ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIII (1963)

Об одном методе построения сопряжённых граничных задач

Б. Лаврук (Варшава)

В этой заметке дается построение формально сопряжённых граничных задач для некоторых задач с косой производной в граничном условии для систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа.

§ 1. Пусть в n-мерном пространстве точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ имеется допустимая область V с границей S, являющейся трижды непрерывно дифференцируемым многообразием. В дальнейшем через $\nu(y) = (\nu_1(y), \ldots, \nu_n(y))$ обозначается единичный вектор внутренней нормали к S в точке $y = (y_1, \ldots, y_n) \in S$.

Далее рассматривается дифференциальный оператор

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + A(x), \tag{1}$$

коэффициенты которого действительные функциональные матрицы порядка p, определенные и непрерывные в некоторой области $D \supset (V \cup S)$. Предполагается, что в этой области матрицы $A_i(x)$ один раз, а матрицы $A_{ij}(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы ($i, j = 1, \ldots, n$). Оператор (1) эллиптического в D типа: для всякой ненулевой действительной точки $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $x \in D$, $\det \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) a_i a_j \neq 0$.

Кроме того, будет рассматриваться, например, дифференциальный оператор

$$B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i=1}^{n} B_i(y) \frac{\partial}{\partial x_i} + B(y) \tag{2}$$

с коэффициентами — действительными функциональными порядка p матрицами, определёнными и непрерывными на S. Относительно матрицы $\mathcal{B}(y) = (B_1(y), \ldots, B_n(y))$ предполагается, что она непрерывно дифференцируема на S и, что $\det \sum_{i=1}^{n} B_i(y)\nu_i(y) \neq 0$, $y \in S$; поэтому не ограничивая общности, будет предполагаться, что

$$\sum_{i=1}^{n} B_i(y)\nu_i(y) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(y)\nu_i(y)\nu_j(y)\,, \qquad y \in S\,.$$

Оператор $\left(A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right.$ составленный из двух дифференциальных операторов (1) и (2) будет называться оператором исследуемой граничной задачи. Здесь он будет применяться к действительным функциональным матрицам $u(x)$ высоты p, непрерывным в $V \cup S$ и дважды непрерывно дифференцируемым в V, для которых существует равномерный относительно $y \in V$ предел

$$\lim_{x \to y} \sum_{i=1}^{n} B_i(y) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \tag{3}$$

при стремлении точки $x \in V$ к точке $y \in S$ по нормали $\nu(y)$, обозначаемый в дальнейшем $\sum_{i=1}^{n} B_i(y)\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}$. В связи с этим предел $\lim_{x\to y} B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)$ будет обозначаться $B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)$.

Определяя скалярное произведение двух пар действительных функциональных матриц $(\Phi(x), \varphi(y))$ и $(\Psi(x), \psi(y))$, $x \in V$, $y \in S$, следующим образом

$$\left[(\Phi(x), \varphi(y)), (\Psi(x), \psi(y))\right] = \int_V \Phi^*(x)\Psi(x)\,dx + \int_S \varphi^*(y)\psi(y)\,dS$$
$$(dx = dx_1 \ldots dx_n)$$

где для матриц M^* обозначает транспонированную матрицу M, можно придти к заключению, что построение формально сопряжённого оператора граничной задачи к оператору $\left(A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$ сводится к построению соответствующей формулы Грина.

Например, оператор граничной задачи

$$\left(A^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^*(y)\nu_j(y)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial A_{ij}^*(y)}{\partial y_i}\nu_j(y) + \sum_{i=1}^{n} A_i^*(y)\nu_i(y)\right),$$

где $A^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ обозначает оператор сопряжённый по Лагранжу оператором (1), является формально сопряжённым с оператором

$$\left(A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(y)\nu_j(y)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

ввиду известной формулы Грина

$$\int_V v^*(x)A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)\,dx+\int_S v^*(y)\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(y)\nu_j(y)\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}\,dS=$$

$$=\left\{\int_V u^*(x)A^*\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\,dx+\int_S u^*(y)\Big[\sum_{i,j=1}^n A^*_{ij}(y)\nu_j(y)\frac{\partial v(y)}{\partial y_i}+\right.$$

$$\left.+\Big(\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial A^*_{ij}(y)}{\partial y}\nu_j(y)-\sum_{i=1}^n A^*_i(y)\nu_i(y)\Big)v(y)\Big]\,dS\right\}^*.$$

Аналогично оператор $\left(\Delta,\frac{\partial}{\partial \nu}\right)$ является самосопряжённым (Δ- оператор Лапласа).

Для задач теории упругости известны формулы Бэтти (см. например [1]). Общую формулу Грина для одного уравнения получили М. Пиконе и К. Миранда в [2]. Здесь при сделанных предположениях будет указана формула Грина для оператора $\left(A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right),B\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$ иным путем.

Теорема 1. *Оператором формально сопряженным к оператору* $\Big(A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right),$ $B\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)\Big)$ *является оператор вида* $\left(A^*\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right),B^*\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$, *где* $A^*\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — *оператор, сопряжённый по Лагранжу с* $A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$, *а*

$$B^*\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{i=1}^n\widetilde{B}_i(y)\frac{\partial}{\partial x_i}+\widetilde{B}(y)\,;$$

коэффициенты $\widetilde{B}_i(y)$ *и* $B(y)$ *вычисляются по формулам*

$$\widetilde{B}_i(y)=2\sum_{j=1}^n A^*_{ij}(y)\nu_j(y)-B^*_i(y)\qquad(i=1,\dots,n),$$

$$\widetilde{B}(y)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial\Big\{A_{ij}(y)+\big[\sum_{k=1}^n A_{ik}(y)\nu_k(y)-B_i(y)\big]\nu_j(y)-\big[\sum_{k=1}^n A_{jk}(y)\nu_k(y)-B_j(y)\big]\nu_i(y)\Big\}^*}{\partial y_i}\times$$

$$\times\,\nu_j(y)-\sum_{i=1}^n A^*_i(y)\nu_i(y)+B^*(y)\,.$$

Для любой матрицы $u(x)$ с указанными выше свойствами и любой действительной матрицы $v(x)$ высоты p непрерывной в $V \cup S$ дважды непрерывно дифференцируемой в V, имеющей равномерный относительно $y \in S$ предел

$$\lim_{x \to y} \sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_i(y) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \tag{4}$$

при стремлении точки $x \in V$ к точке y по нормали $\nu(y)$, имеет место формула

$$\int_V v^*(x) A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x)\,dx + \int_S v^*(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(y)\,dS =$$
$$= \left[\int_V u^*(x) A^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) + \int_S u^*(y) B^*\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) v(y)\,dS\right]^*.$$

Доказательство. Непрерывно дифференцируемые вдоль S матрицы

$$Q_{ij}(y) = \Big[\sum_{k=1}^{n} A_{ik}(y)\nu_k(y) - B_i(y)\Big]\nu_j(y) - \tag{5}$$
$$-\Big[\sum_{k=1}^{n} A_{jk}(y)\nu_k(y) - B_j(y)\Big]\nu_i(y) \qquad (y \in S)$$

антисимметричны по индексам: $Q_{ij}(y) = -Q_{ji}(y)$. Поэтому выражение

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial Q_{ij}(y)}{\partial y_i}\nu_j(y) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left[\frac{\partial Q_{ij}(y)}{\partial y_i}\nu_j(y) - \frac{\partial Q_{ij}(y)}{\partial y_j}\nu_i(y)\right]$$

является суммой производных матриц $Q_{ij}(y), 1 \leqslant i < j \leqslant n$ в касательных к S направлениях.

Пусть $V_\varepsilon \subset V$ — область, ограниченная параллельной к S поверхностью S_ε (¹). Матрицы $B_i(y)$ можно определить на $S_{\varepsilon/2}$ снеся их значения с S на S_ε по общей нормали к этим поверхностям. Пусть $Q_{ij}(x)$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ — квадратные порядка p матрицы, непрерывные в $V_{\varepsilon/2} \cup S_{\varepsilon/2}$ дважды непрерывно дифференцируемые в $V_{\varepsilon/2}$, имеющие непрерывные вплоть до $S_{\varepsilon/2}$ производные по касательным к S направлениям и принимающие на $S_{\varepsilon/2}$ заданные значения (5) (при $1 \leqslant i < j \leqslant n$). Такие матрицы существуют, например, как решения задач Дирихле для оператора Лапласа с граничными условиями (5) на $S_{\varepsilon/2}$. Доопределив затем матрицы $Q_{ij}(x)$ на случай $i \geqslant j$ так

$$Q_{ij}(x) = -Q_{ji}(x) \quad (i > j), \quad Q_{ii}(x) = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n;\ x \in V \cup S),$$

(¹) Уравнение поверхности S_ε записывается: $y' = y + \varepsilon\nu(y)$, $y \in S$, $\varepsilon > 0$ достаточно малое число.

