ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXIII (1970)

Über Differentialkomitanten der linearen Übertragungen

von M. Lorens (Katowice)

Einleitung. In vorliegender Note suchen wir die Differentialkomitanten von linearen Übertragungen (vgl. [1], S. 148, bzw. [3], S. 138). Dieses Problem wurde von J. A. Schouten in [3] (S. 105 und S. 138) für symmetrische Übertragung gelöst. Die Lösung ist im folgenden Reduktionssatz enthalten:

Reduktionssatz. *Ist ein Affinor X eine Differentialkomitante $(s-1)$-ter Ordnung einer symmetrischen Übertragung, so ist X eine algebraische Komitante des Krümmungstensors und seiner kovarianten Ableitungen bis zur $(s-2)$-ten Ordnung einschließlich* (vgl. [3], S. 138).

Hier möchten wir dieses Ergebnis für $s = 2$ auf die nichtsymmetrischen Übertragungen verallgemeinern. Unsere Betrachtungen werden mit Hilfe der Funktionalgleichungen ohne irgendwelche Regularitätsvoraussetzungen durchgeführt.

Ein ähnliches Problem wurde von A. Móor behandelt. In der Arbeit [2] hat er einige Ergebnisse über die Differentialkomitanten erster Ordnung von den Übertragungsparametern erhalten, welche Tensoren der Valenz (1, 3) sind. In seinen Betrachtungen setzt er aber voraus, daß die auftretenden Funktionen der Klasse C_1 sind und gewisse zusätzliche Bedingungen erfüllen.

1. Es sei L^n eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer linearen Übertragung. Wir haben also auf dieser Mannigfaltigkeit ein geometrisches Objekt Λ^i_{jk} mit der nachstehenden Transformationsformel:

$$\tilde{\Lambda}^i_{jk} = B^s_j B^t_k A^i_r \Lambda^r_{st} + A^i_r B^r_{jk}, \qquad i, j, k, r, s, t = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

$\tilde{\Lambda}^i_{jk}$ bzw. Λ^r_{st} sind die Komponenten dieses Objektes in Koordinatensystem $(\tilde{x}^i)$ bzw. (x^i); $A^i_k = \partial\tilde{x}^i/\partial x^k$, $A^i_{jk} = \partial^2\tilde{x}^i/\partial x^j\partial x^k$ bedeuten die ersten bzw. zweiten partiellen Ableitungen von $\tilde{x}^i$ hinsichtlich x^i und B^i_j, B^i_{jk} bedeuten die ersten bzw. zweiten partiellen Ableitungen von x^i hinsichtlich $\tilde{x}^i$ (vgl. [1], S. 173). Mit S^i_{jk} bezeichnen wir den Torsionstensor von Λ,

$$S^i_{jk} = \tfrac{1}{2}(\Lambda^i_{jk} - \Lambda^i_{kj}) = \Lambda^i_{[jk]}, \tag{1.2}$$

und mit Γ^i_{jk} den symmetrischen Teil von Λ,

$$\Gamma^i_{jk} = \tfrac{1}{2}(\Lambda^i_{jk}+\Lambda^i_{kj}) = \Lambda^i_{(jk)}. \tag{1.3}$$

Die partielle Ableitung der Größe U hinsichtlich x^i werde ich mit $U_{,l} = \partial U/\partial x^l$ und die mit Hilfe von Γ^i_{jk} gebildete kovariante Ableitung von S mit $S^i_{jk|l}$ bezeichnen. Wir haben

$$S^i_{jk|l} = S^i_{jk,l}+\Gamma^i_{sl}S^s_{jk}-\Gamma^s_{jl}S^i_{sk}-\Gamma^s_{kl}S^i_{js}. \tag{1.4}$$

