ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXII (1976)

Sur une famille biparamétrique de schémas des différences finies pour un système d'équations paraboliques aux dérivées mixtes et avec des conditions aux limites du type de Neumann

par Marian Malec (Cracovie)

Résumé. Dans la note on prouve que les schémas implicites des différences finies pour un système d'équations partielles du second ordre non linéaires du type parabolique avec des conditions aux limites du type de Neumann sont convergents et on propose une estimation de l'erreur de la méthode des différences finies.

Les schémas implicites mentionnés dépendent de deux paramètres.

1. Les processus non stationnaires d'échange de masse et de chaleur dans un système de corps anisotropes sont décrits en physique par des systèmes d'équations partielles non linéaires du type parabolique

$$\frac{\partial u_l}{\partial x_0} = f_l\left(x, u, \frac{\partial u_l}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}\right) \quad (l = 1, \ldots, p), \tag{1.1}$$

où $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in R^{1+n}$, $u = (u_1, \ldots, u_p)$, $u_l = u_l(x) \in R^1$, $\frac{\partial u_l}{\partial x} = \left\{\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right\}$, $\frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} = \left\{\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j}\right\}$ $(l = 1, \ldots, p, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n)$.

Dans le système (1.1) les seconds membres dépendent du mode de réalisation du processus physique.

Dans le présent travail on prouve que les schémas implicites des différences finies pour le système (1.1) avec des conditions aux limites du type de Neumann sont convergents et on propose une estimation de l'erreur de la méthode des différences finies (théorème 1).

Les schémas implicites mentionnés dépendant de deux paramètres s'obtiennent en remplaçant dans le système (1.1) les dérivées par rapport à x_0 par des différences ascendantes, les dérivées du premier ordre par rapport à $x_1, \ldots, x_n$ — par des combinaisons linéaires des différences centrales à deux niveaux temporels voisins des coefficients ϱ et $1-\varrho$, et les dérivées du second ordre — par des combinaisons linéaires des différences finies pour les secondes dérivées à deux niveaux temporels voisins des coefficients ω et $1-\omega$ (voir (2.4)).

2. Considérons dans l'espace euclidien à $(1+n)$-*dimensions* R^{1+n} un ensemble de points nodaux ayant les coordonnées

$$x_0^{m_0} = m_0 k, \quad x_i^{m_i} = m_i h \quad (i = 1, \dots, n), \tag{2.1}$$

où $m_0 = 0, 1, \dots, N_0$, $m_i = -1, 0, 1, \dots, N+1$ $(i = 1, \dots, n)$, $0 < k = \tau/N_0$, $0 < h = \sigma/N$, N_0 et N sont des nombres naturels.

Désignons le point nodal $(x_0^{m_0}, x_1^{m_1}, \dots, x_n^{m_n})$ par x^M, où $M = (m_0, m_1, \dots, m_n)$ et soit

$$\begin{aligned} Z &= \{M\colon 0 \leqslant m_0 \leqslant N_0,\ -1 \leqslant m_i \leqslant N+1,\ i = 1, \dots, n\}, \\ Z_1 &= \{M\colon 0 \leqslant m_0 \leqslant N_0 - 1,\ -1 \leqslant m_i \leqslant N,\ i = 1, \dots, n\}, \\ Z_2 &= \{M\colon 0 \leqslant m_0 \leqslant N_0 - 1,\ 0 \leqslant m_i \leqslant N+1,\ i = 1, \dots, n\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Introduisons aussi les notations suivantes:

$$\begin{aligned} i(M) &= (m_0, m_1, \dots, m_{i-1}, m_i + 1, m_{i+1}, \dots, m_n) \\ &\qquad\qquad (i = 0, 1, \dots, n,\ M \in Z_1), \\ -i(M) &= (m_0, m_1, \dots, m_{i-1}, m_i - 1, m_{i+1}, \dots, m_n) \\ &\qquad\qquad (i = 1, \dots, n,\ M \in Z_2). \end{aligned} \tag{2.3}$$

