ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVII (1973)

Sur les généralisations du théorème de Meusnier

par TRAN DINH - VIEN (Vinh)

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1

Généralisation du théorème de Meusnier dans les espaces Riemanniens

Introduction. Au Congrès des mathématiciens roumains (Bucarest mai-juin 1956) [2] J. Favard a donné, en appliquant la méthode des formes de Cartan, une généralisation du théorème de Meusnier pour les variétés immergées dans les espaces riemanniens V_n.

Cependant il a répondu à sa question: „combien y a-t-il de théorèmes de Meusnier?" seulement dans le cas où $m = n-1$.

Dans ce chapitre du présent travail nous déduirons les résultats de Favard, en utilisant la dérivée absolute ensuite nous donerons une réponse à la question de Favard dans le cas général (pour m: nombre arbitraire $\leqslant n-1$).

1. Généralisation du théorème de Meusnier par la méthode de Favard. Soit F_m une variété à m dimensions plongée dans un espace de Riemann V_n ($m \leqslant n-1$). Désignons par $T_M(F_m)$ l'espace vectoriel tangent à F_m en un point quelconque $M \in F_m$ et soit $\{\underset{h}{i}\}$ ($h = 1, 2, \ldots, m$) la suite des vecteurs qui forment une base de cet espace. Une seconde suite de vecteurs $\underset{a}{i}$ ($a = m+1, \ldots, n$), orthogonaux aux vecteurs $\underset{h}{i}$, définit un espace vectoriel

N_n qui est orthogonal à $T_M(F_m)$ et on l'appelle *espace normal* à F_m. Donc on a

$$(1.1) \qquad \underset{h}{i}\cdot\underset{\alpha}{i} = 0, \quad \forall h, \quad \forall \alpha.$$

Dans le voisinage de M on peut choisir un système de coordonnées local (x^λ), $\lambda = 1, \ldots, n$, tel que l'ensemble $\{\underset{h}{i}, \underset{\alpha}{i}\}$, où $\{\underset{\lambda}{i}\}$, soit un repère naturel de ce système.

Aussi nous avons:

$$(1.2) \qquad g_{\lambda\mu} = \underset{\lambda\mu}{ii}$$

(oú $g_{\lambda\mu}$: le tenseur, métrique de l'espace V_n au point M) et

$$(1.3) \qquad dM = dx^h\cdot\underset{h}{i}.$$

Soit $\mathscr{C}$ une courbe quelconque de classe C^l $(l \geqslant 2)$ passant par M tracée sur la variété F_m et définie par l'équation

$$(1.4) \qquad M = M(s)$$

où s est un arc (paramètre naturel).

Désignons par $\underset{0}{t}$ le vecteur tangent à cette courbe $\mathscr{C}$ au point M,

$$(1.5) \qquad \underset{0}{t} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{dM}{ds} = \frac{dx^h}{ds}\underset{h}{i}.$$

La dérivation absolue du vecteur $\underset{0}{t}$ par rapport à s donne

$$(1.6) \qquad \frac{D}{ds}\underset{0}{t} = \left[\frac{d\underset{0}{t}^h}{ds} + \begin{Bmatrix} h \\ h_1 \; h_2\end{Bmatrix}\underset{0}{t}^{h_1}\cdot\frac{dx^{h_2}}{ds}\right]\underset{h}{i} + \left[\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ h_1 \; h_2\end{Bmatrix}\underset{0}{t}^{h_1}\frac{dx^{h_2}}{ds}\right]\underset{\alpha_1}{i}$$

$(h_1, h_2 = 1, \ldots, m;\ \alpha_1 = m+1, \ldots, n)$.

On peut démontrér que *l'objet* $\begin{Bmatrix} \alpha \\ h \; k\end{Bmatrix}$ *est un tenseur dans* V_n. En effet, dans l'espace V_n nous pouvons écrire la loi de transformation des coordonnées sous la forme

$$(1.7) \qquad x^{h'} = x^{h'}(x^1, \ldots, x^m), \qquad x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^{m+1}, \ldots, x^n)$$

et on aura:

$$\begin{Bmatrix} \alpha' \\ h' \; k'\end{Bmatrix} = A_\lambda^{\alpha'}A_{h'}^{\mu}A_{k'}^{\nu}\begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu \; \nu\end{Bmatrix} + \partial_{h'}A_{k'}^{\lambda}A_\lambda^{\alpha'}$$

où

$$A_\mu^{\lambda'} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\mu}, \qquad A_{\lambda'}^{\mu} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\lambda'}}.$$

D'après (1.7) nous avons $A^\alpha_{k'} = 0$, $A^{\alpha'}_k = 0$. De cette façon nous avons

$$\partial_{h'} A^\lambda_{k'} A^{\alpha'}_\lambda = \partial_{h'} A^k_{k'} A^{\alpha'}_k + \partial_{h'} A^\alpha_{k'} A^{\alpha'}_\alpha = 0$$

et nous obtenons

$$\left\{ {\alpha' \atop h' \ k'} \right\} = A^{\alpha'}_\alpha A^h_{h'} A^k_{k'} \left\{ {\alpha \atop h \ k} \right\}.$$

L'objet $\left\{ {\alpha \atop h \ k} \right\}$ est donc un tenseur dans V_n et on voit facilement que

$$(1.8) \quad \begin{aligned} &\text{(a)} \qquad \underset{1g}{t} \overset{\mathrm{df}}{=} \left[\frac{d\underset{0}{t}^h}{ds} + \left\{ {h \atop h_1 \ h_2} \right\}_0 t^{h_1} \frac{dx^{h_2}}{ds} \right] \underset{h}{i}, \\ &\text{(b)} \qquad \underset{1e}{t} \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{ {\alpha \atop h_1 \ h_2} \right\}_0 t^{h_1} \frac{dx^{h_2}}{ds} \underset{\alpha}{i} \end{aligned}$$

sont deux vecteurs contravariants dans V_n au point M. En vertu des équations de Frenet on peut écrire

$$\frac{D\underset{0}{t}}{ds} = \underset{1}{k}\underset{1}{t} = \underset{1g}{t} + \underset{1e}{t}$$

où $\underset{1}{k}$ et $\underset{1}{t}$ sont respectivement la première courbure et la première normale de la courbe $\mathscr{C}$ au point M. $\underset{1g}{t}$ et $\underset{1e}{t}$ sont les projections du vecteur $\underset{1}{k}\underset{1}{t}$ respectivement sur $T_M(F_m)$ et sur N_{n-m}.

Nous constatons, en tenant compte de (1.8b), que *le vecteur* $\underset{1e}{t}$ *ne dépend que du point* M *et du vecteur tangent* $\underset{0}{t}$.

Par conséquent nous obtenons:

a. *La projection du vecteur* $\underset{1}{k}\underset{1}{t}$ *sur l'espace* N_{n-m} *est la même pour toutes les courbes ayant le même vecteur tangent au point commun* M.

