ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXVIII (1980)

Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen im Komplexen

von FRITZ GACKSTATTER (Berlin) und ILPO LAINE (Joensuu)*

Abstract. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit algebraischen Differentialgleichungen von der Form

$$\sum_{\lambda\in I} c_\lambda(z)w^{n_0}(w')^{n_1}\dots(w^{(r)})^{n_r} = 0, \qquad \lambda = (n_0, \dots, n_r)$$

und mit den meromorphen und algebroiden Lösungen dieser Gleichungen. Die Arbeit enthält eine Verallgemeinerung des klassischen Satzes von Malmquist und Resultate über die Existenz und Werteverteilung der meromorphen Lösungen, deren Nevanlinna-Charakteristik wesentlich schneller wächst als die Charakteristiken der Koeffizienten $c_\lambda(z)$. Ähnliche Betrachtungen werden dann auch für die algebroiden Lösungen durchgeführt.

1. Einleitung

Diese Arbeit ist ein Beitrag zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen im Komplexen. Unser wesentliches Hilfsmittel ist die Nevanlinnasche Wertverteilungstheorie, deren Begriffe und Ergebnisse als bekannt vorausgesetzt werden (siehe z. B. [8] und [20]). Die früheren Arbeiten auf diesem Gebiet kann man in drei Gruppen einteilen. Die linearen Differentialgleichungen sind eingehend untersucht worden von H. Wittich und seiner Karlsruher Schule; ein Verzeichnis der wichtigsten Arbeiten findet man in [21]. Einfache nichtlineare Differentialgleichungen, vor allem die Riccatische Gleichung, wurden von vielen Autoren untersucht; es sei hier auf [10] und [25] hingewiesen. Auf dem Gebiet der allgemeinen algebraischen Differentialgleichungen sind vor allem die Arbeiten von S. Bank zu erwähnen ([1], [2] und darin zitierte weitere Arbeiten). Man versucht hier insbesondere das Wachstum der meromorphen Lösungen mit Hilfe der Koeffizienten und anderer geeigneten Größen abzuschätzen (siehe z. B. [2]–[4]).

Im Mittelpunkt unserer Betrachtungen stehen die nicht-linearen

---

* Der zweitgenannte Verfasser war zu Beginn dieser Arbeit am Mathematischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg. Er dankt der Alexander von Humboldt-Stiftung für die finanzielle Unterstützung.

Differentialgleichungen. Unser Ausgangspunkt ist der klassische Satz von Malmquist aus dem Jahre 1913 [17]:

SATZ 1. *Gegeben sei die Differentialgleichung*

$$w' = R(z, w) := \Big(\sum_{i=0}^{p} a_i(z) w^i\Big) \Big/ \Big(\sum_{i=0}^{q} b_i(z) w^i\Big) \tag{1}$$

mit rationalen Koeffizienten $a_i(z)$, $b_i(z)$. *Zähler- und Nennerpolynom seien teilerfremd in* w *über dem Körper der meromorphen Funktionen. Es gilt: Jede (eindeutige) meromorphe Lösung* $w(z)$ *von* (1) *ist eine rationale Funktion oder* (1) *ist eine Riccatische Differentialgleichung*

$$w' = a_0(z) + a_1(z) w + a_2(z) w^2$$

mit rationalen Koeffizienten.

Im Jahre 1933 hat K. Yosida zum Beweis dieses Satzes die inzwischen entwickelte Nevanlinnasche Wertverteilungslehre herangezogen und er hat auch eine Reihe von Verallgemeinerungen angegeben ([29]–[32]). Ein typisches Beispiel ist der

SATZ 2. *Gegeben sei die Differentialgleichung*

$$(w')^n = R(z, w) := \Big(\sum_{i=0}^{p} a_i(z) w^i\Big) \Big/ \Big(\sum_{i=0}^{q} b_i(z) w^i\Big) \tag{2}$$

mit rationalen Koeffizienten $a_i(z)$, $b_i(z)$. *Zähler- und Nennerpolynom seien teilerfremd in* w *über dem Körper der meromorphen Funktionen. Es gilt:* (2) *kann nur dann eine (eindeutige) transzendente meromorphe Lösung* $w(z)$ *besitzen, wenn die rechte Seite von* (2) *ein Polynom in* w *vom Grade* $\leqslant 2n$ *ist.*

Der Malmquist'sche Fragenkreis ist später von mehreren Autoren behandelt worden; es sei auf [11], [12], [15], [16], [19], [26], [27], [28] und [33] hingewiesen.

Wir beschäftigen uns hier mit allgemeinen algebraischen Differentialgleichungen, geschrieben in der Form

$$P(z, w, w', \ldots, w^{(r)}) = R(z, w). \tag{3}$$

Dabei ist P ein Polynom in den Argumenten $w, w', \ldots, w^{(r)}$, R ist eine rationale Funktion in w und die Koeffizienten sind jeweils in $|z| < \infty$ meromorphe Funktionen.

In §2 und §3 fragen wir, wie eine derartige Gleichung (3) gebaut sein muß, damit eine zulässige Lösung existieren kann. Dabei heißt eine Lösung $w(z)$ zulässig, wenn die Nevanlinna-Charakteristik der Lösung, $T(r, w)$, wesentlich schneller wächst als die Charakteristik aller Koeffizienten $d_\mu(z)$ der Differentialgleichung (3), d.h. wenn

$$T\big(r, d_\mu(z)\big) = S(r, w)$$

für alle Koeffizienten $d_\mu(z)$ ist. $S(r, w)$ ist dabei das übliche Restglied der Nevanlinna-Theorie, siehe dazu [8], S. 55. Im Falle rationaler Koeffizienten sind natürlich alle transzendente Lösungen zulässig.

In §4 untersuchen wir die Werteverteilung, insbesondere die Defektrelationen, zulässiger meromorpher Lösungen.

In §5 werden ähnliche Betrachtungen für den Fall endlich-vieldeutiger, sog. algebroider Lösungen durchgeführt.

Zuletzt seien zwei Hilfssätze aus der Nevanlinnaschen Wertverteilungslehre erwähnt, die eine wichtige Rolle im Zusammenhang mit den folgenden Beweisführungen spielen. Der erste ist ein Spezialfall eines bekannten Lemmas von Clunie ([6], Lemma 2 und [8], Lemma 3.3) und der zweite ist eine Verallgemeinerung eines Lemmas von Valiron ([24], S. 34 und [18], S. 83).

LEMMA 3. *Gegeben seien zwei Polynome $P(w, w', \ldots, w^{(r)})$ und $Q(w, w', \ldots, w^{(s)})$ in den gegebenen Argumenten mit meromorphen Koeffizienten. Wenn der Grad des Polynoms $Q \leqslant t$ ist und wenn nach Einsetzen einer zulässigen meromorphen Funktion $w(z)$ die Identität*

$$\big(w(z)\big)^t P\big(w(z), \ldots, w^{(r)}(z)\big) \equiv Q\big(w(z), \ldots, w^{(s)}(z)\big)$$

erfüllt ist, dann ist

$$m\Big(r, P\big(w(z), \ldots, w^{(r)}(z)\big)\Big) = S(r, w).$$

LEMMA 4. *Gegeben sei eine rationale Funktion*

$$R(z, w) := \Big(\sum_{i=0}^{p} a_i(z) w^i\Big) \Big/ \Big(\sum_{i=0}^{q} b_i(z) w^i\Big)$$

mit in $|z| < \infty$ meromorphen Koeffizienten $a_i(z), b_i(z)$ und mit $a_p(z) \not\equiv 0$, $b_q(z) \not\equiv 0$. Zähler- und Nennerpolynom seien teilerfremd in w über dem Körper der meromorphen Funktionen. Nach Einsetzen einer zulässigen meromorphen Funktion $w(z)$ ist

$$T\Big(r, R\big(z, w(z)\big)\Big) = dT\big(r, w(z)\big) + S(r, w)$$

mit $d = \max(p, q)$.

Weiteres zu diesen beiden Hilfssätzen am Anfang von §5.

2. Ein Satz vom Malmquist-Yosida-Typ

Wir beschäftigen uns nun mit algebraischen Differentialgleichungen von der Form

$$P(z, w, w', \ldots, w^{(r)}) = \Big(\sum_{i=0}^{p} a_i(z) w^i\Big) \Big/ \Big(\sum_{i=0}^{q} b_i(z) w^i\Big); \tag{4}$$

dabei ist P ein Polynom in den Argumenten $w, w', \ldots, w^{(r)}$,

$$P(z, w, w', \ldots, w^{(r)}) = \sum_{\lambda \in I} c_\lambda(z) w^{n_0} (w')^{n_1} \ldots (w^{(r)})^{n_r},$$

I ist eine endliche Menge von Multi-indizes $\lambda = (n_0, \ldots, n_r)$ und die Koeffizienten $a_i(z), b_i(z), c_\lambda(z)$ sind in $|z| < \infty$ meromorphe Funktionen. Zähler- und Nennerpolynom rechts in (4) seien teilerfremd in w über dem Körper der meromorphen Funktionen. Wir fragen, wie die rechte Seite gebaut sein muß, damit eine zulässige Lösung möglich ist. Eine in diesem Zusammenhang wichtige Größe ist das reduzierte Gewicht Δ des Polynoms P:

$$\Delta := \max_{\lambda \in I} \left(n_0 + 2n_1 + \ldots + (r+1)n_r\right).$$

Satz 5. *Die Differentialgleichung* (4) *kann nur dann eine zulässige Lösung $w(z)$ besitzen, wenn die rechte Seite von* (4) *ein Polynom in w vom Grade $\leqslant \Delta$ ist.*

Beweis. Die folgende Beweismethode wurde in [15] zum Beweis einer Verallgemeinerung des Satzes von Yosida benutzt, sie stammt eigentlich von Wittich ([25], S. 74–75).

Es sei $w(z)$ eine zulässige Lösung der Gleichung (4). Wir können zuerst eine komplexe Zahl a so wählen, daß

$$b_0(z) + ab_1(z) + \ldots + a^q b_q(z) \not\equiv 0 \tag{5}$$

und

$$m\left(r, \frac{1}{w-a}\right) + N_1\left(r, \frac{1}{w-a}\right) = S(r, w). \tag{6}$$

Dies ist möglich, denn $m\left(r, \dfrac{1}{w-a}\right) = S(r, w)$ für alle a außer einer Menge der Kapazität Null ([20], S. 281) und $N_1\left(r, \dfrac{1}{w-a}\right) = 0$ außer höchtens für abzählbar vielen Werte von a ([20], S. 282).