On suppose qu'à chaque multi-indice $M \in Z$ correspond un système de nombres réels

$$v^M = (v_1^M, \dots, v_p^M) \tag{2.4}$$

et on admet que

$$\begin{aligned} v_l^{M0} &= \frac{1}{k}\left(v_l^{0(M)} - v_l^M\right), \\ v_{l\varrho}^{Mi} &= \frac{1}{2h}\left[\varrho\left(v_l^{i(0(M))} - v_l^{-i(0(M))}\right) + (1-\varrho)\left(v_l^{i(M)} - v_l^{-i(M)}\right)\right], \\ v_{l\varrho}^{MI} &= \left(v_{l\varrho}^{M1}, \dots, v_{l\varrho}^{Mn}\right), \\ v_{l\omega}^{-Mij} &= \frac{1}{2h^2}\Big[\omega\Big(v_l^{i(0(M))} + v_l^{j(0(M))} + v_l^{-i(0(M))} + v_l^{-j(0(M))} - 2v_l^{0(M)} - \\ &\quad - v_l^{i(-j(0(M)))} - v_l^{-i(j(0(M)))}\Big) + (1-\omega)\Big(v_l^{i(M)} + v_l^{j(M)} + v_l^{-i(M)} + v_l^{-j(M)} - \\ &\quad - 2v_l^M - v_l^{i(-j(M))} - v_l^{-i(j(M))}\Big)\Big], \\ v_{l\omega}^{+Mij} &= \frac{1}{2h^2}\Big[\omega\Big(-v_l^{i(0(M))} - v_l^{j(0(M))} - v_l^{-i(0(M))} - v_l^{-j(0(M))} + 2v_l^{0(M)} + \\ &\quad + v_l^{i(j(0(M)))} + v_l^{-i(-j(0(M)))}\Big) + (1-\omega)\Big(-v_l^{i(M)} - v_l^{j(M)} - v_l^{-i(M)} - v_l^{-j(M)} + \\ &\quad + 2v_l^M + v_l^{i(j(M))} + v_l^{-i(-j(M))}\Big)\Big] \\ &\qquad (l = 1, \dots, p,\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, n,\ M \in Z_1 \cap Z_2), \end{aligned} \tag{2.4}$$

où ϱ et ω sont des nombres de l'intervalle $[0, 1]$.

3. Dans tout le travail nous supposerons satisfaites les hypothèses suivantes:

1) les fonctions scalaires $f_l(x, u, q, w)$ $(l = 1, \ldots, p)$, $x = (x_0, x_1, \ldots \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_p)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $w = (w_{11}, \ldots, w_{1n}, \ldots, w_{n1}, \ldots \ldots, w_{nn})$ sont de classe C^1 dans l'ensemble

$$D = [0, \tau] \times [0, \sigma]^n \times R^{p+n+n^2} \tag{3.1}$$

et satisfont dans cet ensemble aux conditions

$$\left|\frac{\partial f_l}{\partial u_\mu}\right| \leqslant L, \quad \left|\frac{\partial f_l}{\partial q_i}\right| \leqslant \Gamma, \quad 0 < g \leqslant \frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}\right|, \quad \frac{\partial f_l}{\partial w_{ji}} = \frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}} \tag{3.2}$$

$$(l = 1, \ldots, p, \mu = 1, \ldots, p, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n)$$

où $L > 0$, Γ et g sont des nombres,

2) pour des indices fixés l, i, j $(1 \leqslant l \leqslant p, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n)$ la fonction $\partial f_l / \partial w_{ij}$ est toujours non négative ou toujours non positive,

3) les fonctions $u_l(x)$ $(l = 1, \ldots, p)$ sont de classe C^2 dans l'ensemble

$$E = [0, \tau] \times [0, \sigma]^n \tag{3.3}$$

et satisfont au système d'équations différentielles partielles

$$\frac{\partial u_l}{\partial x_0} = f_l\left(x, u, \frac{\partial u_l}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}\right) \quad (l = 1, \ldots, p) \tag{3.4}$$

où $u = (u_1, \ldots, u_p)$, $\dfrac{\partial u_l}{\partial x} = \left\{\dfrac{\partial u_l}{\partial x_i}\right\}$, $\dfrac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} = \left\{\dfrac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j}\right\}$ $(i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n)$ ainsi qu'aux conditions aux limites

$$\begin{aligned} u_l(x) &= \varphi_{l0}(x) \quad \text{pour } x_0 = 0, \\ \frac{\partial u_l(x)}{\partial x_i} &= \varphi_{li}(x) \quad \text{pour } x_i = 0, \\ \frac{\partial u_l(x)}{\partial x_i} &= \psi_{li}(x) \quad \text{pour } x_i = \sigma \\ &(l = 1, \ldots, p, i = 1, \ldots, n), \end{aligned} \tag{3.5}$$

où les fonctions φ_{li} et ψ_{li} $(l = 1, \ldots, p, i = 1, \ldots, n)$ sont de classe C^2 sur les hyperplans $x_i = 0$ et $x_i = \sigma$ respectivement,

4) les pas h et k sont tels que

$$\begin{gathered} \frac{\omega}{h} g - \frac{1}{2}\varrho\Gamma \geqslant 0, \quad \frac{(1-\omega)g}{h} - \frac{1}{2}(1-\varrho)\Gamma \geqslant 0, \\ \frac{2}{h^2}(1-\omega)\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}} - \frac{1}{k} \leqslant 0 \quad (l = 1, \ldots, p, (x, u, q, w) \in D). \end{gathered} \tag{3.6}$$