C'est une généralisation du théorème de Meusnier.

On a

$$|\underset{1e}{t}|^2 = g_{\alpha_1\beta_1} \left\{ {\alpha_1 \atop h_1 \ h_2} \right\} \left\{ {\beta_1 \atop k_1 \ k_2} \right\}_0 \underset{0}{t}^{h_1} \underset{0}{t}^{k_1} \frac{dx^{h_2}}{ds} \frac{dx^{k_2}}{ds},$$

mais $\underset{0}{t}_h = \dfrac{dx^h}{ds}$, par suite

$$(1.9) \qquad |\underset{1e}{t}|^2 = g_{\alpha_1\beta_2} \left\{ {\alpha_1 \atop h_1 \ h_2} \right\} \left\{ {\beta_1 \atop k_1 \ k_2} \right\} \frac{dx^{h_1} dx^{h_2} dx^{k_1} dx^{k_2}}{ds^4}.$$

b. *Nous obtenons une forme invariante différentielle du quatrième degré*:

$$(1.10) \qquad \mathscr{F}_4 = g_{\alpha_1\beta_1} \left\{ {\alpha_1 \atop h_1 \ h_2} \right\} \left\{ {\beta_1 \atop k_1 \ k_2} \right\} dx^{h_1} dx^{h_2} dx^{k_1} dx^{k_2}.$$

D'une façon analogue la dérivation absolue du vecteur $\underset{1e}{t}$ par rapport à s donne

$$\frac{D}{ds}\underset{1e}{t} = \underset{2g}{t} + \underset{2e}{t} \tag{1.11}$$

où

$$\text{(1.12)}\quad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad \underset{2g}{t} \overset{\text{df}}{=} \begin{Bmatrix} h \\ \alpha_1 \ h_1 \end{Bmatrix} \underset{1e}{t^{\alpha_1}} \frac{dx^{h_1}}{ds} \underset{h}{i}, \\ &\text{(b)} \quad \underset{2e}{t} \overset{\text{df}}{=} \left[\frac{d}{ds} \underset{1e}{t^{\alpha_1}} + \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha \ h_1 \end{Bmatrix} \underset{1e}{t} \frac{dx^{h_1}}{ds} \right] \underset{\alpha_1}{i}, \end{aligned}$$

$\underset{2g}{t}$ et $\underset{2e}{t}$ sont les projections du même vecteur $\frac{D}{ds}\underset{1e}{t}$ respectivement sur $T_M(F_m)$ et sur N_{n-m} (évidemment ce sont des vecteurs contravariants).

En vertu de (1.12 a) nous obtenons:

(a) *La projection du vecteur* $\frac{D}{ds}\underset{1e}{t}$ *sur* $T_M(F_m)$ *est la même pour toutes les courbes ayant le même vecteur tangent au point commun* M.

(b) *Nous avons une forme invariante différentielle du sixième degré de la variété* F_m:

$$\mathscr{F}_6 = g_{hk} \begin{Bmatrix} h \\ \alpha_1 \ h_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ h_2 \ h_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ \beta_1 \ k_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ k_2 \ k_3 \end{Bmatrix} dx^{h_1} dx^{h_2} dx^{h_3} dx^{k_1} dx^{k_2} dx^{k_3}.$$

A l'aide de l'induction mathématique nous pouvons démontrer la proposition suivante:

THÉORÈME 1. (a) *La projection du vecteur* $\frac{D}{ds}\underset{2p-1,e}{t}$ (1) *sur l'espace* $T_M(F_m)$ *est la même pour toutes les courbes ayant le même vecteur tangent au point commun* M (p: *nombre naturel* $\geqslant 1$).

(b) *La projection du vecteur* $\frac{D}{ds}\underset{2p,g}{t}$ *sur l'espace* N_{n-m} *est la même pour toutes les courbes ayant le même vecteur tangent au point commun* M.

(c) *Nous avons les formes invariantes différentielles de degré pair suivantes:*

$$\mathscr{F}_{4p} = g_{\alpha_1\beta_1} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ i_1 \ h_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 \\ \alpha_2 \ h_2 \end{Bmatrix} \cdots \begin{Bmatrix} i_{p-1} \\ \alpha_p \ h_{2p-2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_p \\ h_{2p-1} \ h_{2p} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ j_1 \ k_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_2 \\ \beta_2 \ k_2 \end{Bmatrix} \cdots$$
$$\cdots \begin{Bmatrix} j_{p-1} \\ \beta_p \ k_{2p-2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_p \\ k_{2p-1} \ k_{2p} \end{Bmatrix} dx^{h_1} \ldots dx^{h_{2p}} dx^{k_1} \ldots dx^{k_{2p}},$$

---

(1) $\underset{1e}{t}$ est la projection du vecteur $\underset{1}{k}\,\underset{1}{t}$ sur N_{n-m} (1.8b), $\underset{2g}{t}$ est la projection du vecteur $\frac{D}{ds}\underset{1e}{t}$ sur $T_M(F_m)$, $\underset{3e}{t}$ est la projection du vecteur $\frac{D}{ds}\underset{2g}{t}$ sur N_{n-m} at ainsi de suite.

(1.13) *dans ce cas nous devons supposer que la courbe $\mathscr{C}$ est de classe C^l $(l \geqslant 2p+1)$,*

$$\mathscr{F}_{4p+2} = g_{hk}\begin{Bmatrix} h \\ \alpha_1 \ h_1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ i_1 \ h_2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} i_1 \\ \alpha_2 \ h_3 \end{Bmatrix}\cdots$$

$$\cdots\begin{Bmatrix} i_{p-1} \\ \alpha_p \ h_{2p-1} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha_p \\ h_{2p} \ h_{2p+1} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k \\ \beta_1 \ k_1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \beta_1 \\ j_1 \ k_2 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j_1 \\ \beta_2 \ k_3 \end{Bmatrix}\cdots$$

$$\cdots\begin{Bmatrix} j_{p-1} \\ \beta_p \ k_{2p-1} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \beta_p \\ k_{2p} \ k_{2p+1} \end{Bmatrix} dx^{h_1}\dots dx^{h_{2p+1}} dx^{k_1}\dots dx^{k_{2p+1}},$$

dans ce cas nous devons supposer que la courbe est de classe C^l $(l \geqslant 2p+2)$,
p: nombre naturel arbitraire,
$\underset{1}{i}, \underset{2}{i}, \dots = 1, \dots, m$; $h_1, h_2, \dots = 1, \dots, m$; $k_1, k_2, \dots = 1, \dots, m$;
$\alpha_1, \alpha_2, \dots = m+1, \dots, n$; $\beta_1, \beta_2, \dots = m+1, \dots, n$.

