition, nous ne profitons que d'une seule fonction, en supposant que la fonction $f(t,x,u,q,r)$ soit décroissante par rapport à la variable u et qu'on a $f(t,x,u,sq,sr) \leqslant sf(t,x,u,q,r)$ et aussi $\varphi(t,x,su) \geqslant s\varphi(t,x,u)$ pour chaque $s \neq 0$.

4. Nous passons à la construction effective des systèmes $V^i(t,x)$ et $v^i(t,x)$, en admettant certaines hypothèses supplémentaires sur les fonctions $f^i(t,x,z,q,r)$ et $\varphi^i(t,x,z)$. Il résulte du lemme que ces hypothèses vont constituer des conditions suffisantes pour la stabilité asymptotique des solutions du système (1).

HYPOTHÈSE C. *Soient $f^i(t,x,0,0,0)$ des fonctions continues dans $\bar{D}$. On suppose que* $\lim_{t\to\infty} f^i(t,x,0,0,0) = 0$ $(i=1,\dots,m)$, *uniformément dans $\bar{S}_D$.*

Posons $\tilde{p}^i(t) = \sup_{x\in\bar{S}_D,\tau\geqslant t} |f^i(\tau,x,0,0,0)|$ $(i=1,\dots,m)$. Si pour chaque $T>0$ on a $f^i(t,x,0,0,0) \not\equiv 0$ dans D_T, les fonctions $\tilde{p}^i(t)$ satisfont aux conditions suivantes:

1° $\tilde{p}^i(t) > 0$ pour $t \geqslant 0$;

2° $\lim_{t\to\infty} \tilde{p}^i(t) = 0$;

3° $\tilde{p}^i(t)$ est une fonction continue et décroissante dans $\langle 0, \infty)$.

Posons

$$p^i(t) = \begin{cases} \tilde{p}^i(t) & \text{pour} \quad t \geqslant 0, \\ \tilde{p}^i(0) & \text{pour} \quad -\delta < t < 0 \end{cases}$$

$(i=1,\dots,m)$ où $\delta > 0$ est une constante arbitrairement petite.

Posons $p(t) = \max_i [p^i(t)]$ pour $t > -\delta$. La fonction $p(t)$ est continue dans $0 \leqslant t < \infty$ et satisfait aux mêmes conditions 1°, 2°, 3°.

Si $f^i(t,x,0,0,0) \equiv 0$ dans D_T, pour un $T>0$, nous choisissons pour $p(t)$ une fonction arbitraire satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3° dans $0 \leqslant t < \infty$.

Posons

$$J(t) = \int_{-\delta}^{t} p(\tau)\exp[\lambda(\tau - t)]\,d\tau \tag{13}$$

où $\lambda > 0$ est un nombre arbitraire que nous allons choisir convenablement dans la suite (voir [9]). La fonction $J(t)$ satisfait aux conditions suivantes:

4° $J(t) > 0$ pour $t \geqslant 0$;

5° $J(t)$ est une fonction bornée, continue et admettant une dérivée continue pour $t \geqslant 0$;

6° Pour chaque $t_0 \geqslant 0$ et pour $\lambda > 0$ et $\delta > 0$ arbitraires il existe $N(t_0) > 0$, tel que $J(t) \geqslant N(t_0)$ dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant t_0$, puisque

$$J(t) \geqslant \int_{-\delta}^{0} p(\tau)\exp[\lambda(\tau - t)]d\tau \geqslant p(0)\frac{1}{\lambda}[1 - \exp(-\lambda\delta)]\exp(-\lambda t_0) = N(t_0)\,;$$

7° $\lim\limits_{t\to\infty} J(t) = 0$,

car pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe deux nombres $\widetilde{T}$, T, tels que $\widetilde{T} \geqslant T > 0$ et

$$J(t) = \int_{-\delta}^{T} p(\tau)\exp[\lambda(\tau - t)]d\tau + \int_{T}^{t} p(\tau)\exp[\lambda(\tau - t)]d\tau < \varepsilon \quad \text{pour} \quad t > \widetilde{T} \geqslant T\,.$$

Dans la suite nous considérons seulement le cas d'un domaine S_D borné. Désignons par R le diamètre de l'ensemble S_D.

