COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXIV 1971 FASC. 1.

P R O B L È M E S

М. Б. КУДАЕВ (НАЛЬЧИК, КАБАРДИНО-БАЛКАРСКАЯ АССР)

P 750-753. Formulés dans la communication *Из проблем теории простых чисел.*

Ce fascicule, p. 121 et 122

В. М. ЗОЛОТАРЕВ (МОСКВА)

P 754. Рассматривается последовательность независимых и одинако распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ С помощью констант $B_n > 0$ и A_n образуются суммы

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{B_n} - A_n.$$

Известно, что $P\{\zeta < x\} = F_n(x) \to \Phi(x)$ (слабая сходимость) для всех $x > 0$; $\Phi(x)$ — стандартное нормальное расспределение. Спрашивается, будет ли иметь место сходимость $F_n(x) \to \Phi(x)$ для каждого $x < 0$?

Предположительный ответ — да. Аналогичный и более сложный вариант вопроса в случае положительного ответа. Если $F_n(x) \to \Phi(x)$ при $n \to \infty$ дла каждого $x \in A$, то каким должно быть множество A, чтобы отсюда следовала сходимость $F_n(x) \to \Phi(x)$ дла каждого $x \in \bar{A}$? Второй вариант вопроса: Для каких предельных расспределений будет наблюдатся подобное аналитическое продолжение?

Новая Шотландская Книга, Пробл. 846, 17. 9. 1970

P 755. Является ли логарифмический нормальный закон безгранично делимым?

Замечание. В теории перемножения независимых случайных величин появляется свой класс $\mathfrak{M}$ безгранично делимых законов аналогичный хорошо известному в теории суммирования независимых случайных величин классу $\mathfrak{G}$. Известно, что класс расспределений $\mathfrak{M} \frown \mathfrak{G}$ не пуст (например, в него входит нормальный закон со средним значением 0). Интересен вопрос описания класса $\mathfrak{M} \frown \mathfrak{G}$. Поставленный выше вопрос имеет отношение к созданию методов описания этого класса.

Новая Шотландская Книга, Пробл. 847, 17. 9. 1970

P 756. Существует ли вещественнозначный функционал V обладающий следующими свойствами:

1. $V(f)$ определен на множестве всех характеристических функций $f(t)$ вероятностных распределений (множество F);
2. $V(f_1f_2) = V(f_1)+V(f_2)$ для любых $f_1, f_2 \in F$;
3. $V(e^{it\lambda}) = \lambda$;
4. $V(f_n) \to V(f)$ при $n \to \infty$, если $f_n, f \in F$ и $f_n(t) \to f(t)$ для каждого вещественного t;
5. $V(\bar{f}) = -V(f)$, где $\bar{f}$ сопраженное значение к f.

Замечание. Не исключено, что такой функционал, если он существует, может быть представлен в следующей форме:

$$V(f) = 2\int_0^1 \operatorname{Im}\log f(t)\,dt$$

(при этом возникает необходимость дополнительно уточнять, что понимается под $\operatorname{Im}\log f(t)$ для $t > t_0$, если $|f(t_0)| = 0$).

Новая Шотландская Книга, Пробл. 848, 17. 9. 1970

P 757. Построить аналог теоремы Ессена-Винтнера о том, что бесконечная свертка дискретных распределений может быть только „чистым" распределением, относящийся к бесконечной свертке сингулярных распределений. Пусть $F = F_1 * F_2 * \ldots$ сходящаяся бесконечная свертка.

Известно, что все свертки вида $F_{i_1} * F_{i_2} * \ldots * F_{i_k}$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $k = 1, 2, \ldots$ являются сингулярными распределениями (т.е. непрерывными, но без абсолютно непрерывной составляющей). Доказать, что F является или чисто сингулярной или чисто абсолютно непрерывной.

Новая Шотландская Книга, Пробл. 849, 17. 9. 1970

J. F. MÉLA (ORSAY)

P 758. Existe-t-il un ensemble d'entiers positifs, $E = (n_k)$, $n_k < n_{k+1}$, avec les propriétés

a) Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $p \geqslant 1$ on puisse trouver une mesure bornée μ sur le tore, dont la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ vérifie

$$\begin{cases} \hat{\mu}(n_k) = 1 & 1 \leqslant k \leqslant p, \\ \hat{\mu}(n_k) = 0 & k > p. \end{cases}$$

b) Il existe une fonction bornée sur E qui n'est pas prolongeable sur Z en la transformée de Fourier d'une mesure sur le tore?

Le Nouveau Livre Ecossais, Probl. 850, 3. 11. 1970

P 759. Quels sont les ensembles d'entiers positifs $E = (n_k)$, $n_k < n_{k+1}$, qui ont la propriété que, pour tout mesure μ bornée sur le tore, on puisse trouver une mesure ν bornée sur le tore, telle que $\hat{\mu}(n_{k+1}) = \hat{\nu}(n_k)$ $(k > 0)$?

Le Nouveau Livre Ecossais, Probl. 851, 3. 11. 1970

P 760. Existe-t-il un ensemble d'entiers positifs $E = (n_k)$, $n_k < n_{k+1}$, telle que toute fonction bornée sur E soit prolongeable sur Z en la transformée de Fourier d'une mesure bornée sur le tore, mais ne soit pas toujours prolongeable en la transformée de Fourier d'une mesure positive?

Le Nouveau Livre Ecossais, Probl. 852, 3. 11. 1970

P 761. Soit $E = (n_k)$ un ensemble d'entiers positifs. On suppose qu'il existe un compact K du tore tel que toute fonction bornée sur E est prolongeable sur Z en la transformée de Fourier d'une mesure à support dans K. Cette propriété demeure-t-elle vraie pour la réunion de E et d'un ensemble fini d'entiers? (La réponse est oui si K est un intervalle.)

Le Nouveau Livre Ecossais, Probl. 853, 3. 11. 1970