Wir substituieren $w = a + 1/v$ in (4); v ist wieder eine zulässige Funktion. Die rechte Seite von (4) geht über in

$$v^{q-p} \cdot \frac{\left(a_0(z) + aa_1(z) + \ldots + a^p a_p(z)\right) v^p + \ldots + a_p(z)}{\left(b_0(z) + ab_1(z) + \ldots + a^q b_q(z)\right) v^q + \ldots + b_q(z)}.$$

Bei der Behandlung der linken Seite beachten wir

$$w^{(j)} = \frac{\tilde{P}_j(v, v', \ldots, v^{(j)})}{v^{j+1}}, \quad j = 1, \ldots, r;$$

dabei ist $\tilde{P}_j$ ein homogenes Polynom von Grade j in den gegebenen Argumenten. Die einzelnen Summanden der linken Seite von (4) gehen über in

$$c_\lambda(z)\left(\frac{av+1}{v}\right)^{n_0}\left(\frac{\tilde{P}_1(v, v')}{v^2}\right)^{n_1} \cdots \left(\frac{\tilde{P}_r(v, v', \ldots, v^{(r)})}{v^{r+1}}\right)^{n_r}$$
$$= \hat{P}_\lambda(z, v, v', \ldots, v^{(r)}) v^{-(n_0+2n_1+\ldots+(r+1)n_r)},$$

$\hat{P}_\lambda$ ist ein Polynom in $v, \ldots, v^{(r)}$. Für die linke Seite von (4)erhalten wir also insgesamt

$$\hat{P}(z, v, v', \ldots, v^{(r)}) \cdot v^{-\Delta},$$

wo $\hat{P}$ wieder ein Polynom in $v, \ldots, v^{(r)}$ ist. Daraus folgt

$$\hat{P}(z, v, v', \ldots, v^{(r)}) = v^{q+\Delta-p} \cdot \frac{\left(a_0(z) + \ldots + a^p a_p(z)\right) v^p + \ldots + a_p(z)}{\left(b_0(z) + \ldots + a^q b_q(z)\right) v^q + \ldots + b_q(z)}$$

und Division rechts liefert weiter

$$\hat{P}(z, v, v', \ldots, v^{(r)}) = \sum_{i=0}^{\Delta} A_i(z) v^i + \frac{P_0(z, v)}{Q(z, v)}, \tag{7}$$

dabei ist der Grad des Polynoms P_0 in v kleiner als der Grad q des Polynoms Q in v. Es ist keine Division nötig, falls $q = 0$. Dann hat nämlich (7) sofort die Form

$$\hat{P}(z, v, v', \ldots, v^{(r)}) = \sum_{i=0}^{\Delta} A_i(z) v^i. \tag{8}$$

Es sei im weiteren $q > 0$. Wir untersuchen die Funktion

$$F(z) := \frac{P_0\left(z, v(z)\right)}{Q\left(z, v(z)\right)}$$

und wollen zeigen, daß $F(z)$ identisch verschwindet. Es ist

$$\begin{aligned} F(z) &= \hat{P}\left(z, v(z), v'(z), \ldots, v^{(r)}(z)\right) - \sum_{i=0}^{\Delta} A_i(z) v(z)^i \\ &= \hat{P}\left(z, v(z), \frac{v'(z)}{v(z)} v(z), \ldots, \frac{v^{(r)}(z)}{v(z)} v(z)\right) - \sum_{i=0}^{\Delta} A_i(z) v(z)^i. \end{aligned}$$

Mit Hilfe eines Satzes von Milloux ([8], Theorem 3.1) und wegen der Eigenschaft (6), die $m(r, v) = S(r, w) = S(r, v)$ impliziert, folgt bei Beachtung einfacher Eigenschaften der Schmiegefunktion

$$m(r, F) = S(r, v).$$

Wir wenden uns jetzt der Anzahlfunktion $N(r, F)$ zu. An einer regulären Stelle z von $v(z)$ hat $F = \hat{P} - \sum A_i v^i$ keine Polstellen, abgesehen möglicherweise von den Polstellen der Koeffizienten d_μ von F. Für die Anzahlfunktion $N_e(r, F)$ solcher Polstellen von $F(z)$ gilt wegen der Zulässigkeit von v offensichtlich

$$N_e(r, F) = S(r, v).$$

An einer Polstelle z von $v(z)$ hat $F = P_0/Q$ eine Nullstelle, abgesehen möglicherweise von den Stellen, wo die Koeffizienten von P_0 und Q Null- oder Polstellen haben. $N_p(r, F)$, $\overline{N}_p(r, F)$, $N_p(r, v)$ und $\overline{N}_p(r, v)$ seien die Anzahlfunktionen bzw. einfachen Anzahlfunktionen über die Polstellen von F bzw. v, die zugleich Polstellen von F und von v sind. Es gilt offensichtlich

$$\overline{N}_p(r, F) = \overline{N}_p(r, v) = S(r, v),$$

weiter ist wegen (6) $N_1(r, v) = S(r, v)$. Daraus folgt

$$N_p(r, v) = \overline{N}_p^1(r, v) + S(r, v) = S(r, v).$$

Für die Vielfachheit einer gemeinsamen Polstelle z von F und v gilt wegen $F = \hat{P} - \sum A_i v^i$

$$\nu(z, F) \leqslant C\nu(z, v) + \sum \nu(z, d_\mu)$$

mit einer Konstanten $C > 0$. Dabei sind $\nu(z, F)$, $\nu(z, v)$ und $\nu(z, d_\mu)$ die Polstellenordnungen der meromorphen Funktionen F, v und d_μ bei z. Integration liefert

$$N_p(r, F) \leqslant CN_p(r, v) + S(r, v),$$

daraus folgt unmittelbar

$$N_p(r, F) = S(r, v).$$

Insgesamt haben wir

$$T(r, F) = m(r, F) + N_e(r, F) + N_p(r, F) = S(r, v).$$

Das Lemma von Valiron–Mohon'ko (Lemma 4) impliziert andererseits

$$T(r, F) = T(r, P_0/Q) = qT(r, v) + S(r, v).$$

$q > 0$ ist also nicht möglich. Die transformierte Gleichung (7) hat somit notwendig die Gestalt (8) und die Rücktransformation $v = (w - a)^{-1}$ zeigt, daß rechts in (4) ein Polynom in w vom Grade $\leqslant \Delta$ steht. ■

Beispiele. Die beiden ersten Painlevéschen Differentialgleichungen sind

$$w'' = 6w^2 + az + b, \tag{9}$$

$$w'' = 2w^3 + zw + a. \tag{10}$$

Die rechte Seite der zweiten Painlevéschen Gleichung hat den maximalen Grad, da bei $P = w''$ das reduzierte Gewicht $\Delta = 3$ ist.

Bei der dritten Painlevéschen Gleichung

$$zww'' - z(w')^2 + ww' = czw^4 + aw^3 + bw + dz \tag{11}$$

haben wir links das reduzierte Gewicht $\Delta = 4$ und das w-Polynom rechts hat hier den entsprechenden maximalen Grad. Lösungen der Painlevéschen Gleichungen sind die Painlevéschen Transzendenten (siehe dazu [13], S. 345).

3. Lückensätze

Die bisher aufgeführten Sätze kann man noch verschärfen und ergänzen. Eine einfache Variante einer bekannten Vergleichsmethode ([10], S. 90 und 138, [12], S. 60 und 72) liefert sog. Lückensätze: Zulässige Lösungen sind nur bei gewissen Polynomgraden rechts in (8) möglich und zwischen den möglichen Graden sind große Lücken.

3.1. Wir beginnen der Einfachheit halber erst mit dem Satz 2 von Yosida, der besagt, daß nur bei Differentialgleichungen der Form

$$(w')^n = \sum_{i=0}^{2n} a_i(z) w^i \tag{12}$$

zulässige Lösungen möglich sind (in Sinne von Satz 5 verallgemeinert). Zu der Frage, ob alle Polynomgrade rechts vorkommen können, antwortet nun

SATZ 6. *Gegeben sei die Differentialgleichung*

$$(w')^n = \sum_{i=0}^{n+k} a_i(z) w^i \tag{13}$$

mit in $|z| < \infty$ *meromorphen Koeffizienten* $a_i(z)$. k *sei eine natürliche Zahl mit* $1 \leqslant k \leqslant n$ *und es sei* $a_{n+k}(z) \not\equiv 0$. *Es gilt*: (13) *kann nur dann eine zulässige Lösung* $w(z)$ *besitzen, wenn* k *ein Teiler von* n *ist*, k/n.

Beweis. Wir führen den Beweis in zwei Schritten. Zuerst benutzen wir das Lemma von Clunie indem wir (13) in der Form

$$w^{n+k-1} a_{n+k} w = (w')^n - \sum_{i=0}^{n+k-1} a_i w^i$$

schreiben. Es folgt $m(r, a_{n+k} w) = S(r, w)$ und weiter

$$m(r, w) = S(r, w). \tag{14}$$

Zweitens führen wir einen Polstellenvergleich durch. Bei einer zulässigen Lösung $w(z)$ von (13) hat man wegen (14)

$$T(r, w) = N(r, w) + S(r, w).$$

Die Vielfachheit $\nu(z, w)$ einer Polstelle z von w kann man mit der Beweismethode zu Lemma 4 in [15] abschätzen und man erhält

$$\nu(z, w) \leqslant n + C\left(\sum_{i=0}^{n+k} \nu(z, a_i) + \sum_{i=0}^{n+k} \nu\left(z, \frac{1}{a_i}\right)\right)$$

mit einer Konstanten $C > 0$. Wegen der Zulässigkeit von w folgt

$$N(r, w) \leqslant n\overline{N}(r, w) + S(r, w)$$

und

$$T(r, w) \leqslant n\overline{N}(r, w) + S(r, w).$$

Es existiert somit eine Polstelle z_0 von w, die nicht mit einer der Null- oder Polstellen der Koeffizienten a_i zusammenfällt. Die Polstellenordnung von w bei z_0 sei ν_0. Vergleich der Polstellenordnungen der linken und rechten Seite von (13) liefert

$$(\nu_0+1)n = \nu_0(n+k); \quad n = \nu_0 k; \quad k/n.$$

Dabei sind n und k feste, zur Gleichung (13) gehörige natürliche Zahlen. ∎

Durch die Substitution $w = 1/v$ kann man aus Satz 6 eine weitere Aussage folgern:

Satz 7. *Gegeben sei die Differentialgleichung*

$$(w')^n = \sum_{i=k}^{2n} a_i(z) w^i \tag{15}$$

mit in $|z| < \infty$ *meromorphen Koeffizienten* $a_i(z)$. k *sei eine natürliche Zahl mit* $0 \leqslant k \leqslant n-1$ *und es sei* $a_k(z) \not\equiv 0$. *Es gilt:* (15) *kann nur dann eine zulässige Lösung besitzen, wenn* $n-k$ *ein Teiler von* n *ist,* $(n-k)/n$. ∎

3.2. Weitere Überlegungen zur Gleichung (12). Die Gleichung

$$(w')^n = \sum_{i=0}^{n} a_i(z) w^i \quad \text{mit} \quad a_n(z) \not\equiv 0$$

kann zulässige Lösungen besitzen: $(w')^n = w^n$ hat die Lösung $w(z) = e^z$. Weiter betrachten wir die Differentialgleichung

$$(w')^n = \sum_{i=0}^{n-k} a_i(z) w^i, \tag{16}$$

dabei sei $a_{n-k}(z) \not\equiv 0$ und k sei eine natürliche Zahl mit $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Wir vermuten, daß bei Gleichung (16) keine zulässigen Lösungen existieren können. In der Tat, eine Lösung von (16) kann höchstens dort Polstellen haben, wo die Koeffizienten welche haben. Denn für eine andere Polstelle z_0 von w der Ordnung ν_0 müßte gelten

$$(\nu_0+1)n \geqslant \nu_0(n-k)$$

und dies ist nicht möglich. Für eine zulässige Lösung wäre darum $N(r, w) = N(r, w') = S(r, w)$. Aus (16) würde die Relation

$$nm(r, w') = (n-k)m(r, w) + S(r, w)$$

folgen, die uns zu obiger Vermutung geführt hat. Es sei hier weiter auf einen Zusammenhang mit einem der ungelösten Probleme bei Hayman

([9], Problem 1.21) hingewiesen: Unsere Vermutung würde die Existenz einer meromorphen Funktion $f(z)$ mit

$$T(r,f') = S(r,f)$$

verneinen. Andernfalls hätte nämlich die Differentialgleichung

$$(w')^2 = \big(f'(z)\big)^2(1+w)$$

eine zulässige Lösung

$$w = 4^{-1}\big(f(z)\big)^2-1.$$

3.3. Wir wenden uns nun den algebraischen Differentialgleichungen zu. Satz 5 besagt, daß nur bei Gleichungen der Form

$$\sum_{\lambda\in I} c_\lambda(z)\, w^{n_0}(w')^{n_1}\dots(w^{(r)})^{n_r} = \sum_{i=0}^{\Delta} a_i(z)w^i \tag{17}$$

zulässige Lösungen möglich sind. Wir fragen wieder, ob alle Polynomgrade rechts auftreten können und für eine gewisse Klasse von Gleichungen können wir wieder einen Lückensatz beweisen.

Wir betrachten Differentialgleichungen mit folgender zusätzlichen Eigenschaft:

Unter den Summanden links in (17) *soll es einen einzigen geben, dessen Potenzprodukt*

$$w^{n_0^*}(w')^{n_1^*}\dots(w^{(r)})^{n_r^*}$$

alle anderen Potenzprodukte links in (17) *überwiegt in folgendem Sinne: für alle anderen in* (17) *auftretenden Kombinationen* $(n_0, n_1, \dots, n_r)$ *und für alle natürlichen Zahlen* μ *soll gelten:*

$$\mu n_0^*+(\mu+1)n_1^*+\dots+(\mu+r)n_r^* > \mu n_0+(\mu+1)n_1+\dots+(\mu+r)n_r. \tag{18}$$

In unserem Zusammenhang spielen zwei charakteristische natürliche Zahlen eine wichtige Rolle: erstens der Grad d^* und zweitens das Gewicht g^* des überwiegenden Potenzproduktes:

$$d^* := n_0^*+n_1^*+\dots+n_r^*, \qquad g^* := n_1^*+2n_2^*+\dots+rn_r^*.$$

Für das reduzierte Gewicht Δ gilt dann

$$\Delta = d^*+g^*.$$

Dies folgt aus (18), wenn man $\mu=1$ einsetzt. Es sei weiter bemerkt, daß der Grad des Polynoms in $w, w', \dots, w^{(r)}$ links in (17) gleich d^* ist. Dies folgt aus (18) für $\mu\to\infty$.

Satz 8. *Gegeben sei die Differentialgleichung*

$$\sum_{\lambda\in I} c_\lambda(z)w^{n_0}(w')^{n_1}\dots(w^{(r)})^{n_r} = \sum_{i=0}^{d^*+k} a_i(z)w^i \tag{19}$$

mit einem im Sinne von (18) *überwiegenden Potenzprodukt links. k sei eine natürliche Zahl mit $1 \leqslant k \leqslant g^* = \Delta - d^*$ und es sei $a_{d^*+k}(z) \not\equiv 0$. Es gilt: Die Gleichung* (19) *kann nur dann eine zulässige Lösung $w(z)$ besitzen, wenn k ein Teiler des Gewichts g^* ist, k/g^*.*

Beweis. Da der Grad des w-Polynoms rechts in (19) größer als der Grad links ist, können wir wieder das Lemma von Clunie anwenden und wir erhalten

$$m(r, w) = S(r, w).$$

Zweiter Schritt. Die Vielfachheit $\nu(z, w)$ einer Polstelle z von w können wir wieder mit der Beweismethode zu Lemma 4 in [15] abschätzen:

$$\nu(z, w) \leqslant g^* + C\left(\sum \nu(z, d_\mu) + \sum \nu\left(z, \frac{1}{d_\mu}\right)\right),$$

dabei sind die d_μ die Koeffizienten der Gleichung (19). Es folgt

$$T(r, w) = N(r, w) + S(r, w) \leqslant g^* \bar{N}(r, w) + S(r, w)$$

und damit die Existenz einer Polstelle z_0 von w, die nicht mit einer der Null- oder Polstellen der Koeffizienten zusammenfällt. Die Polstellenordnung von w bei z_0 sei ν_0. Vergleich der Polstellenordnungen der linken und rechten Seite von (19) an der Stelle z_0 liefert

$$\nu_0 n_0^* + (\nu_0 + 1) n_1^* + \ldots + (\nu_0 + r) n_r^* = \nu_0 (d^* + k);$$

$$\nu_0 d^* + g^* = \nu_0 (d^* + k); \qquad g^* = \nu_0 k. \ ■$$

4. Über die Werteverteilung zulässiger meromorpher Lösungen

Wegen Satz 5 können unter den algebraischen Differentialgleichungen (4) nur Gleichungen von der Form

$$(17) \qquad \sum_{\lambda \in I} c_\lambda(z) w^{n_0} (w')^{n_1} \ldots (w^{(r)})^{n_r} = \sum_{i=0}^{\Delta} a_i(z) w^i$$

eine zulässige Lösung besitzen. Es sollen nun Aussagen über die Werteverteilung zulässiger Lösungen abgeleitet werden.

4.1. Das Beispiel (2) in [2], S. 511, zeigt, daß es für das Wachstum zulässiger Lösungen keine allgemeingültige, nur von den Koeffizienten abhängige Abschätzung gibt. Wir können jedoch den Satz 2 von Yosida ergänzen durch den

Satz 9. *Gegeben sei die Differentialgleichung*

$$(20) \qquad (w')^n = \sum_{i=0}^{2n} a_i(z) w^i$$

mit ganzen Koeffizienten $a_0(z), \ldots, a_{2n}(z)$. *Es sei*

$$F(r) := \max_{0 \leqslant i \leqslant 2n} \{M(r, a_i)\}.$$

Dann gilt für die Charakteristik meromorpher Lösungen $w(z)$ *von* (20) *die Abschätzung*

$$T(r, w) \leqslant 2^{(2-n)/n} r^2 (F(r))^{2/n}.$$

Beweis. Auf der Kreislinie $|z| = r$ gilt für $w(z)$ die Abschätzung

$$|w'|^n \leqslant F(r)(1 + |w| + \ldots + |w|^{2n}) \leqslant 2F(r)(1 + |w|^2)^n$$

und daraus folgt

$$\left(\frac{|w'|}{1 + |w|^2}\right)^2 \leqslant (2F(r))^{2/n}.$$

Da $F(r)$ eine nicht-abnehmende Funktion von r ist, liefert eine Berechnung der Ahlfors–Shimizuschen Charakteristik

$$A(t) := \frac{1}{\pi} \int_0^t \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} \left(\frac{|w'(\varrho e^{i\theta})|}{1 + |w(\varrho e^{i\theta})|^2}\right)^2 d\theta \leqslant t^2 (2F(t))^{2/n};$$

$$T(r, w) := \int_0^r \frac{A(t)}{t} dt \leqslant 2^{(2-n)/n} r^2 (F(r))^{2/n}. \blacksquare$$

Bemerkung. Eine entsprechende Aussage für $T(r, w)$ gewinnt man unmittelbar auch, wenn die Koeffizienten $a_0(z), \ldots, a_{2n}(z)$ der Differentialgleichung (20) meromorphe Funktionen sind mit höchstens endlich vielen Polen.

4.2. Nun beschäftigen wir uns mit algebraischen Differentialgleichungen (17), bei denen der Grad des w-Polynoms rechts größer als der Grad

$$d = \max_{\lambda \in I} (n_0 + n_1 + \ldots + n_r)$$

links ist, also mit Gleichungen der Form

$$\sum_{\lambda \in I} c_\lambda(z) w^{n_0} (w')^{n_1} \ldots (w^{(r)})^{n_r} = \sum_{i=0}^{d+k} a_i(z) w^i \tag{21}$$

mit $1 \leqslant k \leqslant \Delta - d$ und mit $a_{d+k}(z) \not\equiv 0$. Uns interessiert zuerst die Werteverteilung der Stellensorte ∞ bei zulässigen Lösungen $w(z)$. Dazu haben wir den folgenden

Satz 10. *Eine zulässige Lösung* $w(z)$ *von* (21) *nimmt den Wert* ∞ *ohne Defekt an,*

$$\delta(\infty, w) = 0. \tag{22}$$

Insbesondere hat man keine zulässigen ganzen Lösungen. Weiter gilt für den Verzweigungsindex und die Verzweigtheit der Stellensorte ∞ die Abschätzung

$$\vartheta(\infty, w) \leqslant \Theta(\infty, w) \leqslant 1 - k/g. \tag{23}$$

Dabei ist g das Maximum der Gewichte links in (21).