Nous allons construire deux fonctions des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en supposant, sans restreindre la généralité des considérations, que l'origine du système appartient au domaine S_D. Posons

$$w^1(x) = K - \exp(R - x_1) \quad \text{où} \quad K \geqslant \beta + 1, \text{ pour } \beta = \exp(2R)\,, \tag{14}$$

et

$$w^2(x) = K - \exp(R + x_1) \tag{15}$$

(le choix de la variable x_1 n'est pas essentiel).

Les fonctions $w^1(x)$ et $w^2(x)$ vérifient dans $\bar{S}_D$ les inégalités

$$1 \leqslant K - \beta \leqslant w^i(x) \leqslant K \quad (i = 1, 2)\,, \tag{16}$$

$$1 \leqslant w^1_{x_1}(x) \leqslant \beta \quad \text{et} \quad -\beta \leqslant w^2_{x_1}(x) \leqslant -1\,, \tag{17}$$

$$-\beta \leqslant w^i_{x_1x_2}(x) \leqslant -1 \quad (i = 1, 2)\,. \tag{18}$$

Dans la suite nous nous servirons des fonctions $v^1(t, x) = w^1(x)J(t)$ et $v^2(t, x) = w^2(x)J(t)$ pour construire deux systèmes de fonctions:

$$V^i(t, x) = V(t, x) \quad \text{et} \quad v^i(t, x) = -V(t, x) \quad (i = 1, \ldots, m)\,.$$

§ 4. Le problème aux limites homogène.

5. Hypothèse D. *Les fonctions $f^i(t, x, z, q, r)$ sont elliptiques par rapport à tout système de fonctions u^i régulières et bornées dans $\bar{D}$.*

HYPOTHÈSE E. *Il existe des fonctions* $\mu^i(t) \geqslant 0$ $(0 \leqslant t < \infty)$ *telles qu'on ait:*

$$\text{(a)} \qquad f^i(t, x, z, q, 0) - f^i(t, x, z, \tilde{q}, 0) \leqslant -\mu^i(t-T) \sum_{j=1}^{n} (q_j - \tilde{q}_j)$$

ou bien

$$\text{(b)} \qquad f^i(t, x, z, q, 0) - f^i(t, x, \tilde{z}, q, 0) \geqslant \mu^i(t-T) \sum_{j=1}^{n} (q_j - \tilde{q}_j)$$

pour $q \geqslant \tilde{q}$, z *arbitraire, et* $(t, x) \in D_T$, $i = 1, \dots, m$.

HYPOTHÈSE F. *Soient* $\varphi^i(t, x, z)$ *les fonctions définies dans l'hypothèse* B. *Supposons qu'il existe un nombre* $L > 0$, *tel que*

$$(19) \qquad \varphi^i(t, x, z) - \varphi^i(t, x, \tilde{z}) \geqslant L(z - \tilde{z}) \qquad (i = 1, \dots, m)$$

lorsque $z > \tilde{z}$ *pour* $(t, x) \in \Sigma_T$ *et une constante* M *telle que*

$$(20) \qquad |a^i(t, x)| \leqslant M \quad \text{sur} \quad \Sigma_T \quad (i = 1, \dots, m).$$

HYPOTHÈSE G. *On a l'identité*

$$(21) \qquad \varphi^i(t, x, 0) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad (t, x) \in \Sigma_T.$$