получают:

$$0 = v^*(x) \sum_{i,j=1}^{n} Q_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} - \left[u^*(x) \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 Q_{ij}^*(x) v(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right]^* =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[v^*(x) Q_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right] - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[u^*(x) \frac{\partial Q_{ij}^*(x) v(x)}{\partial x_j}\right]^* \qquad (x \in V_\varepsilon).$$

Вычитая из равенства

$$\int\limits_{V_\varepsilon} \left\{v^*(x) A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) - \left[u^*(x) A^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x)\right]^*\right\} dx =$$

$$= -\int\limits_{S_\varepsilon} \left\{v^*(y) \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(y) \nu_j(y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} - \left[u^*(y) \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^*(y) \nu_i(y) \frac{\partial v(y)}{\partial y_j} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + u^*(y) \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial A_{ij}^*(y)}{\partial y_i} \nu_j(y) - \sum_{i=1}^{n} A_i^*(y) \nu_i(y)\right) v(y)\right]^*\right\} dS$$

равенство

$$0 = \int\limits_{S_\varepsilon} \left\{- v^*(y) \sum_{i,j=1}^{n} Q_{ij}(y) \nu_j(y) \frac{\partial u(y)}{\partial y_i} + \right.$$

$$\left. + \left[u^*(y) \sum_{i,j=1}^{n} Q_{ij}^*(y) \nu_i(y) \frac{\partial v(y)}{\partial y_j} + u^*(y) \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial Q_{ij}^*(y)}{\partial y_j} \nu_i(y)\right]^*\right\} dS$$

и переходя к пределу сначала при $\varepsilon \to \varepsilon/2$, так как

$$\sum_{i=1}^{n} \big(A_{ij}(y) - Q_{ij}(y)\big) \nu_j(y) = B_i(y) \qquad (i = 1, \dots, n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \big(A_{ij}^*(y) - Q_{ij}^*(y)\big) \nu_i(y) = \widetilde{B}_j(y) \qquad (j = 1, \dots, n),$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \big(A_{ij}^*(y) + Q_{ij}^*(y)\big)}{\partial y_i} \nu_j(y) - \sum_{i=1}^{n} A_i^*(y) \nu_i(y) = \widetilde{B}(y) - B^*(y)$$

при $y \in S_{\varepsilon/2}$ получают:

$$\int\limits_{V_{\varepsilon/2}} \left\{v^*(x) A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) - \left[u^*(x) A^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x)\right]^*\right\} dx =$$

$$= -\int\limits_{S_{\varepsilon/2}} \left\{v^*(y) B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(y) - \left[u(y) B^*\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) v(y)\right]^*\right\} dS,$$

а затем, при $\varepsilon/2 \to 0$ ввиду равномерности пределов (3), (4) и аналогичных пределов для остальных матриц подинтегрального выращения в правой части последней формулы, а также совпадение нормалей $S_{\varepsilon/2}$ и S, получают окончательныю формулу:

$$(6)\quad \int\limits_V \left\{v^*(x)A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)-\left[u^*(x)A^*\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right]^*\right\}dx =$$
$$= -\int\limits_S \left\{v^*(y)B\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)u(y)-\left[u^*(y)B^*\left(y,\frac{\partial}{\partial y}\right)v(y)\right]^*\right\}dS .$$

Имеет место соотношение

$$\left(A^{**}\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right), B^{**}\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) = \left(A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right), B\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$$

— оператор граничной задачи сопряжённый к сопряжённому равен первоначальному. Действительно,

$$\tilde{\tilde{B}}_i(y) = 2\sum_{j=1}^{n}\tilde{A}^*_{ij}(y)\nu_j(y)-\tilde{B}^*_i(y) = B_i(y) \qquad (i=1,\dots,n),$$

$$A^*\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i,j=1}^{n}\tilde{A}_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}\tilde{A}_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+\tilde{A}(x) .$$

Далее, так как

$$\tilde{Q}_{ij}(y) = \left\{\sum_{k=1}^{n}\tilde{A}_{ik}(y)\nu_k(y)-\left[2\sum_{k=1}^{n}\tilde{A}_{ik}(y)\nu_k(y)-\tilde{B}_i(y)\right]\right\}\nu_j(y)-$$
$$-\left\{\sum_{k=1}^{n}\tilde{A}_{jk}(y)\nu_k(y)-\left[2\sum_{k=1}^{n}\tilde{A}_{jk}(y)\nu_k(y)-B_j(y)\right]\right\}\nu_i(y) =$$
$$= \left[\sum_{k=1}^{n}A^*_{jk}(y)\nu_k(y)-B^*_j(y)\right]\nu_i(y)-\left[\sum_{k=1}^{n}A^*_{ik}(y)\nu_k(y)-B^*_i(y)\right]\nu_j(y) = -Q^*_{ij}(y),$$

то

$$\tilde{\tilde{B}}(y) = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial\left(\tilde{A}^*_{ij}(y)+Q^*_{ij}(y)\right)}{\partial y_i}\nu_j(y)-\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{A}^*_i(y)\nu_i(y)+\tilde{B}^*(y) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial\left(A_{ij}(y)-Q_{ij}(y)\right)}{\partial y_i}\nu_j(y)-2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}(y)}{\partial y_i}\nu_j(y)+\sum_{i,j=1}^{n}A_i(y)\nu_i(y)+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial\left(A_{ij}(y)+Q_{ij}(y)\right)}{\partial y_i}\nu_j(y)-\sum_{i=1}^{n}A_i(y)\nu_i(y)+B(y) = B(y) .$$

Таким образом, $B^{**}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\tilde{B}}_i(y) \frac{\partial}{\partial x_i} + \tilde{\tilde{B}}(y) = B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)$. Соотношение $A^{**}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ общеизвестно.

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие: *Пусть $F(x)$ и $f(y)$ столбцы высоты p непрерывные в V и на S соответственно. Для того, чтобы граничная задача*

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = F(x) \qquad (x \in V),$$

$$\lim_{x \to y} B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = f(y) \qquad (y \in S)$$

рассматриваемая в классе столбцов $u(x)$ с указанными выше свойствами имела решение, необходимо чтобы

$$\left[\left(v(x), v(y)\right), \left(F(x), f(y)\right)\right] = \int_V v^*(x) F(x)\, dx + \int_S v^*(y) f(y)\, dS = 0$$

где $v(x)$ любое решение задачи

$$A^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) = 0 \qquad (x \in V),$$

$$\lim_{x \to y} B^*\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) = 0 \qquad (y \in S)$$

с указанными выше свойствами.

Формулу (6) можно также записать так:

$$\int_V v^*(x) A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x)\, dx - \int_S \left[B^*\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) v(y)\right]^* u(y)\, dS =$$

$$= \left\{\int_V u(x) A^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x)\, dx - \int_S \left[B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(y)\right]^* v(y)\, dS\right\}^*.$$

Оператор граничной задачи типа Дирихле $\left(A^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), -E\right)$, где E — единичная матрица порядка p, сопряжённый с оператором граничной задачи того же типа $\left(A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), -E\right)$ Этот последний будет оператором самосопряжённым, если оператор $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ самосопряжённый по Лагранжу, т. е., если

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} A_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \left(A(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i(x)}{\partial x_i}\right),$$

где

$$A_{ij}(x)=\overset{S}{A}_{ij}(x),\ A_i(x)=\overset{a}{A}_i(x)\quad (i,j=1,\ldots,n)\,,\qquad A(x)=\overset{S}{A}(x)\,.$$

Здесь и в дальнейшем для матриц под $\overset{S}{M}$ ($\overset{a}{M}$) понимают симметрическую (антисиметрическую) часть матрицы M.

Общий вид самосопряженного оператора $\left(A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right), B\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$ можно указать так:

1) оператор $A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ самосопряжённый по Лагранжу,

2) $$B\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}\overset{S}{A}_{ij}(y)\nu_j(y)+\overset{a}{B}_i(y)\right]\frac{\partial}{\partial x_i}+\overset{S}{B}(y)+$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial[\overset{a}{B}_i(y)\nu_j(y)-\overset{a}{B}_j(y)\nu_i(y)]}{\partial y_i}\nu_j(y)-\sum_{i=1}^{n}\overset{a}{A}_i(y)\nu_i(y)\right\}$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n}\overset{a}{B}_i(y)\nu_i(y)=0\right),$$

причём $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\overset{a}{A}_{ij}(y)}{\partial y_i}\nu_j(y)=0$ на S.