4. Dans la suite nous admettrons que les nombres v_l^M $(l = 1, \ldots, p,$ $M \in Z)$ satisfont au système d'équations aux différences finies

$$
(4.1)\quad
\begin{aligned}
v_l^M &= \varphi_{l0}(x^M) && \text{pour } m_0 = 0,\\
v_l^{-i(M)} &= v_l^{i(M)} - 2h\varphi_{li}(x^M) && \text{pour } m_i = 0,\\
v_l^{i(M)} &= v_l^{-i(M)} + 2h\psi_{li}(x^M) && \text{pour } m_i = N,\\
v_l^{i(j(M))} &= v_l^{-i(-j(M))} + 2h[\psi_{li}(x^M) + \psi_{lj}(x^M)] && \text{pour } m_i = N \text{ et } m_j = N\ (i \neq j),\\
v_l^{-i(j(M))} &= v_l^{i(-j(M))} - 2h[\varphi_{li}(x^M) - \psi_{li}(x^M)] && \text{pour } m_i = 0 \text{ et } m_j = N\ (i \neq j),\\
v_l^{-i(-j(M))} &= v_l^{i(j(M))} - 2h[\varphi_{li}(x^M) + \varphi_{lj}(x^M)] && \text{pour } m_i = 0 \text{ et } m_j = 0\ (i \neq j),\\
v_l^{i(-j(M))} &= v_l^{-i(j(M))} + 2h[\psi_{li}(x^M) - \varphi_{lj}(x^M)] && \text{pour } m_i = N \text{ et } m_j = 0\ (i \neq j),\\
v_l^{M0} &= f_l(x^M, v^M, v_{l\varrho}^{MI}, v_{l\omega}^{MIJ})\\
&\qquad (l = 1, \ldots, p, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n, M \in Z_1 \cap Z_2),
\end{aligned}
$$

où $v^M = (v_1^M, \ldots, v_p^M)$ et

$$v_{l\omega}^{MIJ} = (v_{l\omega}^{M11}, \ldots, v_{l\omega}^{M1n}, \ldots, v_{l\omega}^{Mn1}, \ldots, v_{l\omega}^{Mnn}),$$

$$
(4.2)\qquad \dot{v}_{l\omega}^{Mij} = \begin{cases} v_{l\omega}^{-Mij} & \text{pour } i = j \text{ ou } \dfrac{\partial f_l}{\partial w_{ij}} \leqslant 0,\\[2ex] v_{l\omega}^{+Mij} & \text{pour } i \neq j \text{ et } \dfrac{\partial f_l}{\partial w_{ij}} \geqslant 0 \end{cases}
$$

$$(l = 1, \ldots, p, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n)$$

et les fonctions φ_{li} et ψ_{li} sont les mêmes que dans (3.5).

5. Désignons par $u^M = \{u_l^M\}$ $(l = 1, \ldots, p)$ la valeur de la solution du problème différentiel (3.4), (3.5) au point nodal x^M engendré par le multi-indice $M \in Z_1 \cap Z_2$ et admettons que

$$
(5.1)\quad
\begin{aligned}
u_l^{-i(M)} &= u_l^{i(M)} - 2h\varphi_{li}(x^M) \quad \text{pour } m_i = 0,\\
u_l^{i(M)} &= u_l^{-i(M)} + 2h\psi_{li}(x^M) \quad \text{pour } m_i = N,\\
u_l^{i(j(M))} &= u_l^{-i(-j(M))} + 2h[\psi_{li}(x^M) + \psi_{lj}(x^M)]\\
&\qquad \text{pour } m_i = N \text{ et } m_j = N\ (i \neq j),\\
u_l^{-i(j(M))} &= u_l^{i(-j(M))} - 2h[\varphi_{li}(x^M) - \psi_{lj}(x^M)]\\
&\qquad \text{pour } m_i = 0 \text{ et } m_j = N\ (i \neq j),\\
u_l^{-i(-j(M))} &= u_l^{i(j(M))} - 2h[\varphi_{li}(x^M) + \varphi_{lj}(x^M)]\\
&\qquad \text{pour } m_i = 0 \text{ et } m_j = 0\ (i \neq j),\\
u_l^{i(-j(M))} &= u_l^{-i(j(M))} + 2h[\psi_{li}(x^M) - \varphi_{lj}(x^M)]\\
&\qquad \text{pour } m_i = N \text{ et } m_j = 0\ (i \neq j)\\
&\qquad (l = 1, \ldots, p, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n, M \in Z_1 \cap Z_2),
\end{aligned}
$$

où les fonctions φ_{li} et ψ_{li} sont les mêmes que celles qui figurent dans (3.5).