2. Combien y a-t-il de formes indépendantes? J. Favard a montré que dans le cas $m = n-1$ il n'y a que deux théorèmes de Meusnier (ou deux formes différentielles indépendantes). Maintenant nous allons traiter le cas général. D'abord nous démontrons le lemme suivant:

LEMME 1. *L'égalité suivant:*

$$g_{hk}\begin{Bmatrix} h \\ \alpha_1 \ h_1 \end{Bmatrix} = -g_{\alpha_1\beta}\begin{Bmatrix} \beta \\ k \ h_1 \end{Bmatrix} \tag{2.1}$$

est vraie pour k, k, $h_1 = 1, 2, \dots, m$; α, β, $\alpha_1 = m+1, \dots, n$.

Démonstration. Comme $\underset{h}{i}\,\underset{\alpha}{i} = 0$, nous avons

$$(D\underset{h}{i})\underset{\alpha}{i} + \underset{h}{i}\,D\underset{\alpha}{i} = 0, \tag{2.2}$$

mais

$$\underset{h}{i}^\lambda = \delta_h^\lambda, \quad \underset{\alpha}{i}^\lambda = \delta_\alpha^\lambda,$$

de sorte que

$$D\underset{h}{i} = \left[d\delta_h^\lambda + \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu \ \nu \end{Bmatrix}\underset{h}{i}^\mu dx^\nu\right]\underset{\lambda}{i} = \begin{Bmatrix} \lambda \\ h \ h_1 \end{Bmatrix} dx^{h_1}\cdot\underset{\lambda}{i}. \tag{2.3}$$

D'une façon analogue

$$D\underset{\alpha}{i} = \begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha_1 \ h_1 \end{Bmatrix} dx^{h_1}\cdot\underset{\lambda}{i}. \tag{2.4}$$

En tenant compte de (2.3) et (2.4) nous pouvons donc écrire

$$\left[\begin{Bmatrix} \lambda \\ h \ h_1 \end{Bmatrix}\underset{\lambda}{i}\cdot\underset{\alpha}{i} + \begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha \ h_1 \end{Bmatrix}\underset{\lambda}{i}\cdot\underset{h}{i}\right] dx^h = 0$$

(pour toutes les directions dx^h sur F_m au point M) d'où

$$g_{\lambda\alpha}\begin{Bmatrix} \lambda \\ h \ h_1 \end{Bmatrix} + g_{\lambda h}\begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha \ h_1 \end{Bmatrix} = 0.$$

Mais, d'après (1.1) et (1.2), $g_{ah} = 0$. Par conséquent nous avons

$$g_{\alpha\beta}\left\{{\beta \atop h\ h_1}\right\} + g_{hk}\left\{{k \atop \alpha\ h_1}\right\} = 0,$$

ce qui termine la démonstration de notre lemme.

Maintenant revenons au problème: „combien y a-t-il de formes indépendantes?".

En appliquant ce lemme aux formes (1.13b) nous pouvons écrire les formes $\mathscr{F}_{4p}$, $\mathscr{F}_{4p+2}$ comme il suit:

$$(2.5)\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\ \mathscr{F}_{4p} = g_{\alpha_1\beta_1} A^{\alpha_1}_{\alpha_2} \dots A^{\alpha_{p-1}}_{\alpha_p} B^{\alpha_p} \cdot A^{\beta_1}_{\beta_2} \dots A^{\beta_{p-1}}_{\beta_p} B^{\beta_p},\\ &\text{(b)}\ \mathscr{F}_{4p+2} = -g_{\alpha_1\beta} A^{\beta}_{\beta_1} A^{\alpha_1}_{\alpha_2} \dots A^{\alpha_{p-1}}_{\alpha_p} B^{\alpha_p} \cdot A^{\beta_1}_{\beta_2} \dots A^{\beta_{p-1}}_{\beta_p} B^{\beta_p} \end{aligned}$$

où

$$(2.6)\quad \begin{aligned} &\text{(a)} \qquad A^{\alpha}_{\beta} \overset{\text{df}}{=} \left\{{\alpha \atop h_1\ h}\right\}\left\{{h_1 \atop \beta\ k}\right\} dx^h dx^k,\\ &\text{(b)} \qquad B^{\alpha} \overset{\text{df}}{=} \left\{{\alpha \atop h\ k}\right\} dx^h dx^k. \end{aligned}$$

Comme A^{α}_{β} et B^{α} sont des formes différentielles indépendantes, il y a $(n-m)^2$ formes A^{α}_{β} et $(n-m)$ formes B^{α}, et par conséquentent nous avons $(n-m)$ $(n-m+1)$ formes indépendantes. En résumant on peut dire *qu'en généralisant le théorème de Meusnier pour une variété F_m plongée dans l'espace riemannien V_n $(m \leqslant n-1)$, on peur établir au plus $(n-m)$ $(n-m+1)$ formes invariantes différentielles* (2.5) (*de degré pair*) *indépendantes qui sont des combinaisons des formes différentielles* (2.6).

3. Cas particuliers.

1. $m = n-1$: On peut prendre $g_{\alpha\alpha} = 1$. Nous n'avons que deux formes $A \overset{\text{df}}{=} A^{\alpha}_{\beta}$, et $B \overset{\text{df}}{=} B^{\alpha}$ (dans ce cas $\alpha = \beta = n$). Pour $p = 1$ on a d'après (2.5)

$$\mathscr{F}_4 = B^{\alpha_1} B^{\beta_1} = B^2, \quad \text{ce qui est un carré parfait,}$$

$$\mathscr{F}_6 = -A^{\beta}_{\beta_1} B^{\alpha_1} B^{\beta_1} = -A(B)^2.$$

Pour $p = 2$

$$\mathscr{F}_8 = A^{\alpha_1}_{\alpha_2} B^{\alpha_2} A^{\beta_1}_{\beta_2} B^{\beta_2} = (AB)^2, \text{ ce qui un carré parfait,}$$

$$\mathscr{F}_{10} = A^{\beta}_{\beta_1} A^{\alpha_1}_{\alpha_2} B^{\alpha_2} A^{\beta_1}_{\beta_2} B^{\beta_2} = (-A)^3 (B)^2.$$

Pour p arbitraire

$$\mathscr{F}_{4p} = [(A)^{p-1} B]^2, \quad \text{ce sont des carrés parfaits,}$$

$$\mathscr{F}_{4p+2} = -A^{2p-1} B^2.$$

2. $m = n-2$: Nous avons les 6 formes indépendantes suivantes:

$$a \stackrel{\text{df}}{=} A_{n-1}^{n-1}, \quad c \stackrel{\text{df}}{=} A_{n-1}^{n}, \quad e \stackrel{\text{df}}{=} B^{n-1},$$

$$b \stackrel{\text{df}}{=} A_{n}^{n-1}, \quad d \stackrel{\text{df}}{=} A_{n}^{n}, \quad f \stackrel{\text{df}}{=} B^{n}$$

et

$$\mathcal{F}_4 = g_{\alpha_1\beta_1} = B^{\alpha_1}B^{\beta_1} = g_{n-1,n-1}e^2 + 2g_{n-1,n}ef + g_{nn}f^2,$$

$$\mathcal{F}_6 = -g_{n-1,n-1}e(ae+bf) + g_{n-1,n}\{e(ce+df) + \\ +f(ae+bf) + g_{n,n}f(ce+df),$$

$$\mathcal{F}_8 = g_{n-1,n-1}(ae+bf)^2 + 2g_{n-1,n}(ae+bf)(ce+df) + \\ + g_{nn}(ce+df)^2.$$