Действительно, в этом случае $B_i(y)=\sum_{i=1}^{n}\overset{a}{A}_{ij}(y)\nu_j(y)+B_i(y)$ и кроме того

$$\widetilde{B}(y)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial[\overset{a}{B}_i(y)\nu_j(y)-\overset{a}{B}_j(y)\nu_i(y)]}{\partial y_i}\nu_j(y)+\sum_{i=1}^{n}\overset{a}{A}_i(y)\nu_i(y)+\overset{S}{B}(y)-$$
$$-\frac{1}{2}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial[\overset{a}{B}_i(y)\nu_j(y)-\overset{a}{B}_j(y)\nu_i(y)]}{\partial y_i}\nu_j(y)-\sum_{i=1}^{n}\overset{a}{A}_i(y)\nu_i(y)\right\}=$$
$$=\overset{S}{B}(y)+\frac{1}{2}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial[\overset{a}{B}_i(y)\nu_j(y)-\overset{a}{B}_j(y)\nu_i(y)]}{\partial y_i}\nu_j(y)+\sum_{i=1}^{n}\overset{a}{A}_i(y)\nu_i(y)\right\}.$$

Для оператора $\left(A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right), B\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$ существует также аналог формулы

$$\int_V\left\{u(x)\Delta u(x)+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right]^2\right\}dx=-\int_S u(y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}\,dS\,.$$

Действительно, пусть матрицы $\overset{S}{Q}_{ij}(x)$ $(i,j=1,\ldots,n;\ x\in V\cup S)$ получены из матриц $\overset{S}{Q}_{ij}(y)$ $(1\leqslant i<j\leqslant n;\ y\in S)$ таким же образом, как в до-

казательстве теоремы 1 матрицы $\overset{S}{Q}_{ij}(x)$ $(i, j = 1, \ldots, n;\ x \in V \cup S)$ из матриц $Q_{ij}(y)$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n;\ y \in S)$. Так как $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u^*(x)\overset{S}{Q}_{ij}(x)u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ $(x \in V)$ то для столбца $u(x)$

$$(7)\qquad \int_S \Big[2u^*(y)\sum_{i,j=1}^{n} \overset{S}{Q}_{ij}(y)\nu_j(y)\frac{\partial u(y)}{\partial y_i} + u^*(y)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial \overset{S}{Q}_{ij}(y)}{\partial y_i}\nu_j(y)u(y)\Big]dS = 0\,.$$

Предполагая матрицы $\overset{a}{Q}_{ij}(y)$ продолженными на V с сохранением свойства непрерывной дифференцируемости и пользуясь формулой (7), из равенства

$$\int_{V_\varepsilon}\Big\{2u^*(x)A\Big(x, \frac{\partial}{\partial x}\Big)u(x) + 2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u^*(x)}{\partial x_i}A_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} +$$

$$+ 2u^*(x)\sum_{j=1}^{n}\Big[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \overset{a}{A}_{ij}(x)}{\partial x_i} - \overset{a}{A}_j(x)\Big]\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} - u^*(x)[A(x) + \widetilde{A}(x)]u(x)\Big\}dx =$$

$$= -\int_{S_\varepsilon}\Big\{2u^*(y)\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(y)\nu_j(y)\frac{\partial u(y)}{\partial y_i} -$$

$$- u^*(y)\Big[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}(y)}{\partial y_i}\nu_j(y) - \sum_{i=1}^{n}A_i(y)\nu_i(y)\Big]u(y)\Big\}dS$$

учитывая, что

$$\int_{S_\varepsilon}\Big[-2u^*(y)\sum_{i,j=1}^{n}\overset{a}{Q}_{ij}(y)\nu_j(y)\frac{\partial u(y)}{\partial y_i} - u^*(y)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial \overset{a}{Q}_{ij}(y)}{\partial y_i}\nu_j(y)u(y)\Big]dS =$$

$$= \int_{S_\varepsilon}\Big[-2u^*(y)\sum_{i,j=1}^{n}\overset{a}{Q}_{ij}(y)\nu_j(y)\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}\Big]dS =$$

$$= -\int_{V_\varepsilon}\Big[-2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u^*(x)}{\partial x_j}\overset{a}{Q}_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} - 2u^*(x)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial \overset{a}{Q}_{ij}(x)}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\Big]dx =$$

$$= -\int_{V_\varepsilon}\Big[2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u^*(x)}{\partial x_i}\overset{a}{Q}_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + 2u^*(x)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial \overset{a}{Q}_{ij}(x)}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\Big]dx\ (^2)\,,$$

---

(2) Не обязательно продолжать матрицы $\overset{a}{Q}_{ij}(y)$ на V так, чтобы они оставались антисимметрическими в V.

аналогично как (6) получают формулу

$$(8)\quad \int\limits_V \Big\{2u^*(x)A\Big(x,\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(x)+2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u^*(x)}{\partial x_i}[A_{ij}(x)+\overset{a}{Q}_{ij}(x)]\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}+$$
$$+2u^*(x)\sum_{j=1}^{n}\Big[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\big(\overset{a}{A}_{ij}(x)+\overset{a}{Q}_{ij}(x)\big)}{\partial x_i}-\overset{a}{A}_j(x)\Big]\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}-$$
$$-u^*(x)[A(x)+\widetilde{A}(x)]u(x)\Big\}dx=$$
$$=-\int\limits_S\Big\{2u^*(y)B\Big(y,\frac{\partial}{\partial y}\Big)u(y)-u^*(y)[B(y)+\widetilde{B}(y)]u(y)\Big\}dS\,,$$

причем возможная различная продолжаемость матриц $\overset{a}{Q}_{ij}(y)$ на V не влияет на правую часть последней формулы.

Если $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемые вплоть до S матрицы, то, очевидно, формулы (6) и (8) могут быть получены в предположении дважды непрерывной дифференцируемости поверхности S. Легко проверяется, что соответствующие формулы в работах [1], [2] и [3] вытекают из (6) и (8) как частные их случаи.

Матричную квадратичную форму

$$\Phi=\sum_{i,j=1}^{n}\xi_i^*a_{ij}\xi_j+2\sum_{i,j=1}^{n}\xi_i^*b_i\eta+\eta^*c\eta\,,$$

где a_{ij}, b_i, c — квадратные порядка p матрицы, а ξ_i, η столбцы высоты p, можно переписать так

$$\Phi=\xi^*a\xi+2\xi^*b\eta+\eta^*c\eta\,,$$

где матрица $a=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ столбец $\xi=(\xi_i)_{i=1}^{n}$, а матричный столбец $b=(b_i)_{i=1}^{n}$. Предполагая, что $\det a\neq 0$ её можно привести путем преобразования $\xi=\varrho-ab^{-1}\eta$ к такому виду

$$\Phi=\varrho^*a\varrho+\eta^*(c-b^*a^{-1}b)\eta$$

так как матрицу a можно считать симметрической. Если $\det a$ может обращаться в нуль, а $\det c\neq 0$, то

$$\Phi=\xi^*(a-bc^{-1}b^*)\xi+\theta^*c\theta\,,$$

где $\theta=\eta+c^{-1}b^*\xi$, c так же, как и a можно считать симметрической.