Der Krümmungstensor von Γ hat die Form

$$R^i_{jkl} = 2\Gamma^i_{j[k,l]}+2\Gamma^s_{j[k}\Gamma^i_{|s|l]}. \tag{1.5}$$

Es sei $F^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}$ eine beliebige Tensordichte vom Gewicht $(-\alpha)$ und der Valenz (p, q). Sie hat also die nachstehende Transformationsformel:

$$\tilde{F}^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q} = \varepsilon|J|^\alpha A^{l_1}_{n_1}\ldots A^{l_p}_{n_p}B^{r_1}_{m_1}\ldots B^{r_q}_{m_q}F^{n_1\ldots n_p}_{r_1\ldots r_q}, \tag{1.6}$$

$$J = \mathrm{Det}\|A^i_k\|, \quad \varepsilon = 1 \text{ oder } \varepsilon = \mathrm{sgn} J.$$

Wir beweisen den folgenden Satz:

Satz 1. *Ist $F^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}$ eine beliebige Differentialkomitante erster Ordnung von Λ, so hängt $F^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}$ nur von S^i_{jk}, $S^i_{jk|l}$, R^i_{jkl} ab. D.h. $F^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}$ muß die Form*

$$F^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}(\Lambda^i_{jk},\Lambda^i_{jk,l}) = f^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}(S^i_{jk},S^i_{jk|l},R^i_{jkl}) \tag{1.7}$$

haben.

Wir beweisen den Satz 1 zuerst nur im Falle, wenn F ein Skalar ist. Dieser Beweis kann aber ohne weiteres auf beliebige Tensordichte verallgemeinert werden (Bemerkung 1).

Beweis. Jede skalare Differentialkomitante φ erster Ordnung von Λ muß die Gleichung

$$\varphi(\tilde{\Lambda}^i_{jk},\tilde{\Lambda}^i_{jk,l}) = \varphi(\Lambda^i_{jk},\Lambda^i_{jk,l}) \tag{1.8}$$

erfüllen, wo

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}^i_{jk,l} = {} & B^s_{jl}B^t_kA^i_r\Lambda^r_{st}+B^s_jB^t_{kl}A^i_r\Lambda^r_{st}+\\ & +B^s_jB^t_kB^n_lA^i_{rn}\Lambda^r_{st}+B^s_jB^t_kA^i_rB^n_l\Lambda^r_{st,n}+\\ & +B^n_lA^i_{rn}B^r_{jk}+A^i_rB^r_{jkl}\end{aligned} \tag{1.9}$$

und B^r_{jkl} die partiellen Ableitungen dritter Ordnung von x^i hinsichtlich $\tilde{x}^i$ bedeuten.

Nehmen wir

$$A^i_k = \delta^i_k, \qquad \delta^i_k = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$
$$A^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}, \tag{1.10}$$

an, so erhält man die Relationen

$$B^i_k = \delta^i_k, \qquad B^i_{jk} = -\Gamma^i_{jk}. \tag{1.11}$$

Das Einsetzen (1.10) ist wegen der vollen Symmetrie $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ zuläßig.

Wenn wir (1.10) und (1.11) in (1.1) und (1.9) einsetzen, so können $\tilde{\Lambda}^i_{jk}$, $\tilde{\Lambda}^i_{jk,l}$ folgendermaßen dargestellt werden:

$$\tilde{\Lambda}^i_{jk} = S^i_{jk}, \tag{1.12}$$

$$\tilde{\Lambda}^i_{jk,l} = -\Gamma^s_{jl}\Gamma^i_{sk} - \Gamma^s_{kl}\Gamma^i_{js} + \Gamma^i_{jk,l} + S^i_{jk|l} + B^i_{jkl}. \tag{1.13}$$

Weiter setzen wir in (1.13) für die sechs miteinander identischen Ableitungen B^i_{jkl} denselben Ausdruck $\Gamma^s_{jl}\Gamma^i_{sk} + \Gamma^s_{kl}\Gamma^i_{js} - \Gamma^i_{jk,l}$ ein, was wegen der vollen Symmetrie

$$\begin{aligned} B^i_{jkl} &= B^i_{klj} = B^i_{ljk} = B^i_{jlk} = B^i_{lkj} = B^i_{kjl} \\ &= \Gamma^s_{jl}\Gamma^i_{sk} + \Gamma^s_{kl}\Gamma^i_{js} - \Gamma^i_{jk,l} \end{aligned} \tag{1.14}$$