LEMME 1. *Si les hypothèses de 3 sont satisfaites, u_l^M vérifient les égalités*

$$(5.2)\quad u_l^{M0} = f_l(x^M, u^M, u_{l\varrho}^{MI}, u_{l\omega}^{MIJ}) + \eta_{\varrho\omega}^M(l; h, k) \quad (l = 1, \ldots, p,\ M \in Z_1 \cap Z_2)$$

(voir (2.4), (4.2)) *et*

$$(5.3)\quad \varepsilon_{\varrho\omega}(l; h, k) = \max_{M \in Z_1 \cap Z_2} |\eta_{\varrho\omega}^M(l; h, k)| \to 0 \quad \textit{lorsque}\ (h, k) \to (0, 0).$$

Démonstration. Soit

$$(5.4)\quad w_l(x) = \begin{cases} u_l(x) \quad \text{pour } x \in E, \\ u_l(x_0 x_1, \ldots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) + 2x_i \varphi_{li}(\check{i}(x)) \\ \qquad \text{pour } x_0 \in [0, \tau];\ x_j \in [0, \sigma],\ j = 1, \ldots, n,\ j \neq i; \\ \qquad\qquad x_i \in [-\sigma, 0) \quad (i = 1, \ldots, n), \\ u_l(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, 2\sigma - x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - 2(\sigma - x_i)\psi_{li}(\hat{i}(x)) \\ \qquad \text{pour } x_0 \in [0, \tau];\ x_j \in [0, \sigma],\ j = 1, \ldots, n,\ j \neq i; \\ \qquad\qquad x_i \in (\sigma, 2\sigma] \quad (i = 1, \ldots, n), \\ u_l(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, 2\sigma - x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, 2\sigma - x_j, x_{j+1}, \ldots \\ \qquad \ldots, x_n) - 2(\sigma - x_i)\psi_{li}(\hat{i}\hat{j}(x)) - 2(\sigma - x_j)\psi_{lj}(\hat{i}\hat{j}(x)) \\ \qquad \text{pour } x_0 \in [0, \tau];\ x_s \in [0, \sigma],\ s = 1, \ldots, n,\ s \neq i \\ \qquad \text{et } s \neq j;\ x_i \in (\sigma, 2\sigma] \text{ et } x_j \in (\sigma, 2\sigma] \\ \qquad\qquad (i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n,\ i \neq j), \\ u_l(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, 2\sigma - x_j, x_{j+1}, \ldots \\ \qquad \ldots, x_n) + 2x_i \varphi_{li}(\check{i}\hat{j}(x)) - 2(\sigma - x_j)\psi_{lj}(\check{i}\hat{j}(x)) \\ \qquad \text{pour } x_0 \in [0, \tau];\ x_s \in [0, \sigma],\ s = 1, \ldots, n,\ s \neq i \\ \qquad \text{et } s \neq j;\ x_i \in [-\sigma, 0) \text{ et } x_j \in (\sigma, 2\sigma] \\ \qquad\qquad (i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n,\ i \neq j), \\ u_l(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \\ \qquad + 2x_i \varphi_{li}(\check{i}\check{j}(x)) + 2x_j \varphi_{lj}(\check{i}\check{j}(x)) \\ \qquad \text{pour } x_0 \in [0, \tau];\ x_s \in [0, \sigma],\ s = 1, \ldots, n,\ s \neq i \\ \qquad \text{et } s \neq j;\ x_i \in [-\sigma, 0) \text{ et } x_j \in [-\sigma, 0) \\ \qquad\qquad (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,\ i \neq j), \\ u_l(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, 2\sigma - x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \ldots \\ \qquad \ldots, x_n) - 2(\sigma - x_i)\psi_{li}(\hat{i}\check{j}(x)) + 2x_i \varphi_{lj}(\hat{i}\check{j}(x)) \\ \qquad \text{pour } x_0 \in [0, \tau];\ x_s \in [0, \sigma],\ s = 1, \ldots, n,\ s \neq i \\ \qquad \text{et } s \neq j;\ x_i \in (\sigma, 2\sigma] \text{ et } x_j \in [-\sigma, 0) \\ \qquad\qquad (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,\ i \neq j), \end{cases}$$

où $l = 1, \ldots, p$ et $\check{i}(x) = (x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $\hat{i}(x) = (x_0, x_1, \ldots$ $\ldots, x_{i-1}, \sigma, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