Пусть для любого не равного нулю столбца ξ высоты np и любой точки $x\in V$ при одном из возможных способов продолжения матриц $\overset{a}{Q}_{ij}(y)$ на V

форма

(9) $$\xi^* \mathfrak{A}(x)\,\xi > 0$$

где матрица $\mathfrak{A}(x) = \big(\overset{a}{A}_{ij}(x) + \overset{a}{Q}_{ij}(x)\big)_{i,j=1}^n$. Тогда $\det \mathfrak{A}(x) \neq 0$ $(x \in V)$ и пользуясь изложенным выше можно переписать формулу (8) так

(10) $$\int\limits_V \Big\{2u^*(x)A\Big(x, \frac{\partial}{\partial x}\Big)u(x) + 2Q^*(x)\mathfrak{A}(x)Q(x) - u^*(x)[A(x) + \widetilde{A}(x)] + \\ + \frac{1}{2}P^*(x)\mathfrak{A}^{-1}(x)P(x)u(x)\Big\}dx = \\ = -\int\limits_S \Big\{2u^*(y)B\Big(y, \frac{\partial}{\partial y}\Big)u(y) - u^*(y)[B(y) + \widetilde{B}(y)]u(y)\Big\}dS\,,$$

где

$$\widetilde{A}(x) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 A_{ij}^*(x)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i^*(x)}{\partial x_i} + A^*(x)\,,$$

а столбцы

$$P(x) = \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial[\overset{a}{A}_{ij}(x) + \overset{a}{Q}_{ij}(x)]}{\partial x_i} - \overset{a}{A}_j(x)\Big)_{j=1}^n,$$

$$Q(x) = \Big(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\Big)_{j=1}^n + \frac{1}{2}\mathfrak{A}^{-1}(x)P(x)u(x)\,.$$

В предположении существования для оператора (1) нормальной фундаментальной матрицы $\omega(x, z)$ (см. [4], [5]) в области D непрерывно дифференцируемой по x и z $(x, z \in D,\ x \neq z)$ имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть при условии* (9) *для любых двух отличных от нуля непрерывных столбцов* $\eta(y)$ *и* $\zeta(x)$ $(y \in S,\ x \in V)$ *высоты* p *из двух неположительных интегралов*

(11) $$\int\limits_S \eta^*(y)[B(y) + \widetilde{B}(y)]\eta(y)\,dS, \\ \int\limits_S S^*(x)[A(x) + \widetilde{A}(x) + \tfrac{1}{2}P^*(x)\mathfrak{A}^{-1}(x)P(x)]\zeta(x)\,dx$$

хотя бы один отличен от нуля. Тогда граничные задачи

(I_0) $$A\Big(x, \frac{\partial}{\partial x}\Big)u(x) = 0 \qquad (x \in V)\,,$$

(II_0) $$\lim_{x \to y} B\Big(y, \frac{\partial}{\partial x}\Big)u(x) = 0 \qquad (y \in S)\,,$$

и

$$(\mathrm{I}_0^*) \qquad A^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) = 0 \qquad (x \in V),$$

$$(\mathrm{II}_0^*) \qquad \lim_{x\to y} B^*\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) = 0 \qquad (y \in S)$$

имеют только нулевые решения.

Доказательство. Предполагая противное для задачи (I_0), (II_0) из (10) заключают, что либо $u(x) \equiv 0$ $(x \in V)$ либо $u(y) \equiv 0$ $(y \in S)$ или же имеет место и то и другое. В первом случае по непрерывности $u(x) \equiv 0$ при $x \in V \cup S$. Во втором — это тождество также имеет место в силу формулы

$$(12) \qquad \delta(x) u(x) = \int_V \omega(x, z) A\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) u(z) dz + \\ + \int_S \left\{\omega(x, z) B\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) u(z) - \left[u^*(z) B^*\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) \omega^*(x, z)\right]^*\right\} dS,$$

где $u(x)$ — любая матрица с указанными выше свойствами, $x \in D \backslash S$, $\delta(x) = 1$ $(x \in V)$, $\delta(x) = 0$ $(x \bar{\in} V)$ которая получается легко из (8). Таким образом, задача (I_0), (II_0) имеет только нулевое решение. Для задачи (I_0^*), (II_0^*) это утверждение вытекает из следующих соображений. Во-первых, так как $\tilde{Q}_{ij}(y) = -Q_{ij}^*(y)$, то $\overset{a}{\tilde{Q}}_{ij}(y) = \overset{a}{Q}_{ij}(y)$ $(i, j = 1, \ldots, n;\ y \in S)$ и матрица $\mathfrak{A}(x)$ одна и та же для обеих задач (I_0), (II_0) и (I_0^*), (II_0^*), а значит, условие (9) выполняется для них одновременно. Во-вторых, это же имеет место и в отношении условия (10), ибо столбец $P(x)$ выражается одинаково для задачи (I_0), (II_0) как и для задачи (I_0^*), (II_0^*). В-третьих, из (8) для любой матрицы $v(x)$ с указанными свойствами получается формула

$$(13) \qquad \delta(x) v(x) = \int_V \omega^*(z, x) A^*\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) v(z) dz - \\ - \int_S \left\{\left[v^*(z) B\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) \omega(z, x)\right]^* - \omega^*(z, x) B^*\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) v(z)\right\} d_z S.$$

Интересно отметить, что при условиях (9), (11) из формулы (10) вытекает также, что граничные задачи нахождения непрерывно дифференцируемых в V непрерывных в $V \cup S$ и имеющих равномерные пределы (3) и (4) решений систем

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = 0, \qquad A^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) = 0 \qquad (x \in V)$$

аннулирующихся на S имеют только нулевые решения. В случае, когда второй интеграл в условии (11) положителен — это тривиально. Если же он нуль, то это следует из тождества $Q(x) \equiv 0$ $(x \in V)$, непрерывности $u(x), v(x)$, существования равномерных пределов (3) и (4) и формул (12) и (13).

Если условие (9) не выполняется, то для любого не нулевого столбца ζ высоты p и для любой точки $x \in V$

$$\zeta^*[A(x) + \widetilde{A}(x)]\zeta > 0$$

то пользуясь другим способом представления матричной квадратичной формы в левой части формулы (8), можно эту формулу записать так:

$$\begin{aligned}
(14) \quad & \int\limits_V \Big\{2u^*(x) A\Big(x, \frac{\partial}{\partial x}\Big) u(x) + \\
& + 2\frac{\partial u^*}{\partial x}\Big[\mathfrak{A}(x) + \frac{1}{2}P(x)\big(A(x) + \widetilde{A}(x)\big)^{-1}P^*(x)\Big]\frac{\partial u}{\partial x} - \\
& - R^*(x)[A(x) + \widetilde{A}(x)]R(x)\Big\}dx = \\
& = -\int\limits_S \Big\{2u^*(y) B\Big(y, \frac{\partial}{\partial y}\Big) u(y) - u^*(y)[B(y) + \widetilde{B}(y)]u(y)\Big\}dS ,
\end{aligned}$$

где столбцы

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Big(\frac{\partial u(x)}{\partial x}\Big)_{i=1}^n, \qquad R(x) = u(x) - [A(x) + \widetilde{A}(x)]^{-1}P^*(x)\frac{\partial u}{\partial x} .$$

Если, кроме того, для любых двух непрерывных отличных от нуля столбцов $\eta(y)$, $\xi(x)$ высоты p и np соответственно $(y \in S, x \in V)$ из двух интегралов

$$\int\limits_S \eta^*(y)[B(y) + \widetilde{B}(y)]\eta(y)dS \geqslant 0 ,$$

$$\int\limits_V \xi^*(x)\big[\mathfrak{A}(x) + \tfrac{1}{2}P(x)\big(A(x) + A(x)\big)^{-1}P^*(x)\big]\xi(x)dx \leqslant 0$$

хотя бы один отличен от нуля, то повторяя предыдущие рассуждения и пользуясь формулой (14) приходят к выводу, что задачи (I_0), (II_0) и (I_0^*), (II_0^*) имеют только нулевые решения. В частности, если второй из последних двух интегралов нуль, то следует воспользоваться формулами (12) и (13).

§ 2. Здесь рассматривается такой оператор граничной задачи, частным случаем которого с одной стороны является оператор $\Big(A\Big(x, \frac{\partial}{\partial x}\Big), B\Big(y, \frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big)$ рассматриваемый в § 1, а с другой — оператор граничной задачи типа Дирихле $\Big(A\Big(x, \frac{\partial}{\partial x}\Big), -E\Big)$.

Пусть числа $p_{\mathrm{I}}, p_{\mathrm{II}} \geqslant 0$ и $p_{\mathrm{I}}+p_{\mathrm{II}} = p$. Для матриц и матричных операторов под M_{I} (M_{II}) будет в дальнейшем пониматься прямоугольная матирца высоты p_{I} (p_{II}) и ширины p, или же иногда матрица, составленная из первых p_{I} (последних p_{II}) строк квадратной p на p матрицы M.