En général, on peut écrire

$$\mathcal{F}_{4p} = g_{n-1,n-1}\mathcal{A}^2 + 2g_{n-1,n}\mathcal{A}\mathcal{B} + g_{nn}\mathcal{B}^2,$$

où

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{df}}{=} A_{\alpha_2}^{n-1}A_{\alpha_3}^{\alpha_2}\dots A_{\alpha_p}^{\alpha_{p-1}}B^{\alpha_p}, \qquad \mathcal{B} \stackrel{\text{df}}{=} A_{\alpha_2}^{n}A_{\alpha_3}^{\alpha_2}\dots A_{\alpha_p}^{\alpha_{p-1}}B^{\alpha_p}.$$

Sous la condition supplémentaire

$$g_{n-1,n-1}g_{nn} > 0, \quad g_{n-1,n} = \mathcal{E}\sqrt{g_{n-1,n-1}g_{nn}}; \quad \mathcal{E} = \pm 1$$

les formes $\mathcal{F}_{4p}$ sont des carrés parfait,

$$\mathcal{F}_{4p} = [\sqrt{|g_{n-1,n-1}|}\mathcal{A} + \mathcal{E}\sqrt{|g_{n,n}|}\mathcal{B}]^2.$$

Chapitre II

Généralisation du théorème de Meusnier pour les courbures d'ordre arbitraire dans l'espace Riemannien

La généralisation du théorème de Meusnier qui a été présentée plus haut, s'appelle le théorème de Meusnier pour la première courbure (d'après Mayer–Duschek) parce que nous avons considéré seulement la projection du vecteur $\underset{1}{k}\,\underset{1}{t}$ de toutes les courbes ayant la même tangente au point commun M sur N_{n-m}.

Dans ce chapitre, en utilisant la généralisation du théorème de Meusnier, donnée par Mayer et Duschek [1] (²) pour des surfaces plongées dans les espaces euclidiens, nous généraliserons encore ce théorème pour

(²) Dans la monographie *Lehrbuch der Differentialgeometrie* — Leipzig und Berlin 1930 (p. 233–237) — Mayer et Duschek ont présenté une méthode de généralisation du théorème de Meusnier pour une surface à m-dimensions ($m \leqslant n-1$) pour la première et deuxième courbure d'une courbe tracée sur cette surface.

A l'aide de l'induction mathématique nous pouvons démontrer ce théorème pour les courbures d'ordre arbitraire.

les courbures d'ordre supérieur dans les espaces riemanniens par une méthode analogue à celle du premier chapitre.

Nous considérons les courbes qui n'ont pas seulement une même tangente, mais encore une même normale première, seconde, ..., r-ième.

4. Généralisation du théorème de Meusnier pour la deuxième courbure. Comme nous l'avons vu, le vecteur $\underset{1e}{t}$ (1.8b, section 1) ne dépend que du point M et du vecteur tangent $\underset{0}{t}$, car, on peut le choisir comme élément de base $\{\underset{a}{i}\}$ de l'espace N_{n-m}. Posons $\underset{m+1}{i} \overset{*}{=} \underset{1e}{t}$.

Désignons par N_{n-m-1} le sous-espace (de l'espace N_{n-m}) normal à $\underset{1e}{t}$, tendu par $(n-m-1)$ vecteurs $\{\underset{a^{(1)}}{i}\}$ $(a^{(1)} = m+2, \dots, n)$. On peut donc écrire

$$N_{n-m} = N_{n-m-1} \oplus \underset{1e}{t}.$$

Désignons l'espace vectoriel $T_M(F_m) \oplus \underset{1e}{t}$ par $T_M^{(1)}(F_m)$ et l'ensemble des vecteurs $\{\underset{h^{(1)}}{i}\}$ $(h^{(1)} = 1, 2, \dots, m+1)$ est sa base.

L'espace $T_M^{(1)}(F_m)$ et N_{n-m-1} sont définis complètement par M et $\underset{0}{t}$.

Nous avons maintenant un nouveau repère $\{\underset{h^{(1)}}{i}, \underset{a^{(1)}}{i}\}$ (où $\underset{\lambda}{i}$, $\lambda = 1, \dots, n$) et on peut écrire

$$\underset{1}{t} = t^{h^{(1)}} \underset{h^{(1)}}{i}. \tag{4.1}$$

Ainsi

$$\frac{D}{ds}\underset{1}{t} = \left[\frac{d}{ds}\underset{1}{t}^{h^{(1)}} + \begin{Bmatrix} h^{(1)} \\ h_1^{(1)} \quad h_1 \end{Bmatrix} \underset{1}{t}^{h_1^{(1)}} \frac{dx^{h_1}}{ds}\right] \underset{h}{i} + \begin{Bmatrix} a^{(1)} \\ h_1^{(1)} \quad h_1 \end{Bmatrix} \underset{1}{t}^{h^{(1)}} \frac{dx^{h_1}}{ds} \underset{a^{(1)}}{i} \tag{4.2}$$

$$(h_1^{(1)} = 1, \dots, m+1).$$

De même que plus haut (lemme 1, section 1), nous pouvons démontrer que $\begin{Bmatrix} a^{(1)} \\ h^{(1)} \quad h \end{Bmatrix}$ *est un tenseur; il en déconte que*

$$(4.3)\quad \begin{aligned} &\text{(a)} \qquad \underset{2g^{(1)}}{t} \overset{\mathrm{df}}{=} \left[\frac{d}{ds}\underset{1}{t}^{h^{(1)}} + \begin{Bmatrix} h^{(1)} \\ h_1^{(1)} \quad h_1 \end{Bmatrix} \underset{1}{t}^{h^{(1)}} \frac{dx^h}{ds}\right] \underset{h^{(1)}}{i}, \\ &\text{(b)} \qquad \underset{2e^{(1)}}{t} \overset{\mathrm{df}}{=} \left[\begin{Bmatrix} a^{(1)} \\ h^{(1)} \quad h_1 \end{Bmatrix} \underset{1}{t}^{h^{(1)}} \frac{dx^{h_1}}{ds}\right] \underset{a^{(1)}}{i} \end{aligned}$$

sont des vecteurs contravariants. $\underset{2g^{(1)}}{t}$ et $\underset{2e^{(1)}}{t}$ sont respectivement les projections du même vecteur $\dfrac{D}{ds}\underset{1}{t}$ sur $T_M(F_m)$ et sur N_{n-m-1}.