La fonction $w_l(x)$ $(1 \leqslant l \leqslant p)$ est de classe C^2 dans son domaine d'existence. Par conséquent, les différences w_l^{M0}, $w_{l\varrho}^{Mi}$, et $w_{l\omega}^{-Mij}$, $w_{l\omega}^{+Mij}$ (voir (2.4)) sont des valeurs approchées des dérivées $\partial w_l/\partial x_0$, $\partial w_l/\partial x_i$ et $\partial^2 w_l/\partial x_i \partial x_j$ respectivement. Mais puisque $w_l(x^M) = u_l(x^M)$ pour arbitraire $M \in Z$, on a $w_l^{M0} = u_l^{M0}$, $w_{l\varrho}^{Mi} = u_{l\varrho}^{Mi}$, $w_{l\omega}^{-Mij} = u_{l\omega}^{-Mij}$, $w_{l\omega}^{+Mij} = u_{l\omega}^{+Mij}$ pour $M \in Z_1 \cap Z_2$. Ainsi u_l^{M0}, $u_{l\varrho}^{Mi}$ et $u_{l\omega}^{-Mij}$, $u_{l\omega}^{+Mij}$ sont des approximations des dérivées $\partial u_l/\partial x_0$, $\partial u_l/\partial x_i$ et $\partial^2 u_l/\partial x_i \partial x_j$ respectivement on chaque point x^M tel que $M \in Z_1 \cap Z_2$ car $\partial u_l/\partial x_i = \partial w_l/\partial x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ et $\partial^2 u_l/\partial x_i \partial x_j = \partial^2 w_l/\partial x_i \partial x_j$ $(i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n)$ sur l'ensemble E (voir (5.4)). D'où, vu la continuité des fonctions $f_l(x, u, q, w)$ $(l = 1, \ldots, p)$ sur l'ensemble D, on obtient la formule (5.2) et la condition (5.3), ce qu'il fallait démontrer.

6. Lemme 2. *Soit*

$$r_l^M = u_l^M - v_l^M, \quad s_l^{m_0} = \max_m r_l^M, \quad z_l^{m_0} = \min_m r_l^M, \quad R_l^{m_0} = \max_m |r_l^M| \tag{6.1}$$
$$(l = 1, \ldots, p, \; M = (m_0, m_1, \ldots, m_n) = (m_0, m) \in Z)$$

où les nombres u_l^M et v_l^M sont déterminés par 4 et 5 respectivement. Plus loin nous supposons que les conditions de 3 sont satisfaites.

Dans toutes ces hypothèses,

$$s_l^0 = z_l^0 = R_l^0 \quad (l = 1, \ldots, p) \tag{6.2}$$

et

$$s_l^{m_0 0} \leqslant L \sum_{\mu=1}^{p} R_\mu^{m_0} + \varepsilon_{\varrho\omega}(l; h, k), \qquad z_l^{m_0 0} \geqslant -L \sum_{\mu=1}^{p} R_\mu^{m_0} - \varepsilon_{\varrho\omega}(l; h, k) \tag{6.3}$$

pour $l = 1, \ldots, p$ *et* $m_0 = 0, 1, \ldots, N_0 - 1$ *où* $s_l^{m_0 0} = \dfrac{1}{k}(s_l^{m_0+1} - s_l^{m_0})$, $z_l^{m_0 0} = \dfrac{1}{k}(z_l^{m_0+1} - z_l^{m_0})$.

Démonstration. Les égalités (6.2) résultent directement de (6.1) et de définition u_l^M et v_l^M.

Nous prouverons la première inégalité de (6.3).

Notons que de (4.1) et (5.1) on obtient

$$\begin{aligned}
r_l^{-i(M)} &= r_l^{i(M)} && \text{pour } m_i = 0,\\
r_l^{i(M)} &= r_l^{-i(M)} && \text{pour } m_i = N,\\
r_l^{i(j(M))} &= r_l^{-i(-j(M))} && \text{pour } m_i = N \text{ et } m_j = N \ (i \neq j),\\
r_l^{-i(j(M))} &= r_l^{i(-j(M))} && \text{pour } m_i = 0 \text{ et } m_j = N \ (i \neq j),\\
r_l^{-i(-j(M))} &= r_l^{i(j(M))} && \text{pour } m_i = 0 \text{ et } m_j = 0 \ (i \neq j),\\
r_l^{i(-j(M))} &= r_l^{-i(j(M))} && \text{pour } m_i = N \text{ et } m_j = 0 \ (i \neq j)
\end{aligned} \tag{6.4}$$
$$(l = 1, \ldots, p, i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, n, \; M \in Z_1 \cap Z_2).$$

Nous pouvons maintenant introduire les notations

$$s_l^{m_0+l} = r_l^{0(A(l))}, \qquad s_l^{m_0} = r_l^{B(l)} \tag{6.5}$$

où $A(l) \in Z_1 \cap Z_2$ et $B(l) \in Z_1 \cap Z_2$ $(l = 1, \ldots, p)$.