Пусть далее коэффициенты дифференциального оператора

$$B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i=1}^{n} B_{i\mathrm{I}}(y)\frac{\partial}{\partial x_i} + B_{\mathrm{I}}(y)$$

действительные функциональные матрицы, определенные на S и обладающие теми же свойствами гладкости, что и коэффициенты оператора (2) соответственно, а действительная матрица $B_{\mathrm{II}}(y)$ определена и непрерывно дифференцируемая на S, причем

$$\det\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} B_{i\mathrm{I}}(y)\nu_i(y) \\ B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (y \in S)\,. \tag{15}$$

Рассматриваемый здесь оператор граничной задачи записывается так:

$$\left(A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}\right), \tag{16}$$

где $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ оператор (1), а оператор $\begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}$ при $p_{\mathrm{I}} = p$, $p_{\mathrm{II}} = 0$ переходит в оператор (2), так как тогда из (15) следует, что

$$\det\sum_{i=1}^{n} B_{i\mathrm{I}}(y)\nu_i(y) = \det\sum_{i=1}^{n} B_i(y)\nu_i(y) \neq 0 \qquad (y \in S)\,,$$

а при $p_{\mathrm{I}} = 0, p_{\mathrm{II}} = p$ — в матрицу $-E$, так как в этом случае $\det B_{\mathrm{II}}(y) \neq 0$ ($y \in S$). Оператор (16) будет применяться к матрицам $u(x)$ высоты p, непрерывным в $V \cup S$, дважды непрерывно дифференцируемым в V, для которых существуют равномерные относительно $y \in S$ пределы

$$\lim_{x\to y}\sum_{i=1}^{n} B_{i\mathrm{I}}(y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\,, \qquad \lim_{x\to y}\sum_{i=1}^{n} C_{i\mathrm{II}}(y)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$$

при стремлении точки $x \in V$ к точке $y \in S$ по нормали $\nu(y)$, где $C_{i\mathrm{II}}(y) = B_{\mathrm{II}}(y)\nu_i(y) + C_{i\mathrm{II}}^{\tau}(y)$, действительные квадратные p на p матрицы $C_{i\mathrm{II}}^{\tau}(y)$

непрерывно диффееренцируемые на S и удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{n} C^{\tau}_{i\mathrm{II}}(y)\nu_i(y) = 0 \qquad (y \in S),$$

а в остальном произвольные.

Теорема 3. *Оператором формально сопряженным к оператору* (16) *является оператор того же вида*

$$\left(A^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}^*\right),$$

где $A^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — *оператор, сопряжённый по Лагранжу с оператором* $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, *а оператор*

$$\begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ -\widetilde{B}_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix},$$

причем

$$\widetilde{B}_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}_{i\mathrm{I}}(y)\frac{\partial}{\partial x} + \widetilde{B}_{\mathrm{I}}(y),$$

где матрицы $\widetilde{B}_{i\mathrm{I}}(y)$, $\widetilde{B}_{\mathrm{I}}(y)$ *и* $\widetilde{B}_{\mathrm{II}}(y)$ *обладают теми же свойствами гладкости, что и матрицы* $B_{i\mathrm{I}}(y)$, $B_{\mathrm{I}}(y)$ *и* $B_{\mathrm{II}}(y)$ *соответственно и вычисляются по формулам*:

$$\widetilde{B}(y)_{i\mathrm{I}} = \left(\sum_{i=1}^{n} B^*_{i\mathrm{I}}(y)\nu_i(y), B^*_{\mathrm{II}}(y)\right)_{\mathrm{I}}^{-1}\left[2\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(y)\nu_j(y) - \right.$$

$$\left. - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(y)\nu_i(y)\nu_j(y)\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} B^*_{i\mathrm{I}}(y)\nu_i(y) \\ B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} B_{i\mathrm{I}}(y) \\ C_{i\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}\right]^* =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} B^*_{i\mathrm{I}}(y)\nu_i(y), B^*_{\mathrm{II}}(y)\right)_{\mathrm{I}}^{-1}\mathfrak{B}_i(y) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$B_{\mathrm{I}}(y) = \left(\sum_{i=1}^{n} B^*_{i\mathrm{I}}(y)\nu_i(y), B^*_{\mathrm{II}}(y)\right)_{\mathrm{I}}^{-1}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \nu_j(y)\frac{\partial}{\partial y_i}\left\{A_{ij}(y) + \right.\right.$$

$$+ \left[\sum_{k=1}^{n} A_{ik}(y)\nu_k(y) - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(y)\nu_i(y)\nu_j(y) \times\right.$$

$$\times \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} B_{i\mathrm{I}}(y)\nu_i(y) \\ B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{i\mathrm{I}}(y) \\ C_{i\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix} \Bigg] \nu_j(y) - \Bigg[\sum_{k=1}^{n} A_{jk}(y)\nu_k(y) -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(y)\nu_i(y)\nu_j(y) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} B_{i\mathrm{I}}(y)\nu_i(y) \\ B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{j\mathrm{I}}(y) \\ C_{j\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix} \Bigg] \nu_i(y) \Bigg\} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} A_i(y)\nu_i(y) + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(y)\nu_i(y)\nu_j(y) \times$$

$$\times \left(\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} B_{i\mathrm{I}}(y)\nu_i(y) \\ B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}(y) \\ C_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix} \right)^{*} =$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{n} B_{i\mathrm{I}}^{*}(y)\nu_i(y),\ B_{\mathrm{II}}^{*}(y) \Big)_{\mathrm{I}}^{-1} \mathfrak{B}(y)\,,$$

где $C_{\mathrm{II}}(y)$ *— произвольная непрерывная на* S *действительная матрица,*

$$\widetilde{B}_{\mathrm{II}}(y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} B_{i\mathrm{I}}^{*}(y)\nu_i(y),\ B_{\mathrm{II}}^{*}(y) \Big)_{\mathrm{II}}^{-1} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^{*}(y)\nu_i(y)\nu_j(y)\,.$$

Для любой матрицы $u(x)$ *с указанными выше свойствами и любой действительной матрицы* $v(x)$ *высоты* p *непрерывной в* $V \cup S$ *дважды непрерывно дифференцируемой в* V *и имеющей равномерные относительно* $y \in S$ *пределы*

$$\lim_{x \to y} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}_{i\mathrm{I}}(y) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\,, \qquad \lim_{x \to y} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{C}_{i\mathrm{II}}(y) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}$$

при стремлении точки $x \in V$ *к точке* $y \in S$ *по нормали* $\nu(y)$ *причем матрицы вычисляются по формулам*

$$\widetilde{C}_{i\mathrm{II}}(y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} B_{i\mathrm{I}}^{*}(y)\nu_i(y),\ B_{\mathrm{II}}^{*}(y) \Big)_{\mathrm{II}}^{-1} \mathfrak{B}_i(y) \qquad (i = 1, \ldots, n)\,,$$

имеет место формула:

$$(17) \quad \int_V v^*(x) A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x)\,dx + \int_S \left[\begin{pmatrix} C_{\mathrm{I}}(y) \\ C_{\mathrm{II}}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \end{pmatrix}^{*} v(y) \right]^{*} \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix} u(y)\,dS =$$

$$= \left\{ \int_V u^*(x) A^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x)\,dx + \int_S \left[\begin{pmatrix} C_{\mathrm{I}}(y) \\ C_{\mathrm{II}}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \end{pmatrix} u(y) \right]^{*} \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}^{*} v(y)\,dy \right\}^{*},$$

где

$$C_{\mathrm{I}}(y) = \sum_{i=1}^{n} B_{i\mathrm{I}}(y)\nu_i(y), \qquad C_{\mathrm{II}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i=1}^{n} C_{i\mathrm{II}}(y)\frac{\partial}{\partial x_i} + C_{\mathrm{II}}(y);$$

оператор $\begin{pmatrix} C_{\mathrm{I}}(y) \\ C_{\mathrm{II}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{C}_{\mathrm{I}}(y) \\ \widetilde{C}_{\mathrm{II}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)\end{pmatrix}$, *причем* $\widetilde{C}_{\mathrm{II}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{C}_{i\mathrm{II}}(y)\frac{\partial}{\partial x_i} +$ $+ \widetilde{C}_{\mathrm{II}}(y)$, *а матрицы* $\widetilde{C}_{\mathrm{I}}(y)$ *и* $\widetilde{C}_{\mathrm{II}}(y)$ *вычисляются по формулам*:

$$\widetilde{C}_{\mathrm{I}}(y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} B^*_{i\mathrm{I}}(y)\nu_i(y),\ B^*_{\mathrm{II}}(y)\Big)^{-1}_{\mathrm{I}} \sum_{i,j=1}^{n} A^*_{ij}(y)\nu_i(y)\nu_j(y),$$

$$\widetilde{C}_{\mathrm{II}}(y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} B^*_{i\mathrm{I}}(y)\nu_i(y),\ B^*_{\mathrm{II}}(y)\Big)^{-1}_{\mathrm{II}} \mathfrak{B}(y).$$

Доказательство. Формула (17) получается непосредственным пересчётом из формулы (6), так как её можно переписать в виде

$$\int_V \left\{v^*(x)A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) - \left[u(x)A^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right]^*\right\}dx = -\int_S \left\{v^*(y)\begin{pmatrix}\widetilde{C}_{\mathrm{I}}(y) \\ \widetilde{B}_{\mathrm{II}}(y)\end{pmatrix}^* \times\right.$$

$$\left.\times \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \\ C_{\mathrm{II}}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)\end{pmatrix} u(y) - \left[u^*(y)\begin{pmatrix} C_{\mathrm{I}}(y) \\ B_{\mathrm{II}}(y)\end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \widetilde{B}_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \widetilde{C}_{\mathrm{II}}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)\end{pmatrix} v(y)\right]^*\right\} dS.$$

Легко проверяется, что оператор сопряжённый к оператору $\begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y)\end{pmatrix}^*$ в этом смысле равен первоначальному оператору $\begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y)\end{pmatrix}$.