En faisant appel au théorème de Frenet $\left(\dfrac{D}{ds}\underset{1}{t} = -\underset{1}{k}\underset{0}{t}+\underset{2}{k}\underset{2}{t}\right)$ et en remarquant que le vecteur $\underset{0}{t}$ appartient à $T_M(F_m) \subset T_M^{(1)}(F_m)$, on en conclut que sa projection sur N_{n-m-1} s'annule ou bien que $\underset{2e^{(1)}}{t}$ est une projection du vecteur $\underset{2}{k}\underset{2}{t}$ sur l'espace N_{n-m-1}. En vertu de (4.3b) on voit que $\underset{2e^{(1)}}{t}$ ne dépendent que de M, $\underset{0}{t}$, $\underset{1}{t}$.

Nous pouvons donc énoncer le:

THÉORÈME 2 (généralisation du théorème de Meusnier pour la deuxième courbure). (a) *La projection du vecteur* $\underset{2}{k}\underset{2}{t}$ *sur l'espace normal* N_{n-m-1} *est la même pour toutes les courbures ayant la même tangente* $\underset{0}{t}$ *et la même première normale* $\underset{1}{t}$ *au point commun* M *sur la variété* E_m *plongée dans* V_n $(m \leqslant n-2)$.

(b) *En même temps on obtient une forme du deuxième degré dont les coefficients sont des fonctions de* M, $\underset{0}{t}$, $\underset{1}{t}$,

$$\mathscr{F}_2^{(1)} = g_{\alpha^{(1)}\beta^{(1)}} \begin{Bmatrix} \alpha^{(1)} \\ h_1^{(1)} \;\; h_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta^{(1)} \\ k_1^{(1)} \;\; k_1 \end{Bmatrix} \underset{1}{t}^{h^{(1)}} \underset{1}{t}^{k^{(1)}} dx^{h_1} dx^{h_1}. \tag{4.4}$$

Ensuite on constate que la dérivée absolute du vecteur $\underset{2e^{(1)}}{t}$ par rapport à s est

$$\frac{d}{ds}\underset{2e^{(1)}}{t} = \underset{3g^{(1)}}{t} + \underset{3e^{(1)}}{t}, \tag{4.5}$$

où

$$\text{(a)} \qquad \underset{3g^{(1)}}{t} \overset{\text{df}}{=} \left[\begin{Bmatrix} h^{(1)} \\ \alpha_1^{(1)} \;\; h_1 \end{Bmatrix} \underset{2e^{(1)}}{t}^{\alpha_1^{(1)}} dx^{h_1}\right] \underset{h^{(1)}}{i},$$

$$(4.6)$$

$$\text{(b)} \qquad \underset{3e^{(1)}}{t} \overset{\text{df}}{=} \left[\frac{d}{ds}\underset{2e^{(1)}}{t}^{\alpha^{(1)}} + \begin{Bmatrix} \alpha^{(1)} \\ \alpha_1^{(1)} \;\; h_1 \end{Bmatrix} \underset{2e^{(1)}}{t}^{\alpha_1^{(1)}} \frac{dx^{h_1}}{ds}\right] \underset{\alpha^{(1)}}{i}$$

sont deux vecteurs contravariants. Ce sont les projections du vecteur $\dfrac{D}{ds}\underset{2e^{(1)}}{t}$ respectivement sur $T_M^{(1)}(F_m)$ et N_{n-m-1}.

D'après (4.3b) et (4.6a) on voit que $\underset{3g^{(1)}}{t}$ ne dépend que de M, $\underset{0}{t}$, $\underset{1}{t}$. En outre nous avons

$$\left|\underset{3g^{(1)}}{t}\right|^2 = g_{h^{(1)}k^{(1)}} \begin{Bmatrix} h^{(1)} \\ \alpha^{(1)} \;\; h_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k^{(1)} \\ \beta^{(1)} \;\; k_1 \end{Bmatrix} \underset{2e^{(1)}}{t}^{\alpha^{(1)}} \underset{2e^{(1)}}{t}^{\beta^{(1)}} \frac{dx^{h_1}dx^{k_1}}{ds^2}. \tag{4.7}$$

En remplaçant

$$\underset{2e^{(1)}}{t}^{\alpha^{(1)}} \text{ par } \begin{Bmatrix} \alpha^{(1)} \\ h_2^{(1)} \;\; h_2 \end{Bmatrix} \underset{1}{t}^{h_2^{(1)}} \frac{dx^{h_2}}{ds}, \qquad \underset{2e^{(1)}}{t}^{\beta^{(1)}} \text{ par } \begin{Bmatrix} \beta^{(1)} \\ k_2^{(1)} \;\; k_2 \end{Bmatrix} \underset{1}{t}^{k_2^{(1)}} \frac{dx^{k_2}}{ds}$$

dans (4.7) nous obtenons le

THÉORÈME 3. (a) *La projection du vecteur* $\dfrac{D}{ds}\underset{2e^{(1)}}{t}$ *sur l'espace* $T_M^{(1)}(E_m)$ *est la même pour toutes les courbes ayant la même tangente* $\underset{0}{t}$ *et la même première normale* $\underset{1}{t}$ *au point* M.

(b) *Nous obtenons une forme différentielle du quatrième degré dont les coefficients sont des fonctions de* M, $\underset{0}{t}$, $\underset{1}{t}$,

(4.8)

$$\mathscr{F}_4^{(1)} = g_{h^{(1)}k^{(1)}} \begin{Bmatrix} h^{(1)} \\ \alpha^{(1)}\ \ h^{(1)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k^{(1)} \\ \beta^{(1)}\ \ k_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha^{(1)} \\ h_1^{(1)}\ \ h_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta^{(1)} \\ k_1\ \ k_2 \end{Bmatrix} \underset{1}{t}^{h_1^{(1)}} \underset{1}{t}^{k_1^{(1)}}\, dx^{h_1} dx^{h_2} dx^{k_1} dx^{k_2}.$$

D'une façon analogue on obtient à l'aide de l'induction mathématique:

THÉORÈME 4 (a) *La projection du vecteur* $\dfrac{D}{ds}\underset{2p,e^{(1)}}{t}$ [3] *sur* $T_M^{(1)}(F_m)$ *est la même pour toutes les courbes (de classe* C^l $(l \geqslant 2p+2)$*) ayant la même tangente* $\underset{0}{t}$ *et la même première normale* $\underset{1}{t}$ *(où* p *est un nombre naturel arbitraire* $\geqslant 1$*).*

(b) *La projection du vecteur* $\dfrac{D}{ds}\underset{2p+1,g^{(1)}}{t}$ *sur* N_{n-m-1} *est la même pour toutes les courbes (de classe* C^l $(l \geqslant 2p+3)$*) ayant la même tangente* $\underset{0}{t}$ *et la même première normale* $\underset{1}{t}$.