zuläßig ist. Dann nimmt (1.13) für alle Permutationen j, k, l die folgende Gestalt (was durch einfache Rechnungen nachzuprüfen ist) an:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}^i_{jk,l} &= S^i_{jk|l}, \\ \tilde{\Lambda}^i_{kl,j} &= R^i_{klj} + S^i_{kl|j}, \\ \tilde{\Lambda}^i_{lj,k} &= R^i_{jlk} - S^i_{jl|k}, \\ \tilde{\Lambda}^i_{jl,k} &= R^i_{jlk} + S^i_{jl|k}, \\ \tilde{\Lambda}^i_{lk,j} &= R^i_{klj} - S^i_{kl|j}, \\ \tilde{\Lambda}^i_{kj,l} &= S^i_{kj|l}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Aus (1.15) und (1.8) erhalten wir

$$\varphi(\Lambda^i_{jk}, \Lambda^i_{jk,l}) = \varphi(S^i_{jk}, S^i_{jk|l}, R^i_{jkl} + S^i_{jk|l}, R^i_{jkl} - S^i_{jk|l}). \tag{1.16}$$

Daraus folgt, daß φ nur von S^i_{jk}, $S^i_{jk|l}$, R^i_{jkl} abhängen kann:

$$\varphi(\Lambda^i_{jk}, \Lambda^i_{jk,l}) = f(S^i_{jk}, S^i_{jk|l}, R^i_{jkl}). \tag{1.17}$$

Bemerkung 1. Jetzt zeigen wir, daß dieses Ergebnis für die Skalarkomitanten auf beliebige Tensordichte verallgemeinert werden kann. Die

Tensordichte $F^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}$ mit dem Gewicht $(-a)$ und der Valenz (p,q), welche eine Differentialkomitante erster Ordnung von Λ ist, muß die Gleichung

$$(1.18)\qquad F^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}(\tilde{\Lambda}^i_{jk},\tilde{\Lambda}^i_{jk,l}) = \varepsilon |J|^a A^{l_1}_{r_1}\ldots A^{l_p}_{r_p} B^{n_1}_{m_1}\ldots B^{n_q}_{m_q}\cdot F^{r_1\ldots r_p}_{n_1\ldots n_q}(\Lambda^i_{jk},\Lambda^i_{jk,l})$$

erfüllen.

(1.18) kann ganz analog wie die Gleichung (1.8) behandelt werden. Nach dem Einsetzen (1.10), (1.11) und (1.14) in (1.18) erhalten wir

$$F^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}(\Lambda^i_{jk},\Lambda^i_{jk,l}) = F^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}(S^i_{jk},S^i_{jk|l},R^i_{jkl}+S^i_{jk|l},R^i_{jkl}-S^i_{jk|l})$$

und

$$(1.19)\qquad F^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}(\Lambda^i_{jk},\Lambda^i_{jk,l}) = f^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}(S^i_{jk},S^i_{jk|l},R^i_{jkl}).$$

Auf diese Weise ist der Satz 1 vollständig bewiesen.

2. Folgerungen. Jetzt wollen wir (1.19) durch den Krümmungstensor K^i_{jkl} von Λ^i_{jk} und die mit Λ^i_{jk} gebildete kovariante Ableitung des Torsionstensors darstellen. Wir haben

$$K^i_{jkl} = 2\Lambda^i_{j[k,l]}+2\Lambda^s_{j[k}\Lambda^i_{|s|l]},$$

$$S^i_{jk;l} = S^i_{jk,l}+\Lambda^i_{sl}S^s_{jk}-\Lambda^s_{jl}S^i_{sk}-\Lambda^s_{kl}S^i_{js}.$$