Действительно,

$$\sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}_{i\mathrm{I}}(y)\nu_i(y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} B^*_{i\mathrm{I}}(y)\nu_i(y),\ B^*_{\mathrm{II}}(y)\Big)^{-1}_{\mathrm{I}} \sum_{i,j=1}^{n} A^*_{ij}(y)\nu_i(y)\nu_j(y),$$

и

$$\widetilde{\widetilde{B}}_{\mathrm{II}}(y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}^*_{i\mathrm{I}}(y)\nu_i(y),\ \widetilde{B}^*_{\mathrm{II}}(y)\Big)^{-1}_{\mathrm{II}} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(y)\nu_i(y)\nu_j(y).$$

Так как матрица

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{B}_{i\mathrm{I}}(y)\nu_i(y) \\ \widetilde{B}_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} B^*_{i\mathrm{I}}(y)\nu_i(y),\ B^*_{\mathrm{II}}(y)\right)^{-1} \sum_{i,j=1}^{n} A^*_{ij}(y)\nu_i(y)\nu_j(y)\,,$$

то $\widetilde{\widetilde{B}}^{\mathrm{II}}(y) = B^{\mathrm{II}}(y)$ (аналогично $\widetilde{\widetilde{C}}^{\mathrm{I}}(y) = C^{\mathrm{I}}(y)$). Далее,

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_i(y) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(y)\nu_i(y)\nu_j(y) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} B_{i\mathrm{I}}(y)\nu_i(y) \\ B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{i\mathrm{I}}(y) \\ C_{i\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix},$$

поэтому $\widetilde{\widetilde{B}}_{i\mathrm{I}}(y) = B_{i\mathrm{I}}(y)$, $\widetilde{\widetilde{C}}_{i\mathrm{II}}(y) = C_{i\mathrm{II}}(y)$. Ввиду того, что

$$\left[\widetilde{\mathfrak{B}}_i(y) - \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(y)\nu_k(y)\right]^* \nu_j(y) - \left[\widetilde{\mathfrak{B}}_j(y) - \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(y)\nu_k(y)\right] \nu_i(y) =$$

$$= -\left[\mathfrak{B}_i(y) - \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(y)\nu_k(y)\right]^* \nu_j(y) + \left[\mathfrak{B}_j(y) - \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(y)\nu_k(y)\right]^* \nu_i(y)$$

получают:

$$\mathfrak{B}(y) = \sum_{i,j=1}^{n} \nu_j(y)\frac{\partial}{\partial y_i}\Big\{A_{ij}(y) - \left[\mathfrak{B}_i(y) - \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(y)\nu_k(y)\right]^* \nu_j(y) + \Big[\mathfrak{B}_j(y) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(y)\nu_k(y)\Big]^* \nu_i(y)\Big\} - 2\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial A_{ij}(y)}{\partial y_i}\nu_j(y) + \sum_{k=1}^{n} A_i(y)\nu_i(y) + \mathfrak{B}^*_j(y) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(y)\nu_i\nu_j(y) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} B_{ij}(y)\nu_i(y) \\ B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}(y) \\ C_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}.$$

Тогда $\widetilde{\widetilde{B}}_{\mathrm{I}}(y) = B_{\mathrm{I}}(y)$ и $\widetilde{\widetilde{C}}_{\mathrm{II}}(y) = C_{\mathrm{II}}(y)$.

Одновременно оператор $\left(A^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), -\begin{pmatrix} C_{\mathrm{I}}(y) \\ C_{\mathrm{II}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)\end{pmatrix}^*\right)$ является сопряжённым к оператору $\left(A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), -\begin{pmatrix} C_{\mathrm{I}}(y) \\ C_{\mathrm{II}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)\end{pmatrix}\right)$.

Очевидно, оператор сопряжённый определяется здесь неоднозначно, но эта видимая неоднозначность не имеет существенного значения, так как легко проверяется, что операторы граничных условий $\begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \hat{B}_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}$ равносильные, если

$$\hat{B}_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) = B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \sum_{i=1}^{n} D_{\mathrm{I}}(y)\, C_{i\mathrm{II}}^{\tau *}(y)\, B_{\mathrm{II}}(y) \frac{\partial}{\partial x_i} + D_{\mathrm{I}}(y) \times$$

$$\times \sum_{i,j=1}^{n} \nu_j(y) \frac{\partial}{\partial y_i} [\nu_i(y)\, C_{j\mathrm{II}}^{\tau *}(y)\, B_{\mathrm{II}}(y) - \nu_j(y)\, C_{i\mathrm{II}}^{\tau *}(y)\, B_{\mathrm{II}}(y)] + G_{\mathrm{I}}(y)\, C_{\mathrm{II}}^{*}(y)\, B_{\mathrm{II}}(y)\,,$$

где $D_{\mathrm{I}}(y)$, $C_{i\mathrm{II}}^{\tau}(y)$, $G_{\mathrm{I}}(y)$, $C_{\mathrm{II}}^{*}(y)$ произвольные непрерывные на S матрицы соответствующих размеров, причем $D_{\mathrm{I}}(y)$ и $C_{i\mathrm{II}}^{\tau}(y)$ непрерывно дифференцируемы на S и $\sum\limits_{i=1}^{n} C_{i\mathrm{II}}^{\tau}(y)\, \nu_i(y) = 0$ $(y \in S)$. Поэтому в формулах $\widetilde{B}_{i\mathrm{I}}(y)$ и $\widetilde{B}_{\mathrm{I}}(y)$ определяющих оператор $\widetilde{B}_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ можно положить $C_{i\mathrm{II}}^{\tau}(y) = C_{\mathrm{II}}(y) = 0$ на S (в этих формулах $D_{\mathrm{I}}(y) = G_{\mathrm{I}}(y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} B_{i\mathrm{I}}^{*}(y)\, \nu_i(y),\ B_{\mathrm{II}}^{*}(y)\right)_{\mathrm{I}}^{-1}$).

Сдедствие. *Для того, чтобы граничная задача*

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = F(x) \qquad (x \in V)\,,$$

$$\lim_{x \to y} \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix} u(x) = f(y) \qquad (y \in S)\,,$$

рассматриваемая в классе столбцов $u(x)$ с указанными выше свойствами была разрешимой, где $F(x), f(y)$ непрерывные в V и на S соответственно столбцы высоты p, необходимо, чтобы

$$\left[\left(v(x), \begin{pmatrix} C_{\mathrm{I}}(y) \\ C_{\mathrm{II}}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \end{pmatrix}^{*} v(y)\right), \left(F(x), f(y)\right)\right] =$$

$$= \int\limits_{V} v^{*}(x) F(x)\, dx + \int\limits_{S} \left[\begin{pmatrix} C_{\mathrm{I}}(y) \\ C_{\mathrm{II}}\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \end{pmatrix}^{*} v(y)\right]^{*} f(y)\, dS = 0\,,$$

где $v(x)$ — любое решение сопряжённой задачи

$$A^{*}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) = 0 \qquad (x \in V)\,,$$

$$\lim_{x \to y} \begin{pmatrix} B_{\mathrm{I}}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \\ -B_{\mathrm{II}}(y) \end{pmatrix}^{*} v(x) = 0 \qquad (y \in S)$$

с указанными выше свойствами.

Теорема 2 является, очевидно, частным случаем теоремы 3.

§ 3. Формулы (6) и (8) можно также получить при помощи одной формулы, интегрирования по частям вдоль $(n-1)$-мерной допустимой ориентировочной поверхности ([3]) в n-мерном пространстве. Эта формула обобщает соответствующую формулу в [2] ([4]).