Il découle de la définition $s_l^{m_0 0}$ et de (6.5) que

$$s_l^{m_0 0} = \frac{1}{k}\left(r_l^{0(A(l))} - r_l^{A(l)}\right) + \frac{1}{k}\left(r_l^{A(l)} - r_l^{B(l)}\right). \tag{6.6}$$

A partir de (6.6), ainsi que de (4.1), (5.2) on obtient

$$\begin{aligned} s_l^{m_0 0} &= u_l^{A(l)0} - v_l^{A(l)0} + \frac{1}{k}\left(r_l^{A(l)} - r_l^{B(l)}\right) \\ &= \eta_{\varrho\omega}^{A(l)}(l; h, k) + f_l(x^{A(l)}, u^{A(l)}, u_{l\varrho}^{A(l)I}, u_{l\omega}^{A(l)IJ}) - \\ &\qquad - f_l(x^{A(l)}, v^{A(l)}, v_{l\varrho}^{A(l)I}, v_{l\omega}^{A(l)IJ}) + \frac{1}{k}\left(r_l^{A(l)} - r_l^{B(l)}\right). \end{aligned} \tag{6.7}$$

En appliquant le théorème de la moyenne, nous avons

$$\begin{aligned} s_l^{m_0 0} &= \eta_{\varrho\omega}^{A(l)}(l; h, k) + \sum_{\mu=1}^{p} \frac{\partial f_l}{\partial u_\mu}(-) r_\mu^{A(l)} + \\ &+ \frac{1}{2h} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial q_i}(-)\left[\varrho\left(r_l^{i(0(A(l)))} - r_l^{-i(0(A(l)))}\right) + (1-\varrho)\left(r_l^{i(A(l))} - r_l^{-i(A(l))}\right)\right] + \\ &+ \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}}(-)\left[\omega\left(r_l^{i(0(A(l)))} - 2r_l^{0(A(l))} + r_l^{-i(0(A(l)))}\right) + \right. \\ &\qquad \left. + (1-\omega)\left(r_l^{i(A(l))} - 2r_l^{A(l)} + r_l^{-i(A(l))}\right)\right] + \\ &+ \frac{1}{2h^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left|\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}(-)\right| \left[\omega\left(-r_l^{i(0(A(l)))} - r_l^{j(0(A(l)))} - r_l^{-i(0(A(l)))} - r_l^{-j(0(A(l)))} + \right.\right. \\ &\qquad \left. + 2r_l^{0(A(l))} + r_l^{i(s(l;i,j)j(0(A(l))))} + r_l^{-i(-s(l;i,j)j(0(A(l))))}\right) + \\ &\qquad + (1-\omega)\left(-r_l^{i(A(l))} - r_l^{j(A(l))} - r_l^{-i(A(l))} - r_l^{-j(A(l))} + 2r_l^{A(l)} + \right. \\ &\qquad \left.\left. + r_l^{i(s(l;i,j)j(A(l)))} + r_l^{-i(-s(l;i,j)j(A(l)))}\right)\right] + \frac{1}{k}\left(r_l^{A(l)} - r_l^{B(l)}\right) \end{aligned} \tag{6.8}$$

où les dérivées sont prises en des points convenables $(-)$ et

$$s(l; i, j) = \begin{cases} +1 & \text{pour } \dfrac{\partial f_l}{\partial w_{ij}} \geqslant 0, \\ -1 & \text{pour } \dfrac{\partial f_l}{\partial w_{ij}} \leqslant 0. \end{cases} \tag{6.9}$$

En groupant convenablement les expressions du second membre de l'égalité (6.8) on a