Beweis. Wegen der Gradvoraussetzung können wir das Lemma 3 von Clunie anwenden und folgern

$$m(r, w) = S(r, w), \quad T(r, w) = N(r, w) + S(r, w).$$

Daraus folgt sofort die erste Behauptung.

Zur Abschätzung des Verzweigungsindexes der Stellensorte ∞,

$$\vartheta(\infty, w) := \liminf_{r\to\infty} \frac{N(r, w) - \bar{N}(r, w)}{T(r, w)}$$

und der Verzweigtheit bei ∞,

$$\Theta(\infty, w) := \liminf_{r\to\infty} \frac{T(r, w) - \bar{N}(r, w)}{T(r, w)}$$

führen wir einen Polstellenvergleich durch. Dazu sei z_0 eine Polstelle von $w(z)$ mit der Polstellenordnung ν_0. Setzt man $w(z)$ in (21) ein, dann hat die linke Seite von (21) einen Pol der Ordnung

$$\nu \leqslant \max_{\lambda \in I} (\nu_0 n_0 + (\nu_0 + 1) n_1 + \ldots + (\nu_0 + r) n_r) + \sum_{\lambda \in I} \nu_\lambda; \tag{24}$$

dabei sind die ν_λ die Polstellenordnungen der Koeffizienten c_λ bei z_0. Die Ordnung ν kann echt kleiner als die rechte Seite von (24) ausfallen, wenn das Maximum rechts in (24) von mehreren Indexkombinationen erreicht wird und einige Pole links in (21) sich gegenseitig wegheben; wir haben ja nicht die Eigenschaft (18) vorausgesetzt. Sei jetzt $(n_0^*, \ldots, n_r^*)$ eine Indexkombination in (21), die das Maximum in (24) realisiert. Dann ist

$$\nu \leqslant \nu_0 n_0^* + (\nu_0 + 1) n_1^* + \ldots + (\nu_0 + r) n_r^* + \sum_{\lambda \in I} \nu_\lambda.$$

Nun zur Abschätzung von ν nach unten. Es seien ν_i' bzw. μ_i' die Polstellen- bzw. Nullstellenordnungen der Koeffizienten $a_i(z)$ bei z_0. Wir wenden wieder den Beweisgedanken zu Lemma 4 in [15] an und erhalten

$$\begin{aligned}
\nu &\geqslant \nu_0(d+k) - C\Big(\sum_{i=0}^{d+k} \nu_i' + \sum_{i=0}^{d+k} \mu_i'\Big) \\
&= \nu_0 \max_{\lambda \in I} (n_0 + \ldots + n_r) + \nu_0 k - C\Big(\sum_{i=0}^{d+k} \nu_i' + \sum_{i=0}^{d+k} \mu_i'\Big) \\
&\geqslant \nu_0 (n_0^* + \ldots + n_r^*) + \nu_0 k - C\Big(\sum_{i=0}^{d+k} \nu_i' + \sum_{i=0}^{d+k} \mu_i'\Big)
\end{aligned}$$

mit einer Konstanten $C > 0$. Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} \nu_0 &\leqslant \frac{n_1^* + 2n_2^* + \ldots + rn_r^*}{k} + \frac{C}{k}\Big(\sum_{\lambda\in I} \nu_\lambda + \sum_{i=0}^{d+k} \nu_i' + \sum_{i=0}^{d+k} \mu_i'\Big) \\ &\leqslant \frac{g}{k} + \frac{C}{k}\Big(\sum_{\lambda\in I} \nu_\lambda + \sum_{i=0}^{d+k} \nu_i' + \sum_{i=0}^{d+k} \mu_i'\Big). \end{aligned}$$

Durch Integration erhalten wir wegen der Zulässigkeit von w die Abschätzung

$$N(r, w) \leqslant \frac{g}{k} \bar{N}(r, w) + S(r, w).$$

Nun können wir die Verzweigtheit $\Theta(\infty, w)$ abschätzen:

$$\begin{aligned} T(r, w) - \bar{N}(r, w) &= N(r, w) - \bar{N}(r, w) + S(r, w) \\ &\leqslant \left(1 - \frac{k}{g}\right) N(r, w) + S(r, w) \\ &= \left(1 - \frac{k}{g}\right) T(r, w) + S(r, w); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta(\infty, w) &= \liminf_{r\to\infty} \frac{T(r, w) - \bar{N}(r, w)}{T(r, w)} \leqslant \liminf_{r\to\infty} \left(1 - \frac{k}{g} + \frac{S(r, w)}{T(r, w)}\right) \\ &= 1 - \frac{k}{g} + \liminf_{r\to\infty} \frac{S(r, w)}{T(r, w)} \leqslant 1 - \frac{k}{g}. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Man kann Satz 10 noch ergänzen durch das

KOROLLAR 11. *Hat die zugrunde liegende Differentialgleichung* (21) *lauter rationale Koeffizienten und links einen im Sinne von* (18) *überwiegenden Summanden, dann hat man sogar die Gleichheit*

$$\Theta(\infty, w) = 1 - k/g \tag{25}$$

anstelle der Ungleichung (23). *Dabei ist k jetzt nach dem allgemeinen Lückensatz* 8 *ein Teiler von $g = g^*$.*

Beweis. Zum Beweis rechnen wir $\Theta(\infty, w)$ aus. An einer Polstelle z_0 von $w(z)$, die nicht mit einer der Pol- oder Nullstellen der Koeffizienten zusammenfällt, haben wir nun wegen Eigenschaft (18) eine Gleichung anstelle der Ungleichung (24). Mit den obigen Bezeichnungen gilt also

$$\nu_0(d + k) = \nu_0 n_0^* + (\nu_0 + 1) n_1^* + \ldots + (\nu_0 + r) n_r^*.$$

Wegen Eigenschaft (18) ist weiter $d = n_0^* + \ldots + n_r^*$ und wir erhalten $\nu_0 = g/k$. Weil alle Koeffizienten nach Voraussetzung rationale Funktionen sind, ist die Anzahl aller Polstellen von $w(z)$, die mit einer der Pol- oder Nullstellen der Koeffizienten zusammenfallen, endlich. Integration liefert somit

$$N(r, w) = \frac{g}{k} \bar{N}(r, w) + O(\log r)$$

und es folgt wegen $\delta(\infty, w) = 0$

$$\Theta(\infty, w) = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{\bar{N}(r, w)}{T(r, w)} = 1 - \limsup_{r\to\infty} \frac{\frac{k}{g} N(r, w) - O(\log r)}{T(r, w)}$$

$$= 1 - \frac{k}{g} \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r, w)}{T(r, w)} = 1 - \frac{k}{g}. \quad ■$$

Bemerkung. Die Gleichheit in Korollar 11 gilt auch für $\vartheta(\infty, w)$, wenn w eine Funktion von endlicher Ordnung ist, weil in diesem Fall $m(r, w) = S(r, w)$ ohne Ausnahmemenge gültig ist.

Beispiele. 1. Bei der Riccatischen Differentialgleichung

$$w' = a_0(z) + a_1(z) w + a_2(z) w^2$$

mit $a_2(z) \not\equiv 0$ haben wir die charakteristischen Zahlen $d = d^* = 1$, $k = 1$, $g = g^* = 1$ und $\Delta = 2$. Aus (22) und (23) folgt $\delta(\infty, w) = \vartheta(\infty, w) = \Theta(\infty, w) = 0$. Wir sehen die bekannten Eigenschaften der zulässigen Lösungen der Riccati-Gleichung ([15] und [25]).

2. Bei der Differentialgleichung der Weierstraßschen $\wp$-Funktion

$$(w')^2 = 4(w - e_1)(w - e_2)(w - e_3)$$

ist $d = d^* = 2$, $k = 1$, $g = g^* = 2$ und $\Delta = 4$. Aus (22) und (25) folgt $\delta(\infty, w) = 0$ und $\Theta(\infty, w) = \frac{1}{2}$, das sind bekannte Eigenschaften der $\wp$-Funktion. Weiter gilt $\vartheta(\infty, w) = \frac{1}{2}$.

3. Bei der ersten Painlevéschen Gleichung (9) ist $d = d^* = 1$, $k = 1$, $g = g^* = 2$ und $\Delta = 3$. Für die zugehörigen Painlevéschen Transzendenten folgt $\delta(\infty, w) = 0$, $\Theta(\infty, w) = \frac{1}{2}$ und auch hier gilt $\vartheta(\infty, w) = \frac{1}{2}$ (siehe auch [25]).

Bei der zweiten Painlevéschen Gleichung (10) ist $d = d^* = 1$, $k = 2$, $g = g^* = 2$ und $\Delta = 3$. Für die zugehörigen Painlevéschen Transzendenten folgt $\delta(\infty, w) = \vartheta(\infty, w) = \Theta(\infty, w) = 0$.

Bei der dritten Painlevéschen Gleichung (11) ist die Eigenschaft (18) nicht mehr erfüllt. Die charakteristischen Zahlen sind nun $d = 2$, $k = 2$, $g = 2$ und $\Delta = 4$. Für die zugehörigen Transzendenten gilt $\delta(\infty, w) = \vartheta(\infty, w) = \Theta(\infty, w) = 0$.

Bemerkung. Das Polstellenverhalten des Tangens ist typisch für alle Differentialgleichungen von der Form (21) mit $k = g$, das Polstellenverhalten der Weierstraßschen $\wp$-Funktion ist typisch für den Fall $2k = g$.