Пусть S — $(n-1)$-мерная допустимая ориентировочная поверхность с границей Γ и ω внешняя дифференциальная форма степени $n-2$:

$$\omega = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (-1)^{i+j} Q_{ij}(y)\, \frac{dy_1 \dots dy_n}{dy_i dy_j},$$

коэффициенты которой $Q_{ij}(y)$ являются матрицами одинакового размера, непрерывно дифференцируемыми на S вплоть до Γ ($\frac{dy_1 \dots dy_n}{dy_i dy_j}$ — выражение, получаемое из $dy_1 \dots dy_n$ вычеркиванием dy_i и dy_j).

Тогда

$$d\omega = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (-1)^{i+j} \left[\frac{\partial Q_{ij}(y)}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial Q_{ij}(y)}{\partial y_j} dy_j\right] \frac{dy_1 \dots dy_n}{dy_i dy_j} =$$

$$= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (-1)^{j-1} \frac{\partial Q_{ij}(y)}{\partial y_i} \cdot \frac{dy_1 \dots dy_n}{dy_j} - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (-1)^{i-1} \frac{\partial Q_{ij}(y)}{\partial y_j} \cdot \frac{dy_1 \dots dy_n}{dy_i} =$$

$$= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (-1)^{j-1} \frac{\partial Q_{ij}(y)}{\partial y_i} \cdot \frac{dy_1 \dots dy_n}{dy_j} + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} (-1)^{j-1} \frac{\partial [-Q_{ji}(y)]}{\partial y_i} \cdot \frac{dy_1 \dots dy_n}{dy_j}.$$

Доопределив матрицы $Q_{ij}(y)$ определенные до сих пор при $i<j$; $i,j=1,\dots,n$ на случай $i \geqslant j$ так

(17′) $\quad Q_{ij}(y) = -Q_{ji}(y) \quad (i>j), \quad Q_{ii}(y) = 0 \quad (i,j=1,\dots,n;\ y \in S \cup \Gamma),$

можно записать

$$d\omega = \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial Q_{ij}(y)}{\partial y_i} \cdot \frac{dy_1 \dots dy_n}{dy_j}.$$

Через $\nu(y) = (\nu_1(y), \dots, \nu_n(y))$ обозначается единичный вектор нормали к S, непрерывно меняющийся от точки к точке на $S \cup \Gamma$, а через $\mu(y) = (\mu_1(y), \dots, \mu_n(y))$ единичный вектор, определённый, непрерывно меняющийся внутри $(n-2)$-мерных гладких клеток, составляющих поверхность Γ, и перпендикулярный к $\nu(y)$. Кроме того, предполагается, что $\mu(y)$ в своей области определения перпендикулярный к касательным полям, определяющим ориентацию Γ, индуцированную ориентацией поверхности S

([3]) См. [6], § 18.

([4]) Она, как и формула (6), была получена независимо от [2], как обобщение соответствующих формул в [3] (см. [7] и [8]).

и направлен в сторону противоположную S. Тогда из основной интегральной теоремы (см., например, [9], стр. 116) можно получить формулу Стокса в n-мерном пространстве:

$$(18)\qquad \int_S \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial Q_{ij}(y)}{\partial y_i} \nu_j(y)\,dS = \int_\Gamma \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} Q_{ij}(y)\,\sigma_{ij}(y)\,d\Gamma = \int_\Gamma \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (-1)^{i+j} Q_{ij}(y)\,\frac{dy_1\ldots dy_n}{dy_i dy_j},$$

где матрицы $Q_{ij}(y)$ обладают указанными выше качествами и удовлетворяют условиям (17′) а

$$\sigma_{ij}(y) = \begin{vmatrix} \mu_i(y) & \mu_j(y) \\ \nu_i(y) & \nu_j(y) \end{vmatrix} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)\,.$$

При $n = 3$ легко проверяется, что (18) совпадает с классической формулой Стокса:

$$\iint_S \left\{\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos(\widehat{\bar n, x}) + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos(\widehat{\bar n, y}) + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos(\widehat{\bar n, z})\right\} dS =$$
$$= \iint_S \big(\bar n(P), \operatorname{rot}\bar R(P)\big)\,dS = \int_\Gamma \big(\bar\tau(M), \bar R(M)\big)\,d\Gamma = \int_\Gamma X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\,,$$

где точки $P \in S$, $M \in \Gamma$; $\bar R = \{X, Y, Z\}$ — единичный вектор нормали к поверхности S, $\bar\tau$ — единичный вектор касательной к контуру Γ, направление которого согласовано с направлением $\bar n$.

Очевидно, если поверхность S замкнута, то формула (18) упростится так

$$(19)\qquad \int_S \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial Q_{ij}(y)}{\partial y_i} \nu_j(y)\,dS = 0\,.$$

Пусть y_0 произвольная точка в n-мерном пространстве, $\nu(y_0)$ — единичный вектор произвольного направления в этой точке и $S_0 \ni y_0$ — некоторая $(n-1)$-мерная допустимая ориентированная поверхность с границей Γ_0, ориентация которой индуцируется ориентацией S_0 в точке y_0. В дальнейшем S_0 стягивается в точку y_0, что будет обозначаться так: $(S_0) \to y_0$. Пусть, кроме того, матрицы $Q_{ij}(y)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ обладающие всеми указанными свойствами, определены на $S_0 \cup \Gamma_0$. Тогда из формулы (18) и теоремы о среднем вытекает формула

$$(20)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial Q_{ij}(y)}{\partial y_i} \nu_j(y)\bigg|_{x=x_0} = \lim_{(S_0)\to y_0} \frac{\int_{\Gamma_0} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} Q_{ij}(y)\,\sigma_{ij}(y)\,d\Gamma}{\operatorname{mes} S_0}\,.$$

При $n = 3$ эта формула совпадает с формулой, определяющей вихрь:

$$\big(\bar n(P), \operatorname{rot}\bar R(P)\big)\bigg|_{P=P_0} = \lim_{(S_0)\to P_0} \frac{\int_{\Gamma_0} \big(\bar\tau(M), \bar R(M)\big)\,d\Gamma}{\operatorname{mes} S_0}\,.$$

Лемма. *Если в этих условиях в окрестности точки x_0 на S_0 имеют место соотношения* $\sum_{j=1}^{n} Q_{ij}(y)\nu_j(y) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, *то*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial Q_{ij}(y)}{\partial y_i}\nu_j(y)\Big|_{y=y_0} = 0 \ (^5)\,.$$

Доказательство непосредственно вытекает из формулы (20), так как

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} Q_{ij}(y)\sigma_{ij}(y) = \frac{1}{2}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{n} Q_{ij}(y)\nu_j(y)\Big]\mu_i(y) - \sum_{j=1}^{n}\Big[\sum_{i=1}^{n} Q_{ij}(y)\nu_i(y)\Big]\mu_j(y)\Big\} = \sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{j=1}^{n} Q_{ij}(y)\nu_j(y)\Big]\mu_i(y)\,. \tag{21}$$

Пусть на поверхности S задана матрица $M(y) = \big(M_1(y), \ldots, M_n(y)\big)$, где $M_1(y), \ldots, M_n(y)$ одинакового размера функциональные матрицы точки $y \in S$. Проекцией матричной строки $M(y)$ на направление нормали к S в точке $y \in S$ будет называться матрица $\sum_{k=1}^{n} M_k(y)\nu_k(y)$. В соответствии с этим $M(y)$ можно разложить на две матричные строки $M(y) = M^{\nu}(y) + M^{\tau}(y)$, $M^{\nu}(y) = \big(M_1^{\nu}(y), \ldots, M_n^{\nu}(y)\big)$, $M^{\tau}(y) = \big(M_1^{\tau}(y), \ldots, M_n^{\tau}(y)\big)$ — «нормальную» и «касательную» к S составляющие:

$$M_i^{\nu}(y) = \sum_{k=1}^{n} M_k(y)\nu_k(y)\nu_i(y)\,, \quad M_i^{\tau}(y) = M_i(y) - M_i^{\nu}(y) \quad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Для всякой матричной строки $M(y)$ можно всегда указать матрицы $Q_{ij}(y)$ удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} M_i^{\tau}(y) &= \sum_{j=1}^{n} Q_{ij}(y)\nu_j(y) \quad (i = 1, \ldots, n)\,,\\ Q_{ij}(y) &= -Q_{ji}(y) \quad (i, j = 1, \ldots, n)\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Действительно, матрицы $Q_{ij}(y)$ можно построить, например, так

$$Q_{ij}(y) = M_i(y)\nu_j(y) - M_j(y)\nu_i(y) \quad (i, j = 1, \ldots, n)\,. \tag{23}$$

Все другие решения системы (22) отличаются от (23) решениями однородной системы

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} R_{ij}(y)\nu_j(y) &= 0 \quad (i = 1, \ldots, n)\,,\\ R_{ij}(y) &= -R_{ji}(y) \quad (i, j = 1, \ldots, n)\,. \end{aligned}$$

---

(5) В трехмерном пространстве утверждению леммы соответствует равенство нулю проекции вихря векторного поля на направление этого поля.