(c) *On a*

$$\mathscr{F}_{4p-2}^{(1)} = g_{\alpha_1^{(1)}\beta_1^{(1)}} \begin{Bmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ h_1^{(1)}\ \ h_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)}\ \ h_2 \end{Bmatrix} \cdots \begin{Bmatrix} \alpha_{p-1}^{(1)} \\ h_{p-1}^{(1)}\ \ h_{2p-3} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} h_{p-1}^{(1)} \\ \alpha_p^{(1)}\ \ h_{2p-2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_p^{(1)} \\ h_p^{(1)}\ \ h_{2p-1} \end{Bmatrix} \times$$
$$\times \begin{Bmatrix} \beta^{(1)} \\ k_1^{(1)}\ \ k_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} h^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)}\ \ k_2 \end{Bmatrix} \cdots \begin{Bmatrix} \alpha_{p-1}^{(1)} \\ k_{p-1}^{(1)}\ \ k_{2p-3} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{p-1}^{(1)} \\ \beta_p^{(1)}\ \ k_{2p-2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_p^{(1)} \\ k^{(1)}\ \ k_{2p-1} \end{Bmatrix} \underset{1}{t}^{h_p^{(1)}} \underset{1}{t}^{k_p^{(1)}}\, dx^{h_1} \ldots$$
(4.9)
$$\ldots dx^{h_{2p-1}} dx^{k_1} \ldots dx^{k_{2p-1}},$$

$$\mathscr{F}_{4p} = g_{h^{(1)}k^{(1)}} \begin{Bmatrix} h_1 \\ \alpha_1^{(1)}\ \ h_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k^{(1)} \\ \beta_1^{(1)}\ \ k_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ h_1^{(1)}\ \ h_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} h^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)}\ \ h_3 \end{Bmatrix} \cdots$$
$$\cdots \begin{Bmatrix} \alpha_{p-1}^{(1)} \\ h_{p-1}^{(1)}\ \ h_{2p-2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} h_{p-1}^{(1)} \\ \alpha_p^{(1)}\ \ h_{2p-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_p^{(1)} \\ h_p^{(1)}\ \ h_{2p} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1^{(1)} \\ k^{(1)}\ \ k_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k^{(1)} \\ \beta_2^{(1)}\ \ k_3 \end{Bmatrix} \cdots$$
$$\cdots \begin{Bmatrix} \beta_{p-1}^{(1)} \\ k_{p-1}^{(1)}\ \ k_{2p-2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k_{p-1}^{(1)} \\ \beta_p^{(1)}\ \ k_{2p-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_p^{(1)} \\ k_p^{(1)}\ \ k_{2p} \end{Bmatrix} \underset{1}{t}^{h_p^{(1)}} \underset{1}{t}^{k_p^{(1)}}\, dx^{h_1} \ldots dx^{h_{2p}} dx^{k_1} \ldots dx^{k_{2p}}$$

---

[3] $\underset{2e^{(1)}}{t}$ est la projection du vecteur $\underset{2}{k}\,\underset{2}{t}$ sur N_{n-m-1} (4.3b), $\underset{3g^{(1)}}{t}$ est la projection du vecteur $\dfrac{D}{ds}\underset{2e^{(1)}}{t}$ sur $T_M^{(1)}(F_m)$, $\underset{4e^{(1)}}{t}$ est la projection du vecteur $\dfrac{D}{ds}\underset{3g^{(1)}}{t}$ sur N_{n-m-1}, ... et ainsi de suite.

où p: *nombre naturel arbitraire* $\geqslant 1$; $h_1^{(1)}, h_2^{(2)}, \ldots, k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \ldots = 1, \ldots \ldots, m+1$; $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \ldots, \beta_1^{(1)}, \beta_2^{(1)}, \ldots = m+2, \ldots, n$. *Ce sont des formes invariantes de cette variété* F_m *et d'une courbe tracée sur* F_m, *les coefficients de ces formes étant des fonctions de* $M, \underset{0}{t}, \underset{1}{t}$.

5. Formes indépendantes différentielles.

LEMME 2. *Pour* $k^{(1)}, h^{(1)}, = i, \ldots, m+1$; $\alpha^{(1)}, \beta^{(1)} = m+2, \ldots, n$, *les égalités suivantes*

$$g_{h^{(1)}k^{(1)}} \begin{Bmatrix} h^{(1)} \\ \alpha^{(1)} \quad h \end{Bmatrix} = -g_{\alpha^{(1)}\beta^{(1)}} \begin{Bmatrix} \beta^{(1)} \\ k^{(1)} \quad h \end{Bmatrix} \tag{5.1}$$

sont vraies aux points $M \in F_m$.

Démonstration. Comme $\underset{h^{(1)}}{i} \cdot \underset{\alpha^{(1)}}{i} = 0$ pour $\forall h^{(1)}$, $\forall \alpha^{(1)}$ nous avons

$$D \underset{h^{(1)}}{i} \cdot \underset{\alpha^{(1)}}{i} + \underset{h^{(1)}}{i} \cdot D \underset{\alpha^{(1)}}{i} = 0. \tag{5.2}$$

Comme plus haut (lemme 2, section 3) on a

$$(5.3) \quad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad D \underset{h^{(1)}}{i} = \begin{Bmatrix} \lambda \\ h^{(1)} \quad h_1 \end{Bmatrix} dx^{h_1} \cdot \underset{\lambda}{i}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, n, \\ &\text{(b)} \quad D \underset{\alpha^{(1)}}{i} = \begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha^{(1)} \quad h_1 \end{Bmatrix} dx^{h_1} \cdot \underset{\lambda}{i}. \end{aligned}$$

En substituant (5.3) dans (5.2) nous obtenons

$$\left[g_{\lambda\alpha^{(1)}} \begin{Bmatrix} \lambda \\ h^{(1)} \quad h_1 \end{Bmatrix} + g_{\lambda h^{(1)}} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha^{(1)} \quad h \end{Bmatrix} \right] dx^{h_1} = 0$$

(pour chaque direction dx^h sur F_m au point $M \in F_m$), et par suite

$$g_{\lambda\alpha^{(1)}} \begin{Bmatrix} \lambda \\ h^{(1)} \quad h_1 \end{Bmatrix} + g_{\lambda h^{(1)}} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \alpha^{(1)} \quad h_1 \end{Bmatrix} = 0.$$

Mais, comme $g_{h^{(1)}\alpha^{(1)}} = 0$, il s'ensuit que

$$g_{\alpha^{(1)}\beta^{(1)}} \begin{Bmatrix} \beta^{(1)} \\ h^{(1)} \quad h \end{Bmatrix} + g_{h^{(1)}k^{(1)}} \begin{Bmatrix} k^{(1)} \\ \alpha^{(1)} \quad h \end{Bmatrix} = 0$$

où bien nous avons (5.1).