4.3. Satz 10 besagt, daß die algebraische Verzweigtheit bei $w = \infty$ umso größer ausfallen kann, je kleiner der Grad der rechten Seite von (21) ist. Bei den Differentialgleichungen

$$\sum_{\lambda \in I} c_\lambda(z) w^{n_0}(w')^{n_1} \ldots (w^{(r)})^{n_r} = \sum_{i=0}^{d-k} a_i(z) w^i \tag{26}$$

mit $0 \leqslant k \leqslant d$ und $a_{d-k}(z) \not\equiv 0$ ist zu erwarten, daß die algebraische Verzweigtheit in eine logaritmische Verzweigtheit übergeht. Ein Resultat in dieser Richtung ist

Satz 12. *Sei $w(z)$ eine zulässige Lösung der Differentialgleichung* (26) *mit $0 < k \leqslant d$ und* (26) *habe einen im Sinne von* (18) *überwiegenden Summanden und lauter rationale Koeffizienten auf der linken Seite. Dann gilt*

$$\Delta(\infty, w) = 1$$

and weiter, falls zusätzlich alle Koeffizienten rechts höchstens endlich viele Polstellen haben,

$$\delta(\infty, w) = 1.$$

Beweis. Es sei z_0 eine Polstelle von $w(z)$, die nicht mit einer der Pol- oder Nullstellen der rationalen Koeffizienten auf der linken Seite zusammenfällt. Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis zu Satz 10 haben wir nun

$$\begin{aligned} \nu_0 n_0^* + (\nu_0+1) n_1^* + \ldots + (\nu_0+r) n_r^* &= \nu_0(n_0^* + \ldots + n_r^*) + g^* \\ &\leqslant \nu_0(d-k) + \sum_{i=0}^{d-k} \nu_i' = \nu_0(n_0^* + \ldots + n_r^*) - \nu_0 k + \sum_{i=0}^{d-k} \nu_i'; \end{aligned}$$

$$\nu_0 \leqslant \nu_0 k \leqslant -g^* + \sum_{i=0}^{d-k} \nu_i' \leqslant \sum_{i=0}^{d-k} \nu_i'.$$

Integration liefert

$$N(r, w) \leqslant \sum_{i=0}^{d-k} N(r, a_i) + O(\log r) = S(r, w).$$

Daraus folgert man sofort die Behauptungen. ■

4.4. Wir beschäftigen uns jetzt mit algebraischen Differentialgleichungen von der allgemeinen Form

$$\sum_{\lambda \in I} c_\lambda(z) w^{n_0}(w')^{n_1} \ldots (w^{(r)})^{n_r} = \sum_{i=0}^{\Delta} a_i(z) w^i, \tag{17}$$

über den Polynomgrad rechts setzen wir nichts mehr voraus. Uns interessiert die Werteverteilung der endlichen Stellensorten a bei zulässigen Lösungen $w(z)$.

Sei a eine endliche komplexe Zahl. Substitution $w = a + 1/v$ und Multiplikation mit dem Hauptnenner v^{Δ} (siehe Beweis zu Satz 5) führt (17) über in

$$\hat{P}(z, v, v', \ldots, v^{(r)}) = \sum_{i=0}^{\Delta} A_i(z) v^i. \tag{27}$$

Dabei ist $\hat{P}$ ein Polynom in $v, v', \ldots, v^{(r)}$ und

$$A_{\Delta}(z) = a_0(z) + a a_1(z) + \ldots + a^{\Delta} a_{\Delta}(z),$$

$$A_{\Delta-j}(z) = \sum_{k=j}^{\Delta} \frac{1}{j!} k(k-1)\ldots(k-j+1) a^{k-j} a_k(z), \quad j = 1, \ldots, \Delta. \tag{28}$$

Falls der Koeffizient $A_{\Delta}(z)$ nicht identisch verschwindet, haben wir rechts in (27) ein Polynom von Grade

$$\Delta = \max_{\lambda \in I} (n_0 + 2n_1 + \ldots + (r+1) n_r).$$

Die Polynome $\tilde{P}_j$ in $w^{(j)} = \tilde{P}_j(v, v', \ldots, v^{(j)}) v^{-(j+1)}$ sind homogen vom Grade j (siehe Beweis zu Satz 5). Deswegen ist der Grad des Polynoms $\hat{P}$ links in (27) gleich

$$\Delta - \min_{\lambda \in I} (n_1 + \ldots + n_r), \quad \text{falls } a \neq 0$$

oder

$$\Delta - \min_{\lambda \in I} (n_0 + \ldots + n_r), \quad \text{falls } a = 0.$$

Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß links in (17) keine alleinstehende w-Potenz auftritt, denn diese hätten wir nach rechts geschoben. Dann ist der Grad links in (27) immer kleiner als rechts, wir können das Lemma von Clunie anwenden und wir erhalten

$$m(r, v) = S(r, v) = S(r, w).$$

Daraus folgt

Satz 13. *Sei $w(z)$ eine zulässige Lösung der Differentialgleichung* (17). *Für alle endlichen Stellensorten a mit*

$$a_0(z) + a a_1(z) + \ldots + a^{\Delta} a_{\Delta}(z) \not\equiv 0 \tag{29}$$

gilt dann

$$\delta(a, w) = 0.$$

Alle diese a-Werte werden somit unendlich oft angenommen. ■

Man kann auch wieder den Verzweigungsindex und die Verzweigtheit bei a abschätzen. Die Differenz k zwischen den Graden rechts und links in (27) ist gleich

$$k = \begin{cases} \min\limits_{\lambda\in I}(n_1 + \dots + n_r), & \text{falls } a \neq 0, \\ \min\limits_{\lambda\in I}(n_0 + \dots + n_r), & \text{falls } a = 0. \end{cases}$$

Um Satz 10 anwenden zu können, benötigen wir noch das Maximum der Gewichte links in (27). Dieses ist gleich dem Maximum der Gewichte links in (17). Man sieht dies sofort ein, wenn man die Polynome $\tilde{P}_j$ in $w^{(j)} = \tilde{P}_j(v, v', \dots, v^{(j)})v^{-(j+1)}$ näher betrachtet. Daraus folgt

SATZ 14. *Sei $w(z)$ eine zulässige Lösung der Differentialgleichung* (17), *g sei das Maximum der Gewichte links in* (17) *und $a \neq 0$ sei eine endliche Stellensorte mit der Eigenschaft* (29). *Dann gilt für den Verzweigungsindex und die Verzweigtheit der Stellensorte a die Abschätzung*

$$\vartheta(a, w) \leqslant \Theta(a, w) \leqslant 1 - \frac{\min(n_1 + \dots + n_r)}{g}.$$

Für die Stellensorte 0 *erhalten wir im Falle $a_0(z) \not\equiv 0$*

$$\vartheta(0, w) \leqslant \Theta(0, w) \leqslant 1 - \frac{\min(n_0 + \dots + n_r)}{g}. \blacksquare$$

Bemerkung. Wie schon bei den linearen Differentialgleichungen, so sondert sich auch hier wieder die Stellensorte 0 von den anderen endlichen Stellensorten a ab.

BEISPIELE. 1. Bei der Differentialgleichung

$$w' = 1 + w^2$$

ist im Falle $1 + a^2 \neq 0$ die Voraussetzung (29) erfüllt. Wegen $\min n_1 = \min(n_0 + n_1) = 1$ und $g = 1$ folgt, für $a \neq \pm i$, $\delta(a, w) = \vartheta(a, w) = \Theta(a, w) = 0$. Das sind bekannte Eigenschaften des Tangens.

2. Für die zulässigen Lösungen linearer homogener Differentialgleichungen

$$a_r(z)w^{(r)} + \dots + a_1(z)w' + a_0(z)w = 0$$

mit meromorphen Koeffizienten und mit $a_0(z) \not\equiv 0$ folgt nach Satz 13 $\delta(a, w) = 0$ für alle $a \neq 0$.

3. Die erste Klasse Painlevéscher Transzendenter wurde in [25] untersucht. Bei der zweiten Klasse ist im Falle $a \neq 0$ die Voraussetzung (29) immer erfüllt und es folgt $\delta(a, w) = 0$. Wegen $\min n_2 = 1$ und $g = 2$ gilt weiter $\vartheta(a, w) \leqslant \Theta(a, w) \leqslant \frac{1}{2}$. Dasselbe gilt im Falle $a \neq 0$ auch für

$a = 0$. Bei der dritten Klasse ist im Falle $d + a^4 c \neq 0$ oder $b + a^2 a \neq 0$ die Voraussetzung (29) erfüllt und wir haben dann $\delta(a, w) = 0$. Wegen $\min(n_1 + n_2) = 1$ und $g = 2$ folgt für $a \neq 0$, $\vartheta(a, w) \leqslant \Theta(a, w) \leqslant \frac{1}{2}$. Weiter ist im Falle $d \neq 0$ wegen $\min(n_0 + n_1 + n_2) = 2$, $\vartheta(0, w) = \Theta(0, w) = 0$.

4.5. Ergänzungen zu den Sätzen 13 und 14. Die Voraussetzung (29) besagt, daß a keine Nullstelle des Polynoms in x

$$a_0(z) + x a_1(z) + \dots + x^{\Delta} a_{\Delta}(z) \tag{30}$$

ist. Die sukzessiven Ableitungen von (30) nach x an der Stelle a sind nach (28) gerade die Koeffizienten $A_i(z)$ in (27), abgesehen vom Faktor $(\Delta - i)!$. Ist a eine Nullstelle des Polynoms (30) von der Ordnung ϱ, dann verschwinden in (27) die Koeffizienten bei $v^{\Delta}, v^{\Delta-1}, \dots, v^{\Delta-\varrho+1}$ identisch, der Koeffizient bei $v^{\Delta-\varrho}$ ist aber $\not\equiv 0$. Ist nun $\varrho < \min\limits_{\lambda \in I}(n_1 + \dots + n_r)$ bzw. $\varrho < \min\limits_{\lambda \in I}(n_0 + \dots + n_r)$, dann ist der Grad rechts in (27) immer noch größer als links, wir können das Lemma von Clunie anwenden und wir erhalten

$$m(r, v) = S(r, v) = S(r, w).$$

Daraus folgt

Satz 15. *Sei $w(z)$ eine zulässige Lösung der Differentialgleichung* (17), *$a \neq 0$ eine ϱ-fache Nullstelle des Polynoms* (30) *und es sei $\varrho < \min\limits_{\lambda \in I}(n_1 + \dots + n_r)$. Dann gilt*

$$\delta(a, w) = 0.$$

Ist $a_{\varrho}(z) \not\equiv 0$ für ein $\varrho < \min\limits_{\lambda \in I}(n_0 + \dots + n_r)$, dann gilt auch

$$\delta(0, w) = 0. \ \blacksquare$$

Die Differenz k zwischen den Graden rechts und links in (27) wird nun um ϱ kleiner als bei Satz 14 und die Abschätzungen für die Verzweigtheit fallen größer aus.

Satz 16. *Für den Verzweigungsindex und die Verzweigtheit gelten die Abschätzungen*

$$\vartheta(a, w) \leqslant \Theta(a, w) \leqslant 1 - \frac{\min(n_1 + \dots + n_r) - \varrho}{g}$$

für $a \neq 0$ und

$$\vartheta(0, w) \leqslant \Theta(0, w) \leqslant 1 - \frac{\min(n_0 + \dots + n_r) - \varrho}{g}. \ \blacksquare$$

Bemerkung. Die obigen Sätze 10–16 sind zum Teil Verallgemeinerungen von [15], Theorem 13. Die Frage nach den Defektwerten in den Fällen $\varrho \geqslant \min\limits_{\lambda \in I}(n_1 + \dots + n_r)$ bzw. $\varrho \geqslant \min\limits_{\lambda \in I}(n_0 + \dots + n_r)$ bleibt hier unbehandelt. Die Situation ist ähnlich zu 4.3. und Satz 12.