Zuerst möchten wir einige Beziehungen für die Größen K^i_{jkl}, R^i_{jkl}, $S^i_{jk;l}$ und $S^i_{jk|l}$ ableiten. Wir haben nämlich

$$(2.1)\qquad K^i_{jkl} = R^i_{jkl}+S^i_{jk|l}-S^i_{jl|k}+W^i_{jkl},$$

$$(2.2)\qquad S^i_{jk;l} = S^i_{jk|l}+Z^i_{jkl},$$

wo

$$(2.3)\qquad W^i_{jkl} = S^s_{jk}S^i_{sl}+S^s_{lj}S^i_{sk},$$

$$(2.4)\qquad Z^i_{jkl} = W^i_{jkl}+S^s_{kl}S^i_{sj}.$$

Mit Hilfe von (2.1) und (2.2) kann man die Gleichung (1.19) in anderer Gestalt schreiben

$$(2.5)\quad F^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}(\Lambda^i_{jk},\Lambda^i_{jk,l}) = f^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}(S^i_{jk},S^i_{jk;l}-Z^i_{jkl},K^i_{jkl}-2S^i_{j[k;l]}+2S^s_{kl}S^i_{sj}-W^i_{jlk}).$$

Da W^i_{jkl} und Z^i_{jkl} den Formeln (2.3) und (2.4) nach algebraische Komitanten von S^i_{jk} sind, kann die Funktion $F^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}$ durch S^i_{jk}, $S^i_{jk;l}$, K^i_{jkl} ausgedrückt werden:

$$(2.6)\qquad F^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}(\Lambda^i_{jk},\Lambda^i_{jk,l}) = g^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}(S^i_{jk},S^i_{jk;l},K^i_{jkl}).$$

Aus (2.6) und aus dem Satz 1 folgern wir den folgenden Satz:

SATZ 2. *Ist die Tensordichte $F^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}$ eine beliebige Differentialkomitante erster Ordnung von Λ, so hängt sie nur von S^i_{jk}, $S^i_{jk;l}$, K^i_{jkl} ab.*

Für symmetrische Übertragungen kann ein entsprechender Satz erhalten werden:

SATZ 3. *Ist die Tensordichte $F^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}$ eine beliebige Differentialkomitante erster Ordnung von der symmetrischen Übertragung, so hängt sie nur von R^i_{jkl} ab.*

Beweis. Ist Λ^i_{jk} symmetrisch, d. h. $\Lambda^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}$, so haben wir $S^i_{jk} = S^i_{jk|l} = 0$. Dann nimmt die Gleichung (1.19) die Gestalt

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} F^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}(\Lambda^i_{jk}, \Lambda^i_{jk,l}) &= f^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}(0, 0, R^i_{jkl}), \qquad \text{oder} \\ F^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}(\Lambda^i_{jk}, \Lambda^i_{jk,l}) &= h^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}(R^i_{jkl}) \end{aligned}$$

an und der Satz 3 ist somit bewiesen.

Aus unseren Betrachtungen folgt fast unmittelbar der nachstehende Satz:

SATZ 4. *Ist die Tensordichte eine algebraische Komitante von Λ, so hängt sie nur von S^i_{jk} ab.*

Beweis. Die Tensordichte F vom Gewicht $(-a)$ und der Valenz (p, q), welche eine Komitante von Λ ist, muß die Transformationsgleichung

$$(2.8)\qquad F^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}(\tilde{\Lambda}^i_{jk}) = \varepsilon |J|^a A^{l_1}_{r_1} \ldots A^{l_p}_{r_p} B^{n_1}_{m_1} \ldots B^{n_q}_{m_q} \cdot F^{r_1\ldots r_p}_{n_1\ldots n_q}(\Lambda^i_{jk})$$

erfüllen. Nach Einsetzen (1.10) und (1.11) erhalten wir

$$F^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}(\Lambda^i_{jk}) = f^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}(S^i_{jk}).$$

Eine einfache Folgerung des Satzes 4 ist noch das folgende

KOROLLAR. *Aus einer symmetrischen Übertragung kann keine Tensordichte $F^{l_1\ldots l_p}_{m_1\ldots m_q}$ gebildet werden.*

Literaturverzeichnis

[1] S. Gołąb, *Rachunek tensorowy*, Warszawa 1966.

[2] A. Moór, *Über Tensoren, die aus angegebenen geometrischen Objekten gebildet sind*, Publ. Math. Debrecen 6 (1959), S. 15–25.

[3] J. A. Schouten und D. J. Struik, *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie I* Groningen 1935.

Reçu par la Rédaction le 27. 2. 1969