THÉORÈME 1. *Admettons les définitions* I, II (*où* S_D *est borné*) *et supposons que la suite* $f^i(t, x, z, q, r)$ $(i = 1, \dots, m)$ *satisfasse à la condition* W_+ *et qu'il existe* $T > 0$, *tel que dans le domaine* D_T *les hypothèses* C, E, D *soient vérifiées. L'hypothèse* A *du p.* 245 *restant valable, nous supposons que les fonctions* $\sigma^i(t, z)$ *satisfont dans* D *à l'inégalité*

$$(22) \qquad \sigma^i(t, z) \leqslant \sigma^i(t) \sum_{j=1}^{m} z^j \qquad (i = 1, \dots, m)$$

où $\sigma^i(t) \geqslant 0$ *dans* $0 \leqslant t < \infty$. *Admettons les hypothèses* B, F, G *et supposons en outre qu'on ait l'inégalité*

$$(23) \qquad K > \max\left(\frac{M\beta}{L} + \beta, 1 + \beta\right)$$

où les nombres M, L *sont définis dans l'hypothèses* F *et* $\beta = \exp 2R$ (cf. (14)). *Supposons en outre que les fonctions* $\mu^i(t)$ *et* $\sigma^i(t)$ *satisfassent à la relation suivante:*

$$(24) \qquad \mu^i(t) - mK\sigma^i(t) \geqslant \gamma > 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0,$$

K *étant la même constante que dans l'inégalité* (23).

Cela posé, la solution $u^i(t, x)$ *du système* (1) *avec les conditions aux limites* (5), *parabolique et régulière dans* D, *est aussi asymptotiquement stable dans* D.

Démonstration. La démonstration se composera de deux parties. Nous admettons d'abord l'hypothèse E(a) et nous posons $V(t,x) \equiv v^1(t,x)$. On voit immédiatement que $V(t,x) > 0$ dans D et $\lim\limits_{t\to\infty} V(t,x) = 0$ uniformément dans $\bar{S}_D$. Nous allons démontrer que le système de fonctions $V^i(t,x) = V(t,x)$ $(i = 1,\dots,m)$, remplit les inégalités (6) dans D_T. En posant $f^i(t,x,V,V,\dots,V,q,r) = f^i(t,x,V,q,r)$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &= w^1(x)\frac{dJ}{dt} \geqslant p(t) - \lambda w^1(x)J(t) \geqslant -\lambda w^1(x)J(t) + f^i(t,x,0,0,0)\\ &= -\lambda w^1(x)J(t) + f^i(t,x,0,0,0) - f^i(t,x,V,0,0) + f^i(t,x,V,0,0) -\\ &\quad - f^i(t,x,V,V_{x_j},0) + f^i(t,x,V,V_{x_j},0) -\\ &\quad - f^i(t,x,V,V_{x_j},V_{x_jx_k}) + f^i(t,x,V,V_{x_j},V_{x_jx_k})\\ &\geqslant J(t)[-\lambda K - mK\sigma^i(t-T) + \mu^i(t-T)] + f^i(t,x,V,V_{x_j},V_{x_jx_k}),\end{aligned}$$

pour $i = 1,\dots,m$.

Il résulte des inégalités (23) que pour un nombre λ assez petit l'expression entre crochets peut être rendue positive et on en déduit que

$$\frac{\partial V}{\partial t} \geqslant f^i(t,x,V,V_{x_j},V_{x_jx_k}) \quad \text{pour} \quad i = 1,\dots,m, \text{ dans } D_T.$$

Nous appliquons le même raisonnement au système $v^i(t,x) = v(t,x) = -v^1(t,x)$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &\leqslant -p(t) + \lambda J(t)w^1(x) \leqslant \lambda J(t)w^1(x) + f^i(t,x,0,0,0)\\ &\leqslant J(t)[\lambda K + mK\sigma^i(t-T) - \mu^i(t-T)] + f^i(t,x,v,v_{x_j},v_{x_jx_k}).\end{aligned}$$

On a choisi la constante $\lambda > 0$ de façon que l'expression entre les crochets soit négative, et alors on a l'inégalité

$$\frac{\partial v}{\partial t} \leqslant f^i(t,x,v,v_{x_j},v_{x_jx_k}) \quad \text{pour} \quad i = 1,\dots,m, \text{ dans } D_T.$$