En vertu du lemme (5.1) les formes (4.9) peuvent être mises sous la forme:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad \mathscr{F}^{(1)}_{4p-2} = g_{\alpha_1^{(1)}\beta_2^{(1)}} A^{\alpha_1^{(1)}}_{\alpha_2^{(1)}} \cdots A^{\alpha_{p-1}^{(1)}}_{\alpha_p^{(1)}} B^{\alpha_p^{(1)}} \cdot A^{\beta_1^{(1)}}_{\beta_2^{(1)}} \cdots A^{\beta_{p-1}^{(1)}}_{\beta_p^{(1)}} B^{\beta_p^{(1)}}, \\ &\text{(b)} \quad \mathscr{F}^{(1)}_{4p} \;\;\; = g_{\alpha_1^{(1)}\beta^{(1)}} A^{\beta^{(1)}}_{\beta_1^{(1)}} A^{\alpha_1^{(1)}}_{\alpha_2^{(1)}} \cdots A^{\alpha_{p-1}^{(1)}}_{\alpha_p^{(1)}} B^{\alpha_p^{(1)}} \cdot A^{\beta_1^{(1)}}_{\beta_2^{(1)}} \cdots A^{\beta_{p-1}^{(1)}}_{\beta_p^{(1)}} B^{\beta_p^{(1)}} \end{aligned}$$

où

$$(5.5)\quad \begin{aligned} &\text{(a)} \qquad A^{\alpha^{(1)}}_{\beta^{(1)}} \overset{\text{df}}{=} \begin{Bmatrix} \alpha^{(1)} \\ h^{(1)}\ \ h \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} h^{(1)} \\ \beta^{(1)}\ \ k \end{Bmatrix} dx^h dx^k, \\ &\text{(b)} \qquad B^{\alpha^{(1)}} \overset{\text{df}}{=} \begin{Bmatrix} \alpha^{(1)} \\ h^{(1)}\ \ h \end{Bmatrix} \underset{1}{t}^{h^{(1)}} dx^h, \end{aligned}$$

$A^{\alpha^{(1)}}_{\beta^{(1)}}$ sont des formes quadratiques différentielles, $B^{\alpha^{(1)}}$ des formes différentielles linéaires. Leurs coefficients sont des fonctions de M, $\underset{0}{t}$, $\underset{1}{t}$.

Nous voyons qu'il y a $(n-m-1)^2$ formes $A^{\alpha^{(1)}}_{\beta^{(1)}}$ et $(n-m-1)$ formes $B^{\alpha^{(1)}}$.

Donc *nous avons au plus* $(n-m-1)\,(n-m)$ *formes indépendantes.*

Enfin nous pouvons énoncer le

THÉORÈME 5. *A partir de la généralisation du théorème de Meusnier pour les variétés F_m plongées dans l'espace riemannien V_n $(m \leqslant n-2)$ et pour la deuxième courbure d'une courbe on peut établir au plus $(n-m)$ $(n-m-1)$ formes différentielles indépendantes de degré pair $\mathscr{F}^{(1)}_{4p-2}$ et $F^{(1)}_{4p}$.*

Ces formes sont des combinaisons des formes quadratiques $A^{\alpha^{(1)}}_{\beta^{(1)}}$ et des formes linéaires $B^{\alpha^{(1)}}$. Leurs coefficients sont des fonctions de M, $\underset{0}{t}$, $\underset{1}{t}$.

6. Théorème de Meusnier pour une courbure quelconque. A l'aide de l'induction mathématique nous pouvons généraliser le théorème de Meusnier pour une corbure d'ordre quelconque.

Supposons que les théorèmes de Meusnieraient été démontrés jusqu'à la r-ième courbure, c'est-à-dire que la projection du vecteur $\underset{a}{k}\,\underset{a}{t}$ sur le sous-espace $N_{n-m-(a-1)}$ soit la même pour toutes les courbes ayant la même tangente $\underset{0}{t}$ et la même normale première, deuxième, ..., $(a-1)$-ième $\underset{1}{t}, \underset{2}{t}, \ldots, \underset{a-1}{t}$ au point commun M (pour $\forall a = 1, \ldots, r$).

Autrement dit les sous-espaces normaux $N_{n-m-(r-1)}$ et $T^{(r)}_M(F_m)$ ont été formés de la manière suivante:

1) $T_M(F_m)$ et N_{n-m} sont les espaces vectoriels respectivement tangents et normaux à la variété F_m au point M.

2) $T^{(1)}_M(F_m)$ et N_{n-m-1} ils sont définis au section 4.

3) En désignant la projection du vecteur $\underset{2}{k}\,\underset{2}{t}$ de la courbe sur N_{n-m-1} par $\underset{2e^{(1)}}{t}$ et en vertu du théorème 2a (section 4) on voit que $\underset{2e^{(1)}}{t}$ ne dépend que de M, $\underset{0}{t}$, $\underset{1}{t}$. Par suite on peut prendre $\underset{2e^{(1)}}{t}$ comme $\underset{m+2}{i}$:

$$(6.1) \qquad \underset{m+2}{i} \overset{\text{df}}{=} \underset{2e^{(1)}}{t},$$

d'où l'ensemble $\underset{\alpha^{(1)}}{i}$ $(\alpha^{(1)} = m+2, \ldots, n)$ est une base de N_{n-m-1}.

Désignons par $T_M^{(2)}(F_m)$ l'espace à $(m+1)$ dimensions $T_M^{(1)} \oplus \underset{m+2}{i}$

(6.2) $$T_M^{(1)}(F_m) \overset{\mathrm{df}}{=} F_M^{(2)}(F_m) + \underset{m+2}{i}\,.$$

Désignons par N_{n-m-2} le sous-espace (de N_{n-m-1}), qui est normal au vecteur $\underset{m+2}{i}$

(6.3) $$N_{n-m-1} = N_{n-m-2} \oplus \underset{m+2}{i}\,.$$

L'ensemble des $(n-m-2)$ vecteurs $\{\underset{a^{(2)}}{i}\}$, $a^{(2)} = m+3, \ldots, n$ forme une base de N_{n-m-2}.

Les espaces N_{n-m-2} et $T_M^{(2)}(F_m)$ sont complètement définis par M, $\underset{0}{t}$, $\underset{1}{t}$.

Démontrons que la proposition, supposée vraie pour la r-ième courbure, l'est aussi pour la $(r+1)$-ième courbure.

En effet, d'après l'hypothèse précédente, la projection du vecteur $\underset{r}{k}\underset{r}{t}$ sur $N_{n-m-(r-1)}$ (que nous désignons par $\underset{r,e^{(r-1)}}{t}$) ne dépend que de M, $\underset{0}{t}, \underset{1}{t}, \ldots, \underset{r-1}{t}$ (4). Par suite on peut le choisir comme $\underset{m+r}{i}$.