5. Algebroide Lösungen algebraischer Differentialgleichungen

Zum Schluß lassen wir bei unseren Differentialgleichungen

$$P(z, w, w', \ldots, w^{(r)}) = R(z, w) \tag{3}$$

m-deutige algebroide Lösungen zu, mit einer beliebigen natürlichen Zahl m. Eine m-deutige algebroide Funktion $w(z)$ genügt einer irreduziblen Gleichung

$$w^m + s_{m-1}(z) w^{m-1} + \ldots + s_0(z) = 0, \tag{31}$$

dabei sind die Koeffizienten $s_i(z)$ in $|z| < \infty$ meromorphe Funktionen. Die algebroide Funktionenklasse umfaßt die meromorphen Funktionen und die algebraischen Funktionen. Die Besselfunktion $J_\nu(z)$ mit rationaler Ordnung $\nu = j/m$, j und m teilerfremd, ist eine m-deutige algebroide Lösung der linearen Differentialgleichung

$$z^2 w'' + z w' + \left(z^2 - \frac{j^2}{m^2}\right) w = 0.$$

Zur Wertverteilungstheorie der algebroiden Funktionen siehe [7], [22] und [23].

5.1. Eine algebroide Lösung $w(z)$ von (3) heißt zulässig, wenn die Selberg-Charakteristik $T(r, w)$ der Lösung wesentlich schneller anwächst als die Nevanlinna-Charakteristik aller Koeffizienten $d_\mu(z)$ von (3), d. h. wenn

$$T\bigl(r, d_\mu(z)\bigr) = S(r, w)$$

für alle Koeffizienten $d_\mu(z)$ ist. Es ist

$$T(r, w) = m(r, w) + N(r, w)$$

mit

$$m(r, w) = \frac{1}{2m\pi} \int_0^{2m\pi} \log^+ |w(re^{i\theta})|\, d\theta$$

und

$$N(r, w) = \frac{1}{m} \int_0^r \frac{n(t, \infty, w) - n(0, \infty, w)}{t}\, dt + \frac{n(0, \infty, w)}{m} \log r$$

([22], S. 714). Die folgenden Untersuchungen über zulässige algebroide Lösungen werden ähnlich verlaufen wie im meromorphen Fall. Zuerst seien einige vorbereitende Bemerkungen gemacht.

1. Wir haben bisher mehrmals von der Beweismethode zu Lemma 4 in [15] Gebrauch gemacht. Dies ist auch am algebroiden Fall möglich.

Sei z_0 ein Pol von $w(z)$ von der Ordnung ν_0 (siehe [23], S. 200) und

$$P(z, w) = a_0(z) + a_1(z)w + \ldots + a_p(z)w^p.$$

Dann genügt die Polstellenordnung ν_P von $P(z, w(z))$ bei z_0 der Abschätzungen

$$p\nu_0 - C\Big(\sum_{i=0}^{p} \nu_i' + \sum_{i=0}^{p} \mu_i'\Big) \leqslant \nu_P \leqslant p\nu_0 + m\sum_{i=0}^{p} \nu_i' \tag{32}$$

mit einer nur von m abhängigen Konstanten $C > 0$. Die ν_i' bzw. μ_i' sind die Polstellen- bzw. Nullstellenordnungen der meromorphen Koeffizienten $a_i(z)$ bei z_0.

2. Das Lemma von Clunie bleibt auch im algebroiden Fall gültig. Man kann den Beweis in [8], S. 68–69 direkt übernehmen, man muß nur mit Integralen der Art $\frac{1}{2m\pi}\int \ldots$ arbeiten. Der Integrationsweg liegt auf den m Blättern der zugrunde liegenden Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}$. Wesentlich ist, daß auch im algebroiden Fall

$$m\left(r, \frac{w'}{w}\right) = S(r, w)$$

gilt (siehe dazu [23], S. 204).

3. Ebenso hat man das Lemma von Valiron–Mohon'ko im algebroiden Fall:

Lemma 17. *Unter den allgemeinen Voraussetzungen von Lemma 4 sei $w(z)$ eine zulässige algebroide Funktion. Nach Einsetzen von $w(z)$ in $R(z, w)$ gilt für die Selberg-Charakteristiken*

$$T\big(r, R(z, w(z))\big) = dT\big(r, w(z)\big) + S(r, w).$$

Beweis. Weil der ursprüngliche für den meromorphen Fall geführte Beweis von Mohon'ko ([18], S. 83–87) ziemlich unbekannt zu sein scheint, geben wir hier für den algebroiden Fall eine Beweisskizze. Diese können wir direkt aus [18] übernehmen.

Der Beweis wird in drei Schritten durchgeführt. Zuerst leiten wir einen Hilfssatz ab:

Hilfssatz. *Gegeben sei das Polynom in der Unbestimmten w*

$$\begin{aligned} A(z, w) &:= \big(\varphi_1(z)w + \ldots + \varphi_{p-1}(z)w^{p-1} + w^p\big)w^{p-2} \\ &= \varphi_1(z)w^{p-1} + \ldots + \varphi_{p-1}w^{2p-3} + w^{2p-2}, \quad p \geqslant 2, \end{aligned}$$

mit meromorphen Koeffizienten $\varphi_i(z)$. $A(z, w)$ kann zu einem Quadrat ergänzt werden im folgenden Sinne: es existieren meromorphe Funktionen

$u_0(z), \dots, u_{p-1}(z), q_0(z), \dots, q_{p-2}(z)$, so daß

$$(33)\quad A(z, w) + \sum_{i=0}^{p-2} q_i(z) w^i = \big(B_{p-1}(z, w)\big)^2 := \big(u_0(z) + \dots + u_{p-1}(z) w^{p-1}\big)^2.$$

Dabei sind die Funktionen $u_i(z)$ und $q_i(z)$ gewisse Polynome der Funktionen $\varphi_i(z)$.

Die Funktionen $u_i(z)$ und $q_i(z)$ werden so bestimmt, daß bei gleichen w-Potenzen links und rechts in (33) die gleichen Koeffizienten stehen. Die Funktionen $u_i(z)$ kann man rekurrent berechnen:

$$u_{p-1}(z) \equiv 1; \quad u_{p-2}(z) = \tfrac{1}{2}\varphi_{p-1}(z); \quad u_{p-k}(z) = \tfrac{1}{2}\big(\varphi_{p-k+1}(z) - u_{p-k+1}^2\big), \quad k = 3, \dots, p.$$

Die Funktionen $q_i(z)$ ergeben sich dann gemäß

$$q_i(z) = u_0(z) u_i(z) + u_1(z) u_{i-1}(z) + \dots + u_i(z) u_0(z).$$

Zweitens soll die Aussage des Lemmas für den Fall

$$R(z, w) = R_p(z, w) := a_0(z) + a_1(z) w + \dots + a_p(z) w^p$$

bewiesen werden. $w(z)$ sei nun eine zulässige algebroide Funktion. Es gilt die Ungleichung

$$T\big(r, R_p(z, w(z))\big) \leqslant pT\big(r, w(z)\big) + \sum_{i=0}^{p} T\big(r, a_i(z)\big) + O(1).$$

Wegen der Zulässigkeit von w haben wir also

$$(34)\qquad T(r, R_p) \leqslant pT(r, w) + S(r, w).$$

Zum Beweis der umgekehrten Ungleichung sei zuerst $p = 1$. Es gilt

$$T(r, w) = T\left(r, \frac{R_1 - a_0}{a_1}\right) \leqslant T(r, R_1) + T(r, a_0) + T(r, a_1) + O(1),$$

also

$$T(r, R_1) \geqslant T(r, w) + S(r, w).$$

Wir nehmen nun an, daß

$$(35)\qquad T(r, R_s) \geqslant sT(r, w) + S(r, w)$$

für alle R_s mit $s \leqslant p-1$ schon bewiesen sei. Unter Berücksichtigung von (34) folgt hieraus

$$(36)\qquad T(r, R_s) = sT(r, w) + S(r, w).$$

Wir beweisen nun, daß die Ungleichung (35) auch für R_p gültig bleibt.

Es ist

$$\frac{R_p - a_0}{a_p} = \frac{a_1}{a_p} w + \dots + \frac{a_{p-1}}{a_p} w^{p-1} + w^p,$$

$$\left(\frac{R_p - a_0}{a_p}\right) w^{p-2} = (\varphi_1 w + \dots + \varphi_{p-1} w^{p-1} + w^p) w^{p-2}$$

mit $\varphi_i = a_i/a_p$. Nach unserem Hilfssatz können wir die letzte Größe zu einem Quadrat ergänzen,

$$A := \left(\frac{R_p - a_0}{a_p}\right) w^{p-2} + \sum_{i=0}^{p-2} q_i w^i = B_{p-1}^2.$$

Daraus folgt

$$T(r, A) = T(r, B_{p-1}^2) = 2T(r, B_{p-1}) = 2(p-1)T(r, w) + S(r, w),$$

letzteres wegen der Induktionsannahme (36). Gleichzeitig gilt

$$T(r, A) \leqslant (p-2)T(r, w) + T\left(r, \frac{R_p - a_0}{a_p}\right) + \sum_{i=0}^{p-2} T(r, q_i) + O(1)$$
$$= (p-2)T(r, w) + T(r, R_p) + S(r, w).$$

Aus den letzten beiden Relationen folgt

$$T(r, R_p) \geqslant pT(r, w) + S(r, w)$$

und mit (34) erhalten wir die Gleichheit

$$T(r, R_p) = pT(r, w) + S(r, w).$$

Drittens wenden wir uns dem allgemeinen Fall $R(z, w) = P(z, w)/Q(z, w)$ zu. Wir beweisen erst die Abschätzung nach oben:

(37) $$T(r, R) \leqslant dT(r, w) + S(r, w).$$

Dabei können wir ohne Einschränkung $p > q \geqslant 0$ annehmen. Für den Fall $p < q$ haben wir nämlich die Relation

$$T(r, R) = T\left(r, \frac{1}{R}\right) + O(1)$$

und im Falle $p = q$ benutzen wir die Relation

$$T(r, R) = T(r, R - a_p b_p^{-1}) + S(r, w).$$

Es ist $R - a_p b_p^{-1} = P^*/(b_p Q)$, dabei ist P^* höchstens vom Grade $p-1$ und teilerfremd zu Q. Es sei also $p = d > q \geqslant 0$. Den Fall $q = 0$ haben wir schon bewiesen. Wir nehmen an, daß (37) gültig sei für alle $R = P/Q_k$ mit $k \leqslant q-1$ und $p > k$. Dabei ist Q_k ein Polynom in w vom Grade k.