Passons maintenant à l'étude de la condition aux limites. D'après les hypothèses F et G sur $\Sigma_T - \Sigma_T^{a^i}$ on a

$$\varphi^i(t,x,V) \geqslant \varphi^i(t,x,0) = 0$$

et

$$\varphi^i(t,x,v) \leqslant \varphi^i(t,x,0) = 0.$$

D'autre part sur $\Sigma_T^{a^i}$ sont vérifiées les inégalités

$$\begin{aligned}a^i(t,x)\frac{dV}{dl^i} &\leqslant a^i(t,x)V_x + LV - LV\\ &\leqslant J(t)[a^i w^1_{x_1} - Lw^1] + \varphi^i(t,x,V) - \varphi^i(t,x,0).\end{aligned}$$

Pour le nombre K satisfaisant à (23) on a $\alpha^i\beta - L(K-\beta) < 0$ (v. (16) et (17)). Alors

$$a^i(t,x)\frac{dV}{dl^i} \leqslant \varphi^i(t,x,V) \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, m, \text{ sur } \Sigma_T^{\alpha^i}.$$

De même, pour le même nombre K on a aussi

$$a^i(t,x)\frac{dv}{dl^i} \geqslant -J(t)[\alpha^i\beta - L(K-\beta)] + \varphi^i(t,x,v) - \varphi^i(t,x,0) \geqslant \varphi^i(t,x,v),$$

pour $i = 1, \ldots, m$, sur $\Sigma_T^{\alpha^i}$.

Nous venons de démontrer que sous l'hypothèse E(a) il existe deux systèmes de fonctions régulières dans D satisfaisant aux inégalités (6) et (7) dans D_T et aussi (9) et (10) sur Σ_T. L'inégalité initiale (8) est valable dans S_T pour K assez grand. Nous voyons que toutes les hypothèses du lemme sont vérifiées et qu'en outre $\lim\limits_{t\to\infty} V(t,x) = \lim\limits_{t\to\infty} v(t,x) = 0$ uniformément dans $\bar{S}_D$. Il en résulte la conclusion du théorème 1.

Remarquons que, T étant suffisamment grand, l'inégalité initiale (8) est valable pour un K défini par (23), c'est-à-dire que la dépendance du nombre K de la condition initiale n'est pas essentielle.

La démonstration de la seconde partie du théorème 1, sous l'hypothèse E(b), est tout à fait analogue. Nous posons $V^i(t,x) = V(t,x) = w^2(x)J(t)$ et $v^i(t,x) = -\nu^2(t,x)$.

§ 5. Le problème aux limites non homogène.

6. Plus ou moins pareillement on démontre les théorèmes qui vont suivre.

HYPOTHÈSE G_1. *Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $T(\varepsilon) > 0$, tel que*

$$|\varphi^i(t,x,0)| < \varepsilon, \quad \textit{lorsque} \quad t \geqslant T,\ x \in \bar{S}_{\Sigma_T}.$$

Soit $u^i(t,x)$ une solution du système (1), avec les conditions aux limites (5), parabolique et régulière dans D.

THÉORÈME 2. *Toutes les hypothèses du théorème* 1 *restant valables à l'exception de l'hypothèse* G, *supposons qu'il existe deux constantes d et $\varkappa$, telles que $\sigma^i(t) \leqslant d\exp(-\varkappa t)$, pour $t \geqslant 0$, et admettons l'hypothèse* G_1.

Cela posé, la solution $u^i(t,x)$ est asymptotiquement stable dans D.

Démonstration. En profitant de l'hypothèse E(a) nous allons démontrer que les fonctions $V(t,x) = \nu^1(t,x) + \varepsilon$ et $v(t,x) = -\nu^1(t,x) - \varepsilon$ satisfont aux hypothèses du lemme (dans le cas de l'hypothèse E(b) nous posons $V(t,x) = \nu^2(t,x) + \varepsilon$, $v(t,x) = -\nu^2(t,x) - \varepsilon$).