В предположении непрерывной дифференцируемости этих решений на S, как это следует из леммы, на этой поверхности

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial R_{ij}(y)}{\partial y_i} \nu_j(y) = 0 .$$

Пусть $u(y)$ — функциональная матрица, непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности поверхности S и таких размеров, что произведения $M_i(y)u(y)$ имеют смысл. Выражение

$$\left.\frac{\partial u(y)}{\partial l_{M(y_0)}}\right|_{y=y_0} = \sum_{i=1}^{n} M_i(y_0) \left.\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}\right|_{y=y_0}$$

будет называться «производной» матрицы $u(y)$ с направляющей матрицей $M(y_0)$ в точке $y_0 \in S$. Его можно разложить на сумму производных матрицы $u(y)$ с нормальной и касательной к S направляющими матричными строками:

$$\left.\frac{\partial u(y)}{\partial l_{M(y_0)}}\right|_{y=y_0} = \left.\frac{\partial u(y)}{\partial l_{M^\nu(y_0)}}\right|_{y=y_0} + \left.\frac{\partial u(y)}{\partial l_{M^\tau(y_0)}}\right|_{y=y_0} .$$

В предположении, что поверхность S является дважды непрерывно дифференцируемым многообразием, матричная строка $M(y)$ непрерывно дифференцируема на S и $v(y)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности S функциональная матрица таких размеров, что производения $v^*(y) M_i(y)$ имеют смысл, верна

Теорема 5. *Для того, чтобы при любых матрицах $u(y), v(y)$ имела место формула*

$$\int_S \left\{ v^*(y) \frac{\partial u}{\partial l_{M(y)}} + \left[u^*(y) \frac{\partial v(y)}{\partial l_{\tilde M(y)}}\right]^* + v^*(y) N(y) u(y) \right\} dS = \int_\Gamma v^*(y) P(y) u(y) d\Gamma ,$$

необходимо и достаточно, чтобы $M(y) = M^\tau(y)$, $\tilde M(y) = \left(M_1^{\tau *}(y), \ldots, M_n^{\tau *}(y)\right)$, $N(y) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial Q_{ij}(y)}{\partial y_i} \nu_j(y)$, $P(y) = \sum_{i=1}^{n} M_i^\tau(y) \mu_i(y)$, *а матрицы* $Q_{ij}(y)$ *определялись, например, формулами* (23), *причем возможная неоднозначная определяемость матриц* $Q_{ij}(y)$ *не влияет на матрицу* $N(y)$.

Доказательство. Достаточность условия непосредственно вытекает из формулы (18), (21), (22) и леммы.

Пусть при любых матрицах $u(y)$, $v(y)$ имеет место формула

$$\int_S \left\{ v^*(y) \frac{\partial u}{\partial l_{M(y)}} + \left[u^*(y) \frac{\partial v}{\partial l_{M_1(y)}}\right]^* + v^*(y) N_1(y) u(y) \right\} dS = \int_\Gamma v^*(y) P_1(y) u(y) d\Gamma , \tag{25}$$

где матрицы $M_1(y)$, $N_1(y)$, $P_1(y)$ таких же качеств, как и матрицы $M(y)$, $N(y)$, $P(y)$ соответственно. Вычитая равенство (24) из (25), получают

$$(26)\quad \int_S \left\{ v^*(y)\frac{\partial u}{\partial l_{M'(y)}} + \left[u^*(y)\frac{\partial v}{\partial l_{M_1(y)-\widetilde{M}(y)}}\right]^* + v^*(y)[N_1(y)-N(y)]u(y)\right\} dS = \int_\Gamma v^*(y)[P_1(y)-P(y)]u(y)\,d\Gamma$$

при любых $u(y), v(y)$. Если положить $u(u)=0$ на S то отсюда следует, что $\dfrac{\partial u}{\partial l_{M'(y)}}=0$, а так как в окрестности поверхности S $u(y)$ произвольная матрица, то $M'(y)=0$ на S. Аналогично, полагая $v(y)=0$ на S, а $u(y)$ считая произвольным, доказывается равенство $M_1(y)=\widetilde{M}(y)$ $(y\in S)$. Равенство $N_1(y)=N(y)$ $(y\in S)$ получается из (26), если $u(y)$ и $v(y)$ считать равными нулю на Γ. Затем из (26) равенство $P_1(y)=P(y)$ $(y\in\Gamma)$ очевидно.

Возвращаясь теперь к § 1 и вводя обозначения $\mathcal{A}(y)=\left(\sum_{k=1}^{n}A_{1k}(y)\nu_k(y),\ \ldots,\ \sum_{k=1}^{n}A_{nk}(y)\nu_k(y)\right)$, $y\in S$, из формулы (24), так как поверхность S замкнута, непосредственно без продолжения матриц (5) на $V_{\varepsilon/2}$ получают равенство

$$\int_{S_{\varepsilon/2}}\left\{v^*(y)\sum_{i,j=1}^{n}Q_{ij}(y)\nu_j(y)\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}+\left[u^*(y)\sum_{i,j=1}^{n}Q_{ij}^*(y)\nu_i(y)\frac{\partial v(y)}{\partial y_j}+ u^*(y)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial Q_{ij}(y)}{\partial y_j}\nu(y)\right]^*\right\}dS =$$

$$=\int_{S_{\varepsilon/2}}\left\{v^*(y)\frac{\partial u}{\partial l_{\mathcal{A}^\tau(y)+\mathcal{B}^\tau(y)}}+\left[u^*(y)\frac{\partial v}{\partial l_{-\widetilde{\mathcal{A}}^\tau(y)+\widetilde{\mathcal{B}}^\tau(y)}}\right]^*+ v^*(y)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial Q_{ij}(y)}{\partial y_i}\nu_j(y)u(y)\right\}dS=0.$$

Затем, вычитая его из равенства

$$-\int_{S_{\varepsilon/2}}\left\{v^*(y)\frac{\partial u}{\partial l_{\mathcal{A}(y)}}-\left[u(y)\frac{\partial v}{\partial l_{\widetilde{\mathcal{A}}(y)}}\right]^*-v^*(y)\left[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}(y)}{\partial y_i}\nu_j(y)- \sum_{i=1}^{n}A_i(y)\nu_i(y)\right]u(y)\right\}dS = \int_{V_{\varepsilon/2}}\left\{v^*(x)A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)- \left[u^*(x)A^*\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right]^*\right\}dx$$

так как $\mathcal{A}'(y)=\mathcal{B}'(y)$ легко получают формулу (6).

Аналогично при выводе формулы (8) из (19) непосредственно получается формула (7), причем из леммы следует, что в случае, когда матрицы $A_{ij}(x)$ постоянные, а матрицы $B_i(y) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} v_j(y)$, где b_{ij} также постоянные матрицы и $b_{ij} + b_{ji} = 2A_{ij}$, то $\overset{a}{Q}_{ij}$ в матрице $\mathfrak{A}$ можно взять равными $\overset{a}{A}_{ij} - \overset{a}{b}_{ij}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Эти условия выполняются, например, для граничной задачи системы теории упругости при заданных на поверхности S напряжениях (при этом $\overset{a}{Q}_{ij}$ связаны с упругими характеристиками тела и определены на $V \cup S$). Для этой задачи квадратичная форма матрицы $\mathfrak{A}$ не является строго определенной.

Цитированная литература

[1] H. Weyl, Rend. C. Pal. 39 (1915), c. 1-50.

[2] M. Picone, C. Miranda, Rend. Acc. Lincei 29 (1939), c. 160-165.

[3] Я. Б. Лопатинский, Уч. записки ЛГУ 22, № 5 (1953), c. 5-11.

[4] A. P. Calderon, Am. J. of Math. 80 (1958), c. 16-36.

[5] Я. Б. Лопатинский, Укр. матем. ж. 3, № 3 (1951), c. 290-316.

[6] П. К. Рашевский, *Геометрическая теория уравнений с частными производными* Москва 1947.

[7] Б. Лаврук, Доповіді АН УРСР, № 3 (1956), c. 214-219.

[8] Б. Лаврук, Труды III всесоюзного матем. съезда 4 (1956), c. 27-29.

[9] С. П. Фиников, *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии*, Москва-Ленинград 1948.

Reçu par la Rédaction le 14. 8. 1960