Wir beweisen, daß (37) dann auch für $k = q < p$ gültig bleibt. Es ist

$$R = \sum_{i=0}^{p-q} A_i w^i + \frac{a_0' + \ldots + a_{q-1}' w^{q-1}}{b_0 + \ldots + b_q w^q}.$$

Wegen der Induktionsannahme folgt

$$T(r, R) \leqslant (p-q)T(r, w) + qT(r, w) + S(r, w) = pT(r, w) + S(r, w)$$

und die Ungleichung (37) ist bewiesen.

Die umgekehrte Ungleichung

$$(38) \qquad T(r, R) \geqslant pT(r, w) + S(r, w)$$

ist für den Fall $q = 0$ auch schon bewiesen. Es sei nun $0 < q < p$. Weil P und Q teilerfremd in w sind, gibt es zwei Polynome U und V in w, so daß

$$PU + QV \equiv 1.$$

Die Koeffizienten von U und V sind nach dem euklidischen Algorithmus rationale Ausdrücke in den ursprünglichen Koeffizienten a_i, b_i. Bezeichnen wir den Grad von U mit s, den von V mit t, dann folgt

$$T\left(r, \frac{Q}{P} + \frac{U}{V}\right) = T\left(r, \frac{1}{PV}\right) = (p+t)T(r, w) + S(r, w).$$

Andererseits gilt wegen $t > s$

$$T\left(r, \frac{Q}{P} + \frac{U}{V}\right) \leqslant T\left(r, \frac{Q}{P}\right) + T\left(r, \frac{U}{V}\right) + O(1)$$
$$\leqslant T\left(r, \frac{Q}{P}\right) + tT(r, w) + S(r, w).$$

Aus den letzten beiden Relationen folgt (38). ■

5.2. K. Yosida hat sich mit der Differentialgleichung

$$(2) \qquad (w')^n = \Big(\sum_{i=0}^{p} a_i(z) w^i\Big) \Big/ \Big(\sum_{i=0}^{q} b_i(z) w^i\Big)$$

beschäftigt und folgenden Satz bewiesen (siehe [32], Theorem 3):

SATZ 18. *Wenn die Differentialgleichung* (2) *mit rationalen Koeffizienten* $a_i(z)$, $b_i(z)$ *und mit in* w *teilerfremdem Zähler- und Nennerpolynom eine transzendente* m*-deutige algebroide Lösung* $w(z)$ *besitzt, dann gelten für die Grade* p *und* q *des Zähler- und Nennerpolynoms die Abschätzungen*

$$q \leqslant 2n(m-1), \qquad p \leqslant q + 2n \leqslant 2nm.$$

Hat man größere Grade, dann ist jede m*-deutige Lösung eine algebraische Funktion.*

Diese Abschätzungen von Yosida sind scharf, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel. Die algebraische Gleichung

$$w^2 + w \tan z + z = 0$$

definiert eine zweideutige algebroide Funktion, die der Differentialgleichung

$$w' = \frac{z^2 + w + (1+2z)w^2 + w^4}{z - w^2}$$

genügt. Zähler- und Nennerpolynom sind hier teilerfremd in w. Diese Differentialgleichung hat weiter die Eigenschaft, daß auch bei einer beliebigen Transformation von der Form $w = a + 1/v$ Zähler- und Nennergrad nicht kleiner werden. Siehe dazu [14], S. 867 und [5], S. 110.

5.3. Wir beschäftigen uns nun mit algebraischen Differentialgleichungen von der Form

$$\sum_{\lambda \in I} c_\lambda(z) w^{n_0} (w')^{n_1} \dots (w^{(r)})^{n_r} = \Big(\sum_{i=0}^{p} a_i(z) w^i\Big) \Big/ \Big(\sum_{i=0}^{q} b_i(z) w^i\Big) \tag{4}$$

mit in $|z| < \infty$ meromorphen Koeffizienten $c_\lambda(z)$, $a_i(z)$, $b_i(z)$. Zähler- und Nennerpolynom rechts in (4) seien teilerfremd in w über dem Körper der meromorphen Funktionen. Es sei g wieder das Maximum der Gewichte links in (4) und Δ sei das reduzierte Gewicht (siehe § 2 und § 3).

Satz 19. *Wenn (4) eine zulässige m-deutige algebroide Lösung $w(z)$ besitzt, dann gelten für die Grade p und q des Zähler-und Nennerpolynoms die Abschätzungen*

$$q \leqslant 4g(m-1), \qquad p \leqslant q + \Delta. \tag{39}$$

Beweis. Wir können wie beim Beweis zu Satz 5 vorgehen, es gibt nur einen einzigen wesentlichen Unterschied: Die Funktion

$$F := \frac{P_0}{Q} = \hat{P}(z, v, v', \dots, v^{(r)}) - \sum A_i v^i$$

hat im algebroiden Fall an den Stellen, wo $v \neq \infty$ ist, eventuell mehr Polstellen als im meromorphen Fall. Ist nämlich $v(z_0) = a \neq \infty$, dann haben wir bei z_0 die Entwicklungen

$$v(z) = a + b(z-z_0)^{\mu/\varkappa}(1 + \dots), \qquad 1 \leqslant \mu,\ 1 \leqslant \varkappa \leqslant m,$$

$$v'(z) = b\,\frac{\mu}{\varkappa}\,(z-z_0)^{(\mu-\varkappa)/\varkappa}(1 + \dots),$$

$$v''(z) = b\,\frac{\mu(\mu-\varkappa)}{\varkappa^2}\,(z-z_0)^{(\mu-2\varkappa)/\varkappa}(1 + \dots), \qquad \text{usw.}$$

Interessant sind nun die Stellen z_0 mit $\varkappa \geqslant 2$, also die Verzweigungsstellen der zugrunde liegenden m-blättrigen Riemannschen Fläche $\mathfrak{Z}$. $(v^{(j)})^{n_j}$ hat dann bei z_0 einen Pol der Ordnung

$$\nu \leqslant n_j(j\varkappa - \mu) = jn_j(\varkappa - \mu/j) \leqslant 2jn_j(\varkappa - 1)$$

und $F(z)$ hat einen Pol der Ordnung

$$\nu_F \leqslant 2g(\varkappa - 1),$$

denn das Maximum der Gewichte links in (4) ist gleich dem maximalen Gewicht von $\hat{P}$ (siehe Beweis zu Satz 14). Es folgt

$$N(r, F) \leqslant 2gN_{\mathfrak{Z}}(r) + S(r, w),$$

dabei ist $N_{\mathfrak{Z}}(r)$ die Anzahlfunktion über die Verzweigungsstellen der Riemannschen Fläche $\mathfrak{Z}$. Es gilt nun der Verzweigungssatz von Ullrich ([23], S. 210):

$$N_{\mathfrak{Z}}^{*}(r) \leqslant 2(m-1)T(r, v) + O(1).$$

Durch geeignete Wahl von a erreicht man wieder $m(r, F) = S(r, v)$ und damit

$$T(r, F) \leqslant 4g(m-1)T(r, v) + S(r, v).$$

Das Lemma 17 von Valiron–Mohon'ko liefert

$$\operatorname{grad} \frac{P_0}{Q} = \operatorname{grad} Q \leqslant 4g(m-1)$$

und die Rücktransformation $v = 1/(w-a)$ führt zu den behaupteten Abschätzungen (39). ■

Bemerkung. Im Falle der Differentialgleichung (2) von Yosida ist $j = 1$ und $n_1 = n$. Wir können dann etwas besser abschätzen:

$$n(\varkappa - \mu) \leqslant n(\varkappa - 1)$$

und es folgt

$$q \leqslant 2n(m-1).$$

5.4. Wir behandeln jetzt Differentialgleichungen von der spezielleren Form

$$\sum_{\lambda \in I} c_\lambda(z) w^{n_0}(w')^{n_1} \ldots (w^{(r)})^{n_r} = \Big(\sum_{i=0}^{q+d+k} a_i(z) w^i\Big) \Big/ \Big(\sum_{i=0}^{q} b_i(z) w^i\Big) \tag{40}$$

mit $1 \leqslant k \leqslant \Delta - d$, $a_{q+d+k}(z) \not\equiv 0$ und $b_q(z) \not\equiv 0$. Dabei ist d der Grad der linken Seite in (40). Uns interessiert zuerst die Werteverteilung der Stellensorte ∞ bei zulässigen algebroiden Lösungen $w(z)$.

Satz 20. *Eine zulässige algebroide Lösung $w(z)$ von (40) nimmt den Wert ∞ ohne Defekt an,*

$$\delta(\infty, w) = 0. \tag{41}$$

Weiter gilt für den Verzweigungsindex und die Verzweigtheit der Stellensorte ∞ *die Abschätzung*

$$\vartheta(\infty, w) \leqslant \Theta(\infty, w) \leqslant 1 - \frac{k}{mg}. \tag{42}$$

Beweis. Zum Beweis von (41) multiplizieren wir den Nenner in (40) nach links. Dann haben wir links den Grad $q+d$ und rechts den größeren Grad $q+d+k$. Wir können das Lemma von Clunie (siehe dazu 2. in 5.1) anwenden und folgern

$$m(r, w) = S(r, w).$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung (41).