En effectuant des calculs analogues à ceux de la démonstration du théorème 1, on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &\geqslant -w^1(x)J(t) - \sigma^i(t-T)m[w^1(x)J(t)+\varepsilon] + \mu^i(t-T)w^1_{x_1}J(t) + \\ &\quad + f^i(t, x, V, V_{x_j}, V_{x_jx_k}) \\ &\geqslant J(t)\left[-K\lambda - \sigma^i(t-T)mK - \frac{\sigma^i(t-T)}{J(t)}m\varepsilon + \mu^i(t-T)w^1_{x_1}\right] + \\ &\quad + f^i(t, x, V, V_{x_j}, V_{x_jx_k}) \quad (i = 1, \ldots, m).\end{aligned}$$

Comme $J(t) \geqslant s\exp(-\lambda t)$ où $s = p(0).\ 1/\lambda[1-\exp(-\lambda\delta)]$ (v. 6° du p. 248), le rapport $\dfrac{\sigma^i(t-T)}{J(t)}$ est borné pour $\lambda < \varkappa$. La condition (24) étant admisé, nous pouvons choisir des nombres λ et ε assez petits pour que l'expression entre crochets soit non négative. En vertu de l'hypothèse G_1, il existe un $T_1(\varepsilon)$, tel que

$$|\varphi^i(t, x, 0)| < L\varepsilon \quad \text{pour} \quad \{t > T_1,\ x \in S_{\Sigma_{T_1}}\}.$$

En vertu de l'hypothèse F, on a

$$\varphi^i(t, x, V) \geqslant \varphi^i(t, x, 0) + L(\nu^1+\varepsilon) \geqslant 0 \qquad \text{sur} \qquad \Sigma_{T_1} - \Sigma^{a^i}_{T_1} \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

et

$$\begin{aligned}a^i(t, x)\frac{dV}{dl_i} &\leqslant a^iV_{x_1} + L(\nu^1+\varepsilon) - L(\nu^1+\varepsilon) \\ &\leqslant J(t)[a^iw^1_{x_1} - Lw^1] + \varphi^i(t, x, V) - \varphi^i(t, x, 0) - L\varepsilon \leqslant \varphi^i(t, x, V)\end{aligned}$$

sur $\Sigma^{a^i}_{T_1}$ $(i = 1, \ldots, m)$. On en déduit que $u(t, x)$ est asymptotiquement stable dans D.

7. Lorsque $\sigma^i(t) \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, on remplace l'inégalité (24) par la suivante: $\mu^i(t) \geqslant \gamma > 0$. Alors, l'hypothèse G_1 étant admise, les fonctions $V = w^1(x)J(t)+\varepsilon$, $v = -w^1(x(J(t)-\varepsilon$ satisfont à toutes les hypothèses du lemme.

Dans le cas d'une seule équation nous pouvons démontrer le théorème qui va suivre.

HYPOTHÈSE E_1. *Soit*

$$f(t, x, z, q, 0) - f(t, x, z, \tilde{q}, 0) \leqslant \mu(t-T)\sum_{j=1}^{n}(q_j - \tilde{q}_j)$$

ou bien

$$f(t, x, z, q, 0) - f(t, x, z, \tilde{q}, 0) \geqslant -\mu(t-T)\sum_{j=1}^{n}(q_j - \tilde{q}_j),$$

lorsque $q \geqslant \tilde{q}$ *et* $(t, x) \in D_T$, z *étant arbitraire.*

HYPOTHÈSE A_1. *Il existe un nombre $T \geqslant 0$ et une fonction $\sigma(t)$ continue et non négative pour $t \geqslant 0$, telle que*

$$f(t,x,z,0,0)-f(t,x,\tilde{z},0,0) \leqslant -\sigma(t-T)(z-\tilde{z}) \quad \textit{pour} \quad z \geqslant \tilde{z},\ (t,x) \in D_T .$$