Désignons par N_{n-m-r} le sous-espace (de l'espace $N_{n-m-(r-1)}$ normal au $\underset{r,e^{(r-1)}}{t}$, qui est tendu par $(n-m-r)$ vecteurs $\underset{a^{(r)}}{i}$ $(a^{(r)} = m+r+1, \ldots, n)$

(6.4) $$N_{n-m-(r-1)} = N_{n-m-r} \oplus \underset{m+r}{i}\,.$$

Désignons l'espace $T_M^{(r-1)}(F_m) + \underset{m+r}{i}$ à $(m+r)$-dimensions par $T_M^{(r)}(F_m)$ qui possède une base $\{\underset{h}{i^{(r)}}\}$ $(h^{(r)} = 1, 2, \ldots, m+r)$.

Les espaces $T_M^{(r)}$ et N_{n-m-r} sont complètement définis par M, $\underset{0}{t}, \ldots, \underset{r-1}{t}$.

Un nouveau repère au point M est $\{\underset{h^{(r)}}{i}, \underset{a^{(r)}}{i}\}$. On peut écrire

(6.5) $$\underset{r}{t} = \underset{r}{t}^{h^{(r)}} \underset{h^{(r)}}{i}\,.$$

La dérivation absolue du vecteur $\underset{r}{t}$ rapport à s donne

(6.6) $$\frac{D}{ds}\underset{r}{t} = \underset{r+1,g^{(r)}}{t} + \underset{r+1,e^{(r)}}{t}$$

où

(6.7)

(a) $$\underset{r+1,g^{(r)}}{t} \overset{\mathrm{df}}{=} \left[\frac{d}{ds}\underset{r}{t}^{h^{(r)}} + \left\{ {h^{(r)} \atop h_1^{(r)}\ h_1} \right\} \underset{r}{t}^{h_1^{(r)}} \frac{dx^{h_1}}{ds}\right] \underset{h^{(r)}}{i},$$

(b) $$\underset{r+1,e^{(r)}}{t} \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{ {a_1^{(r)} \atop h_1^{(r)}\ h_1} \right\} \underset{r}{t}^{h^{(r)}} \frac{dx^{h_1}}{ds} \underset{a^{(r)}}{i}\,.$$

---

(4) Nous désignons la première, deuxième, ..., r-ième normale d'une courbe $\mathscr{C}$ au point M respectivement par $\underset{1}{t}, \underset{2}{t}, \ldots, \underset{r}{t}$.

On peut démontrer que $\underset{r+1,g^{(r)}}{t}$ et $\underset{r+1,e^{(r)}}{t}$ sont des vecteurs contravariants. Ce sont les projections d'un même vecteur $\dfrac{Dt}{ds^r}$ respectivement sur $T_M^{(r)}(F_m)$ et N_{n-m-r}.

En vertu du théorème de Frenet et on tenant compte de ce que $\underset{r-1}{t} \in T_M^{(r-1)}(F_m) \subset T_M(F_m)$, on voit que la projection du vecteur $\underset{r-1}{t}$ sur $T_M^{(r)}(F_m)$ s'annule; il s'ensuit que $\underset{r+1,e^{(r)}}{t}$ est justement la projection du vecteur $\underset{r+1}{k}\ \underset{r+1}{t}$ sur l'espace N_{n-m-r}. En outre nous obtenons d'après (6.7b):

La projection du vecteur $\underset{r+1}{k}\ \underset{r+1}{t}$ sur l'espace normal N_{n-m-r} est la même pour toutes les courbes avant la même tangente $\underset{0}{t}$, la même courbure première, deuxième, $\ldots$, r-ième $(\underset{1}{t}, \underset{2}{t}, \ldots, \underset{r}{t})$ au point commun $M \in F_m$ plongée dans V_n $(r \leqslant n-m-1)$.

Le théorème pour la première deuxième courbure et la proposition plus haut, ayant été déjà établis, le théorème de Meusnier pour une courbure d'orde arbitraire se trouve ainsi démontré d'une façon générale.

En même temps nous obtenons au plus $(n-m-r)\ (n-m-r+1)$ formes différentielles indépendantes de degré pair. Ces formes peuvent être écrites sous la forme suivante.

$$(6.8)\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad \mathscr{F}^{(r)}_{4p-2} = g_{\alpha_1^{(r)}\beta_1^{(r)}}\, A^{\alpha_1^{(r)}}_{\alpha_2^{(r)}} \cdots A^{\alpha_{p-1}^{(r)}}_{\alpha_p^{(r)}}\, B^{\alpha_p^{(r)}}\, A^{\beta_1^{(r)}}_{\beta_2^{(r)}} \cdots A^{\beta_{p-1}^{(r)}}_{\beta_p^{(r)}}\, B^{\beta_p^{(r)}}, \\ &\text{(b)}\quad \mathscr{F}^{(r)}_{4p} = -g_{\alpha_1^{(r)}\beta^{(r)}}\, A^{\beta^{(r)}}_{\beta_1^{(r)}}\, A^{\alpha_1^{(r)}}_{\alpha_2^{(r)}} \cdots A^{\alpha_{p-1}^{(r)}}_{\alpha_p^{(r)}}\, B^{\alpha_p^{(r)}}\, A^{\beta_1^{(r)}}_{\beta_2^{(r)}} \cdots A^{\beta_{p-1}^{(r)}}_{\beta_p^{(r)}}\, B^{\beta_p^{(r)}} \end{aligned}$$

(p: nombre naturel arbitraire $\geqslant 1$) où

$$(6.9)\quad \begin{aligned} &\text{(a)}\quad A^{\alpha^{(r)}}_{\beta^{(r)}} \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{\begin{matrix} \alpha^{(r)} \\ h^{(r)}\ \ h \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} h^{(r)} \\ \beta^{(r)}\ \ k \end{matrix}\right\} dx^h dx^k, \\ &\text{(b)}\quad B^{\alpha^{(r)}} \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{\begin{matrix} \alpha^{(r)} \\ h^{(r)}\ \ h \end{matrix}\right\} \underset{r}{t}^{h^{(r)}} dx^h, \end{aligned}$$

$A^{\alpha^{(r)}}_{\beta^{(r)}}$ sont des formes différentielles quadratiques, $B^{\alpha^{(r)}}$ des formes différentielles linéaires. Leurs coefficients sont des fonctions de M, $\underset{0}{t}, \ldots, \underset{r}{t}$.

Bibliographie

[1] A. Duschek et W. Mayer, *Lehrbuch der Differentialgeometrie*, Tom II, Leipzig und Berlin 1930.
[2] J. Favard; *Théorème de Meusnier pour les variétés immergées dans les espaces de Riemann*, Communication au Congrès des Mathématiciens Roumains Bucarest, mai–juin 1956.
[3] S. Gołąb, *Rachunek tensorowy*, Warszawa 1966.
[4] M. Kucharzewski, *Elementy teorii obiektów geometrycznych*, Katowice 1969.
[5] J. A. Schouten und D. J. Struik, *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*, Vol. I, Groningen 1935.

Reçu par la Rédaction le 1. 6. 1971