$$
\begin{aligned}
(6.10)\qquad s_l^{m_0 0} &= \eta_{\varrho\omega}^{A(l)}(l; h, k) + \sum_{\mu=1}^{p} \frac{\partial f_l}{\partial u_\mu}(-) r_\mu^{A(l)} + \\
&+ \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\omega}{h}\left(\frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}}(-) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}(-)\right|\right) + \frac{1}{2}\varrho\frac{\partial f_l}{\partial q_i}(-)\right]\cdot\left(r_l^{i(0(A(l)))} - r_l^{0(A(l))}\right) + \\
&+ \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\omega}{h}\left(\frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}}(-) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}(-)\right|\right) - \frac{1}{2}\varrho\frac{\partial f_l}{\partial q_i}(-)\right]\times \\
&\qquad\qquad\times\left(r_l^{-i(0(A(l)))} - r_l^{0(A(l))}\right) + \\
&+ \frac{\omega}{2h^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left|\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}(-)\right|\cdot\left[\left(r_l^{i(s(l;i,j)j(0(A(l))))} - r_l^{0(A(l))}\right) + \right. \\
&\qquad\qquad\left. + \left(r_l^{-i(-s(l;i,j)j(0(A(l))))} - r_l^{0(A(l))}\right)\right] + \\
&+ \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1-\omega}{h}\left(\frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}}(-) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}(-)\right|\right) + \frac{1}{2}(1-\varrho)\frac{\partial f_l}{\partial q_i}(-)\right]\times \\
&\qquad\qquad\times\left(r_l^{i(A(l))} - r_l^{B(l)}\right) + \\
&+ \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1-\omega}{h}\left(\frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}}(-) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}(-)\right|\right) - \frac{1}{2}(1-\varrho)\frac{\partial f_l}{\partial q_i}(-)\right]\times \\
&\qquad\qquad\times\left(r_l^{-i(A(l))} - r_l^{B(l)}\right) + \\
&+ \frac{1-\omega}{2h^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\left|\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}(-)\right|\cdot\left[\left(r_l^{i(s(l;i,j)j(A(l)))} - r_l^{B(l)}\right) + \right. \\
&\qquad\qquad\left. + \left(r_l^{-i(-s(l;i,j)j(A(l)))} - r_l^{B(l)}\right) + 2\left(r_l^{A(l)} - r_l^{B(l)}\right)\right] + \\
&+ \left(\frac{2}{h^2}(1-\omega)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}}(-) - \frac{1}{k}\right)\cdot\left(r_l^{B(l)} - r_l^{A(l)}\right).
\end{aligned}
$$

Notons que des conditions (3.2) et (3.6) résultent les inégalités

$$
\frac{\omega}{h}\left(\frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}}(-) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}(-)\right|\right) + \frac{1}{2}\varrho\frac{\partial f_l}{\partial q_i}(-) \geqslant \frac{\omega}{h}g - \frac{1}{2}\varrho\Gamma \geqslant 0,
$$

$$
(6.11)\qquad \frac{\omega}{h}\left(\frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}}(-) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}(-)\right|\right) - \frac{1}{2}\varrho\frac{\partial f_l}{\partial q_i}(-) \geqslant \frac{\omega}{h}g - \frac{1}{2}\varrho\Gamma \geqslant 0,
$$

$$\frac{1-\omega}{h}\left(\frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}}(-)-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}(-)\right|\right)+\frac{1}{2}(1-\varrho)\frac{\partial f_l}{\partial q_i}(-)$$

$$\geqslant \frac{1-\omega}{h}g-\frac{1}{2}(1-\varrho)\Gamma \geqslant 0,$$

$$\frac{1-\omega}{h}\left(\frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}}(-)-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}(-)\right|\right)-\frac{1}{2}(1-\varrho)\frac{\partial f_l}{\partial q_i}(-)$$

$$\geqslant \frac{1-\omega}{h}g-\frac{1}{2}(1-\varrho)\Gamma \geqslant 0,$$

$$\frac{2}{h^2}(1-\omega)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}}(-)-\frac{1}{k}\leqslant 0,$$

tandis que (6.5) (voir aussi (6.4)) entraîne

$$\begin{aligned}
& r_l^{i(0(A(l)))}-r_l^{0(A(l))}\leqslant 0, \qquad r_l^{-i(0(A(l)))}-r_l^{0(A(l))}\leqslant 0,\\
& r_l^{i(s(l;i,j)j(0(A(l))))}-r_l^{0(A(l))}\leqslant 0, \qquad r_l^{-i(-s(l;i,j)j(0(A(l))))}-r_l^{0(A(l))}\leqslant 0,\\
& r_l^{i(A(l))}-r_l^{B(l)}\leqslant 0, \qquad r_l^{-i(A(l))}-r_l^{B(l)}\leqslant 0,\\
& r_l^{i(s(1;i,j)j(A(l)))}-r_l^{B(l)}\leqslant 0, \qquad r_l^{-i(-s(l;i,j)j(A(l)))}-r_l^{B(l)}\leqslant 0,\\
& r_l^{A(l)}-r_l^{B(l)}\leqslant 0.
\end{aligned}\tag{6.12}$$

Compte tenu des inégalités (6.11) et (6.12) nous obtenons dans (6.10)

$$s_l^{m_0 0}\leqslant \eta_{\varrho\omega}^{A(l)}(l;h,k)+\sum_{\mu=1}^{p}\frac{\partial f_l}{\partial u_\mu}(-)r_\mu^{A(l)}\leqslant \varepsilon_{\varrho\omega}(l;h,k)+L\sum_{\mu=1}^{p}R_\mu^{m_0}\tag{6.13}$$

(voir (5.3), (6.1) et (3.2)).