THÉORÈME 3. *Nous admettons les définitions* I *et* II (*S_D étant un ensemble borné*), *et supposons qu'il existe un nombre $T > 0$ tel que dans le domaine D_T les hypothèses* A_1, C, D, E_1 *soient vérifiées, et aussi les hypothèses* B, F, G_1 *sur Σ_T. Soit $\sigma(t) \geqslant c$, $\mu(t) \leqslant \mu_0$ pour $t \geqslant 0$; c, μ_0 étant des constantes positives.*

Cela posé, la solution du système (1) *parabolique et régulière dans $\bar{D}$, satisfaisant à la condition aux limites* (5), *est asymptotiquement stable dans D.*

Démonstration. Posons $V(t,x) = \nu^1+\varepsilon$ et $v(t,x) = -\nu^1-\varepsilon$. On a

$$\frac{\partial V}{\partial t} \geqslant J(t)[-\lambda K-\mu_0\beta+cm(K-\beta)+m\sigma\varepsilon]+f(t,x,V,V_{x_j},V_{x_jx_k}) .$$

Nous pouvons choisir le nombre K de façon qu'on ait: $cm(K-\beta)-\mu_0\beta \geqslant \gamma$, $\gamma > 0$, et aussi $K > \max\left(\frac{M\beta}{L}+\beta, 1+\beta\right)$ (v. (23)) et ensuite nous choisissons convenablement le nombre λ. Les autres détails du calcul se voient immédiatement.

8. HYPOTHÈSE C_1. *Il existe des constantes $d > 0$ et $\varkappa > 0$ telles que pour $t > T$ on ait*

$$f(t,x,0,0,0) \leqslant d\exp(-\varkappa t) \quad \textit{dans} \quad D_T \quad (i = 1, \ldots, m).$$

THÉORÈME 4. *Les hypothèses du théorème* 1, *à l'exception de* C *et* G, *restant valables, admettons les hypothèses* C_1 *et* G_1 *et supposons que*

$$\sigma^i(t) \leqslant c \ \textit{où} \ 0 < \varkappa < c, \qquad \mu^i(t) \geqslant N > (m+e)Kc . \tag{25}$$

Cela posé, la solution du système (1) *parabolique et régulière dans $\bar{D}$, satisfaisant à la condition aux limites* (5), *est asymptotiquement stable dans D.*

Démonstration. En profitant de l'hypothèse C_1, nous posons $p(t) = d\exp(-\varkappa t)$ et par conséquent

$$J^1(t) = \int_{-\delta}^{t} d\exp(-\varkappa\tau)\exp[\lambda(\tau-t)]d\tau$$
$$= \frac{1}{\lambda-\varkappa} d\exp(-\lambda t)\{\exp[(\lambda-\varkappa)t]-\exp[(\lambda-\varkappa)(-\delta)]\} .$$

Pour simplifier les calculs, introduisons un paramètre $a > 0$, tel que $0 < 1/a < \varkappa$, et posons $\lambda = \varkappa-1/a$ et $\delta = a = 1/\varkappa-\lambda$. Alors on a

$$J^1(t) = ad\exp(-\lambda t)\{e-\exp[(\lambda-\varkappa)t]\} \geqslant ad\exp(-\lambda t) .$$

Dans le cas de l'hypothèse E(a), posons $V(t, x) = w^1(x)J^1(t) + \exp(-\varkappa t)$ et $v(t, x) = -V(t, x)$. Il s'ensuit

$$\frac{\partial V}{\partial t} \geqslant \varkappa(ad-1)\exp(-\varkappa t) - \lambda eadK\exp(-\lambda t) = H(t)\,.$$