Aussagen über den Verzweigungsindex und die Verzweigtheit bei ∞ erhalten wir wieder durch einen Polstellenvergleich. Es sei z_0 eine Polstelle von $w(z)$ von der Ordnung ν_0. Wir haben bei z_0 die Entwicklungen

$$\begin{aligned} w(z) &= a(z-z_0)^{-\nu_0/\varkappa}(1+\ldots), \qquad 1 \leqslant \nu_0,\ 1 \leqslant \varkappa \leqslant m, \\ w'(z) &= a\left(-\frac{\nu_0}{\varkappa}\right)(z-z_0)^{-(\nu_0+\varkappa)/\varkappa}(1+\ldots), \\ w''(z) &= a\,\frac{\nu_0(\nu_0+\varkappa)}{\varkappa^2}(z-z_0)^{-(\nu_0+2\varkappa)/\varkappa}(1+\ldots), \qquad \text{usw.} \end{aligned}$$

Nun denken wir uns den Nenner rechts in (40) wieder nach links multipliziert. Die linke Seite hat dann einen Pol der Ordnung

$$\nu \leqslant q\nu_0 + \max_{\lambda\in I}\left(\nu_0 n_0 + \ldots + (\nu_0 + r\varkappa)n_r\right) + m\left(\sum_{\lambda\in I}\nu_\lambda + \sum_{i=0}^{q}\nu_i''\right),$$

dabei sind die ν_λ bzw. ν_i'' die Polstellenordnungen der Koefficienten $c_\lambda(z)$ bzw. $b_i(z)$ bei z_0. Es sei $(n_0^*, \ldots, n_r^*)$ eine Indexkombination links, die das Maximum realisiert. Es gilt dann

$$\nu \leqslant q\nu_0 + \nu_0 n_0^* + \ldots + (\nu_0 + r\varkappa)n_r^* + m\left(\sum_{\lambda\in I}\nu_\lambda + \sum_{i=0}^{q}\nu_i''\right). \tag{43}$$

Mit Hilfe der rechten Seite erhalten wir eine Abschätzung nach unten. Es gilt wegen (32)

$$\begin{aligned} \nu &\geqslant (g+d+k)\nu_0 - C\left(\sum_{i=0}^{q+d+k}\nu_i' + \sum_{i=0}^{q+d+k}\mu_i'\right) \\ &\geqslant q\nu_0 + k\nu_0 + \nu_0(n_0^* + \ldots + n_r^*) - C\left(\sum_{i=0}^{q+d+k}\nu_i' + \sum_{i=0}^{q+d+k}\mu_i'\right) \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $C > 0$; dabei sind die ν_i' bzw. μ_i' die Polstellen- bzw. Nullstellenordnungen der Koeffizienten $a_i(z)$ bei z_0. Aus (43) und (44) folgt

$$\nu_0 \leqslant \frac{\varkappa g}{k} + D\left(\sum_{\lambda\in I} \nu_\lambda + \sum_{i=0}^{q} \nu_i'' + \sum_{i=0}^{q+d+k} \nu_i' + \sum_{i=0}^{q+d+k} \mu_i'\right)$$

mit einer Konstanten $D > 0$. Wir beachten $\varkappa \leqslant m$ und erhalten ähnlich wie beim Beweis des Satzes 10 die Behauptung (42). ∎

5.5. Zum Schluß beschäftigen wir uns mit allgemeinen algebraischen Differentialgleichungen von der Form (4). Uns interessiert die Werteverteilung der endlichen Stellensorten a bei zulässigen algebroiden Lösungen $w(z)$. Es wird dabei noch vorausgesetzt, daß links in (4) keine alleinstehenden w-Potenzen auftreten.

Substitution $w = a + 1/v$ und Multiplikation mit v^{Δ} führt (4) über in

$$\hat{P}(z, v, v', \ldots, v^{(r)}) = \frac{\big(a_0(z) + a a_1(z) + \ldots + a^p a_p(z)\big) v^{q+\Delta} + \ldots + a_p(z)}{\big(b_0(z) + a b_1(z) + \ldots + a^q b_q(z)\big) v^q + \ldots + b_q(z)}.$$

Falls der Koeffizient bei $v^{q+\Delta}$ nicht identisch verschwindet, dann haben wir eine Differentialgleichung in v von der Form (40) mit $k \geqslant \min\limits_{\lambda\in I}(n_1 + \ldots + n_r)$ für $a \neq 0$ und $k \geqslant \min\limits_{\lambda\in I}(n_0 + \ldots + n_r)$ für $a = 0$. Es folgt (ähnlich wie die Sätze 13 und 14 in 4.4)

SATZ 21. *Sei $w(z)$ eine zulässige m-deutige algebroide Läsung der Differentialgleichung* (4) *und a eine endliche Stellensorte mit*

$$a_0(z) + a a_1(z) + \ldots + a^p a_p(z) \not\equiv 0. \tag{45}$$

Dann gilt

$$\delta(a, w) = 0.$$

Für den Verzweigungsindex und die Verzweigtheit einer Stellensorte a mit der Eigenschaft (45) *gelten die Abschätzungen*

$$\vartheta(a, w) \leqslant \Theta(a, w) \leqslant 1 - \frac{\min(n_1 + \ldots + n_r)}{mg}$$

für $a \neq 0$ und

$$\vartheta(0, w) \leqslant \Theta(0, w) \leqslant 1 - \frac{\min(n_0 + \ldots + n_r)}{mg}. \;\blacksquare$$

Bemerkung. Man könnte Satz 21 wieder durch ähnliche Betrachtungen wie in 4.5. ergänzen.

BEISPIELE. 1. Für die Besselfunktion $J_\nu(z)$ mit rationalem $\nu = j/m$ gilt nach Satz 21

$$\delta(a, w) = 0$$

für alle $a \neq 0$ und

$$\vartheta(a, w) \leqslant \Theta(a, w) \leqslant 1 - 1/2m$$

für alle a.

2. Bei der Differentialgleichung (2) von Yosida gilt für zulässige m-deutige algebroide Lösungen $w(z)$ nach Satz 21

$$\vartheta(a, w) \leqslant \Theta(a, w) \leqslant 1 - 1/m$$

für alle a.

Nachtrag zu der Korrektur. Nachdem dieser Arbeit eingereicht wurde, haben einige Arbeiten mit teilweise ähnlichen Betrachtungen erschienen. Man sollte hier besonders die folgenden Arbeiten erwähnen:
[a] N. Steinmetz, Dissertation (Karlsruhe 1978).
[b] N. Steinmetz, Math. Ann. 244 (1979), S. 263–274.
[c] S. Strelitz, Proc. Amer. Math. Soc. 65 (1977), p. 255–261.

Die Arbeiten von Herrn Steinmetz enthalten (z. T. partielle) Verbesserungen einiger unserer Resultate (Sätze 5, 10, 14 und 15). Die Arbeit von Herrn Strelitz enthält wesentlich unser Satz 5 im Falle der Polynomkoeffizienten.

Literatur

[1] S. Bank, *Some results on analytic and meromorphic solutions of algebraic differential equations*, Advances in Math. 15 (1975), p. 41–62.

[2] — *On algebraic differential solutions whose coefficients are entire functions of finite order*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 20 (1975), p. 511–519.

[3] — *On the existence of meromorphic solutions of differential equations having arbitrarily rapid growth*, J. Reine Angew. Math. 288 (1976), p. 176–182.

[4] — and I. Laine, *On the growth of meromorphic solutions of linear and algebraic differential equations*, Math. Scand. 40 (1977), p. 119–126.

[5] L. Bieberbach, *Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Springer Verlag, 1965.

[6] J. Clunie, *On integral and meromorphic functions*, J. London Math. Soc. 37 (1962), p. 17–27.

[7] F. Gackstatter, *Über die logarithmische Ableitung einer algebroiden Funktion*, J. Reine Angew. Math. 257 (1972), S. 210–216.

[8] W. K. Hayman, *Meromorphic functions*, Oxford University Press, 1964.

[9] — *Research problems in function theory*, Athlone Press, 1967.

[10] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley & Sons, 1976.

[11] — *Finiteness of the order of meromorphic solutions of some non-linear ordinary differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 72 (1974), p. 331–336.

[12] — *On some generalizations of the Malmquist theorem*, Math. Scand. 39 (1976), p. 59–79.

[13] E. L. Ince, *Ordinary differential equations*, Dover 1956.

[14] H.-P. Künzi, *Sur un théorème de M. J. Malmquist*, C. R. Acad. Sci. Paris 242 (1956), p. 866–868.

[15] I. Laine, *On the behaviour of the solutions of some first order differential equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I 497 (1971).

[16] — *Admissible solutions of some generalized algebraic differential equations*, Publ. Univ. Joensuu Ser. B 10 (1974).

[17] J. Malmquist, *Sur les fonctions à un nombre fini des branches définies par les équations différentielles du premier ordre*, Acta Math. 36 (1913), p. 297–343.

[18] A. Мохонько, *О неванлинновских характеристках некоторых мероморфых функций*, Теор.. Функций Функционал. Анал. и Приложен. 14 (1971), стр. 83–87.

[19] — и В. Мохонко, *Оценки неванлинновских характеристик некоторых классов мероморфных функций и их приложкния к дифференциальным уравнениям*, Сивирск. Мат. Ж. 25 (1974), стр.. 1305–1322.

[20] R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen*, 2. Auflage, Springer-Verlag, 1953.

[21] J. Nikolaus, *Lineare Differentialgleichungen im Komplexen*, 5. Steiermärkisches Math. Sympos. III (1973), S. 1–16.

[22] H. Selberg, *Über die Wertverteilung der algebroiden Funktionen*, Math. Z. 31 (1930), p. 709–728.

[23] E. Ullrich, *Über den Einfluß der Verzweigtheit einer Algebroide auf ihre Wertverteilung*, J. Reine Angew. Math. 167 (1932), S. 198–220.

[24] G. Valiron, *Sur la dérivée des fonctions algebroïdes*, Bull. Soc. Math. France 59 (1931), p. 17–39.

[25] H. Wittich, *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen*, Springer-Verlag, 1955.

[26] — *Zur Theorie der Riccatischen Differentialgleichung*, Math. Ann. 127 (1954), p. 433–450.

[27] — *Einige Eigenschaften der Lösungen von* $w' = a(z) + b(z)w + c(z)w^2$, Arch. Math. 5 (1954), p. 226–232.

[28] C.-C. Yang, *On meromorphic solutions of generalized algebraic differential equations*, Ann. Mat. Pura Appl. 91 (1972), p. 41–52.

[29] K. Yosida, *A generalization of a Malmquist's theorem*, Japan. J. Math. 9 (1933), p. 253–256.

[30] — *A note on Riccati's equation*, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 15 (1933), p. 227–237.

[31] — *On the characteristic function of a transcendental meromorphic solution of an algebraic differential equation of the first order and the first degree*, ibidem 15 (1933), p. 337–338.

[32] — *On algebroid-solutions of ordinary differential equations*, Japan. J. Math. 10 (1934), p. 199–208.

[33] — *A note on Malmquist's theorem on first order algebraic differential equations*, Proc. Japan Acad. 53 (1977), p. 120–123.

I. MATHEMATISCHES INSTITUT
DER FU BERLIN
und
FACHBEREICH MATHEMATIK UND PHYSIK
UNIVERSITÄT JOENSUU

Reçu par la Rédaction le 19. 10. 1977