La démonstration de la première des inégalités (6.3) est ainsi terminée. La démonstration de la seconde inégalité (6.3) est tout à fait analogue. Le lemme 2 est donc entièrement prouvé.

7. Lemme 3. *Si les nombres* $R_l^{m_0}$ $(l=1,\ldots,p,\ m_0=0,1,\ldots,N_0)$ *sont définis par la formule* (6.1) *et les hypothèses du lemme* 2 *sont satisfaites, alors*

$$R^{m_0 0}\leqslant \varepsilon_{\varrho\omega}(h,k)+pLR^{m_0}\qquad (m_0=0,1,\ldots,N_0-1)\tag{7.1}$$

et $R^0=0$, *où*

$$R^{m_0}=\max_{1\leqslant l\leqslant p}R_l^{m_0},\qquad R^{m_0 0}=\frac{1}{k}(R^{m_0+1}-R^{m_0}),\tag{7.2}$$

$$\varepsilon_{\varrho\omega}(h,k)=\max_{1\leqslant l\leqslant p}\varepsilon_{\varrho\omega}(l;h,k)$$

(voir (5.3)).

Démonstration. La condition $R^0 = 0$ est satisfaite en vertu du lemme 2.

Afin de montrer (7.1) notons que $R^{m_0} = \max_{1\leqslant l\leqslant p}(\max(s_l^{m_0}, -z_l^{m_0}))$ pour $m_0 = 0, 1, \ldots, N_0$. Donc, en vertu du lemme 2 on a

$$R^{m_0 0} = \{\max_{1\leqslant l\leqslant p}[\max(s_l^{m_0}, -z_l^{m_0})]\}^0 \leqslant \max_{1\leqslant l\leqslant p}[\max(s_l^{m_0 0}, -z_l^{m_0 0})] \tag{7.3}$$
$$\leqslant \max_{1\leqslant l\leqslant p}\Big[\max\Big(\varepsilon_{\varrho\omega}(l; h, k)+L\sum_{\mu=1}^{p} R_\mu^{m_0}, \varepsilon_{\varrho\omega}(l; h, k)+L\sum_{\mu=1}^{p} R_\mu^{m_0}\Big)\Big]$$
$$\leqslant \varepsilon_{\varrho\omega}(h, k)+pLR^{m_0}$$

ce qui termine la démonstration du lemme 3.

8. LEMME 4. *Si les nombres $R^{m_0}(m_0 = 0, 1, \ldots)$ vérifient les inégalités aux différences finies*

$$R^{m_0 0} \leqslant KR^{m_0}+\varepsilon \quad (m_0 = 0, 1, \ldots) \tag{8.1}$$

et la condition $R^0 = 0$ où $0 < K =$ const, $0 < k =$ const et $0 \leqslant \varepsilon$ ne dépend pas de m_0, alors

$$R^{m_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{K}(e^{Kkm_0}-1) \quad (m_0 = 0, 1, \ldots) \tag{8.2}$$

Le lemme 4 est facile à démontrer par recurrence.

9. THÉORÈME 1. *Si les hypothèses du lemme 2 sont satisfaites,*

1) *l'erreur de la méthode des différences finies* (4.1) *peut être estimée comme il suit:*

$$|r_l^M| \leqslant \frac{\varepsilon_{\varrho\omega}(h, k)}{L}(e^{pLkm_0}-1) \quad (l = 1, \ldots, p, m_0 = 0, 1, \ldots, N_0) \tag{9.1}$$

où $\varepsilon_{\varrho\omega}(h, k)$ est défini par la formule (7.2),

2) *la méthode des différences finies* (4.1) *est convergente, c'est-à-dire*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} r_l^M = 0 \quad (l = 1, \ldots, p). \tag{9.2}$$

Démonstration. Comme (9.2) résulte de (9.1), il suffit de montrer (9.1). Des lemmes 3 et 4 on obtient

$$R^{m_0} \leqslant \frac{\varepsilon_{\varrho\omega}(h, k)}{L}(e^{pLkm_0}-1) \quad (m_0 = 0, 1, \ldots, N_0). \tag{9.3}$$

Mais il résulte des définitions (7.2) et (6.1) que $|r_l^M| \leqslant R^{m_0}$, donc

$$|r_l^M| \leqslant \frac{\varepsilon_{\varrho\omega}(h, k)}{L}(e^{pLkm_0}-1) \quad (m_0 = 0, 1, \ldots, N_0) \tag{9.4}$$

ce qui achève la prouve du théorème 1.

Reçu par la Rédaction le 28. 1. 1974