D'autre part, en vertu des hypothèses B, C_1, A et E(a), en profitant de (25) on obtient

$$\begin{aligned} f^i(t, x, V, V_{x_j}, V_{x_jx_k}) &\leqslant -N\sum_{j=1}^{n} V_{x_j} + c\sum_{j=1}^{n} V + d\exp(-\varkappa t) \\ &\leqslant J^1(t)(-N+cmK) + cm\exp(-\varkappa t) + d\exp(-\lambda t) \\ &\leqslant ad(-N+cmK+1/a)\exp(-\lambda t) + cm\exp(-\varkappa t)\,. \end{aligned}$$

Alors pour

$$a > \max\left\{\frac{1}{\varkappa}, \frac{cm+\varkappa}{\varkappa d}, \frac{1}{N-cK(m+e)}\right\} \quad \text{on a } f^i(t, x, V, V_{x_j}, V_{x_jx_k}) \leqslant H(t)\,,$$

c'est-à-dire que la fonction $V(t, x)$ satisfait à l'inégalité (6) et $v(t, x)$ à l'inégalité (7).

Si $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $V(t, x) \leqslant w^1(x)J^1(t) + \varepsilon$ et $v(t, x) \geqslant -w^1(x)J^1(t) - \varepsilon$ sur Σ_T pour $t > T(\varepsilon)$. Il en résulte que ces fonctions satisfont aussi à l'inégalité aux limites (9) et (10).

La démonstration sous l'hypothèse E(b) est analogue.

Travaux cités

[1] A. Friedman, *Asymptotic behavior of solutions of parabolic equations*, Journ. Math. and Mech. 8 (1959), p. 387-392.

[2] — *Convergence of solution of parabolic equation to a steady state*, Journ. Math. and Mech. 8 (1959), p. 57-76.

[3] — *Generalized heat transfer between solids and gases under non-linear boundary conditions*, Journ. Math. and Mech. 8 (1959), p. 161-183.

[4] — *Asymptotic behavior of solutions of parabolic equations of any order*, Acta Math. 106 (1961), p. 1-43.

[5] M. Krzyżański, *Sur l'allure asymptotique des solutions d'équation du type parabolique*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4 (1956), p. 243-247.

[6] — *Sur l'allure asymptotique des solutions des problèmes de Fourier relatifs à une équation linéaire parabolique*, Atti Acad. Naz. Lincei Rend. 28 (1960), p. 37-43.

[7] — *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, t. I, Warszawa 1957, t. II, Warszawa 1962.

[8] I. Łojczyk-Królikiewicz, *L'allure asymptotique des solutions des problèmes de Fourier relatifs aux équations linéaires normales du type parabolique dans l'espace E^{m+1}*, Ann. Polon. Math. 14 (1963), p. 1-12.

[9] — *Propriétés limites des solutions des problèmes de Fourier relatifs à l'équation presque linéaire du type parabolique*, Bull. Acad. Polon. Sci. 8 (1960), p. 597-603.

[10] H. Milicer-Grużewska, *Propriété limite du potentiel généralisé de simple couche relativement à l'équation parabolique normale*, Ann. Scuola Sup. Pisa Sc. fis. e mat. 12 (1958), p. 359-396.

[11] H. Murakami, *Relations between solutions of parabolic and elliptic equations*, Proc. Japan. Acad. 34 (1958), p. 349-352.

[12] R. Narasihman, *On the asymptotic stability of solutions of parabolic differential equations*, Journ. Rat. Mech. Anal. 3 (1954), p. 303-313.

[13] M. Picone, *Nuovi metodi d'indagine par la teoria delle equazioni lineari a derivate parziali*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 13 (1939), p. 66-90.

[14] — *Sulla trasformata di Laplace*, Rend. Accad. Naz. Lincei 21 (1935).

[15] J. Szarski, *Sur un système non linéaire d'inégalités différentielles paraboliques*, Ann. Polon. Math. 15 (1964), p. 15-22.

[16] P. Zeragia, *L'étude sur l'allure de la solution de l'équation de la propagazion de chaleur pour des grands intervalles de temps* (en russe), Trudy Tbilis. Gos. Univ. Stal. 60 (1956), p. 19-34.

Reçu par la Rédaction le 25. 8. 1964