ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLIII (1983)

Remarque sur une propriété asymptotique des solutions d'une équation différentielle à paramètre retardé

par Z. Mikołajska (Kraków)

Résumé. Dans la présente note nous envisageons la solution $x(t)$, $x\colon [t_0-\tau, \omega) \to R^n$, non continuable, de l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x_t)$ (où $x_t(s) = x(t+s)$ pour $-\tau \leqslant s \leqslant 0$) et, dans le cas où $x(t)$ est bornée, nous démontrons un théorème sur l'ensemble des points limites de $x(t)$. Dans le théorème II nous démonstrons que, dans le cas où sont satisfaites les conditions $\tilde{Z}$ et Z_3^*, la solution x est bornée.

Dans le livre [1] de N. Rouche, P. Habets et M. Laloy on trouve le théorème (4.2) (cf. VII) que voici:

Admettons les hypothèses suivantes:

Hypothèses Z_1. Ω est un ensemble ouvert dans R^n, $f\colon \Omega \to R^n$, $x \to f(x)$ est une fonction continue dans Ω.

Envisageons le système d'équations

$$x' = f(x) \tag{1.1}$$

avec la condition initiale

$$x(0) = x_0. \tag{1.2}$$

Par $x(t)$ désignons la solution non continuable de l'équation (1.1) avec la condition initiale (1.2), $x\colon (\alpha, \omega) \to R^n$, $I = (\alpha, \omega)$. $\Lambda^*(x)$ désigne l'ensemble des points limites de $x(t)$.

Hypothèses Z_2. Soit $S \subset \Omega$ un ensemble fermé par rapport à Ω. Posons $M = \partial S \cap \partial\Omega$. Supposons qu'il existe une fonction $V\colon \Omega \to R$, localement lipschitzienne, telle que $D^+V(x) \leqslant 0$ sur Ω. Supposons que l'ensemble $E = \{x \in \Omega\colon D^+V(x) = 0\}$ ne contienne pas d'orbites non continuables.

Hypothèses Z_3. Pour chaque $\varrho > 0$ il existe une fonction $\Phi\colon \Omega \to R$ positive et continue dans Ω, et des constantes positives $A, B, C, D > 0$ telles que pour chaque $x \in S \setminus B(M, \varrho)$

$$\Phi(x)\cdot\|f(x)\| < A, \tag{i}$$

$$(\|x\| > B) \Rightarrow \Phi(x)D^+V(x) \leqslant -C, \tag{ii}$$

$$V(x) \geqslant -D \tag{iii}$$

où $B(M, \varrho) = \{x \in R^n\colon\ d(x, M) \leqslant \varrho\}$, $d(x, M)$ est la distance de x à M,

$$D^+ V(x) = \limsup_{h \to 0_+} \frac{V(x+hf(x)) - V(x)}{h}.$$

THÉORÈME I. *Les hypothèses Z_1, Z_2, Z_3 étant admises chaque solution $x(t)$ de l'équation* (1.1) *telle que $x(I^+) \in S$ tend vers M pour $t \to \omega$.*

On voit facilement que des hypothèses Z_1 et Z_2 il résulte qu'il n'existe pas de points limites de $x(t)$ dans Ω (cf. le théorème de J. P. La Salle [2]). Des hypothèses Z_3 on obtient l'information que la solution $x(t)$ est bornée. Ainsi le théorème en question peut être obtenu du théorème suivant:

Envisageons l'équation

$$x'(t) = f(t, x_t) \tag{1.3}$$

où $x_t(s) = x(t+s)$ pour $-\tau \leqslant s \leqslant 0$.

HYPOTHÈSES $\bar{Z}_1$. Ω est un ensemble ouvert dans R^n, $C^{[-\tau,0]}$ l'espace des fonctions continues dans $[\tau, 0]$, avec la norme $|\varphi| = \sup \|\varphi(s)\|$ pour $-\tau \leqslant s \leqslant 0$, $\tilde{C} = \{\varphi \in C^{[-\tau,0]}\colon\ \varphi(s) \in \Omega$ pour $s \in [-\tau, 0]\}$, $f\colon I \times \tilde{C} \to R^n$, $I = (\alpha, \beta)$, f continue dans $I \times \tilde{C}$.

Par $x(t)$ désignons la solution non continuable de l'équation (1.3) avec la condition initiale

$$x_{t_0}(s) = x(t_0+s) = \varphi_0(s) \quad \text{pour } -\tau \leqslant s \leqslant 0, \tag{1.4}$$
$$x\colon [t_0-\tau, \omega) \to R^n.$$

Désignons par $\Lambda^+(x(t))$ l'ensemble positif des points limites de l'intégrale $x(t)$, donc $y \in \Lambda^+(x)$. Signific qu'il existe une suite $\{t_v\}$, $t_v \in [t_0, \omega)$, $t_v \to \omega$ telle que $x(t_v) \to y$.

HYPOTHÈSES $\bar{Z}_2$.

$$\Lambda^+(x) \cap \Omega = 0 \tag{1.5}$$

c'est-à-dire qu'il n'existe pas de points de l'ensemble $\Lambda^+(x)$ dans l'intérieur de Ω.

HYPOTHÈSES $\bar{Z}_3$. La solution $x(t)$ de l'équation (1.3) est bornée et

$$x(t) \in S \quad \text{pour } t_0 \leqslant t < \omega, \tag{1.6}$$

où $S \subset \Omega$ est fermé par rapport à Ω.

THÉORÈME $\bar{\text{I}}$. *Les hypothèses $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \bar{Z}_3$ étant admises, $x(t)$ tend vers l'ensemble $M = \partial S \cap \partial\Omega$, c'est-à-dire que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $T_\varepsilon \geqslant t_0$ tel que*

$$d(x(t), M) \leqslant \varepsilon \quad \textit{pour } t \geqslant T_\varepsilon. \tag{1.7}$$

Démonstration. Admettons que (1.7) n'ait pas lieu. C'est-à-dire qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $t_v \in [t_0, \omega)$, $t_v \to \omega$ tels que

$$d(x(t_v), M) > \varepsilon_0 \quad \text{pour } v = 1, 2, \ldots \tag{1.8}$$

La suite $\{\|x(t_v)\|\}$ est bornée, on peut donc choisir une suite partielle $\{\tilde{t}_v\}$ de la suite $\{t_v\}$ telle que

$$x(\tilde{t}_v) \to \xi_0.$$

S étant fermé par rapport à Ω, on a

$$\xi_0 \in S \cup \partial S \cap \partial \Omega = S \cup M.$$

Mais de l'hypothèse $\bar{Z}_2$ il vient $\xi_0 \notin S$ et par suite $\xi_0 \in M$, d'où, en vertu de (1.8), on a

$$d(\xi_0, M) \geqslant \varepsilon_0 > 0 = d(\xi_0, M).$$

La contradiction obtenue termine la démonstration.

Les hypothèses $\bar{Z}_1$ étant admises, l'hypothèse $\bar{Z}_3$ résulte par exemple de l'hypothèse suivante:

Hypothèses Z_3^*. Il existe une fonction V continue dans $I \times \Omega$ et satisfaisant localement à la condition de Lipschitz par rapport à x, et deux constantes $B > 0$, $C > 0$ telles que

$$(D^+ V)(t, x, \varphi) \leqslant -C\|f(t, \varphi)\|, \tag{1.9}$$

pour $\varphi \in \tilde{C}$, $\varphi(0) = x$, $\|x\| \geqslant B$,

$$v(t, x) > -D, \tag{1.10}$$

$$(D^+ V)(t, x, \varphi) \leqslant 0 \quad \text{pour } t \in I,\ x \in \Omega,\ \varphi \in \tilde{C},\ \varphi(0) = x \tag{1.11}$$

où

$$(D^+ V)(t, x, \varphi) \overset{\text{df}}{=} \limsup_{h \to 0_+} \frac{V(t+h, x+hf(t, \varphi)) - V(t, x)}{h}.$$

Théorème II. *Les hypothèses* $\bar{Z}_1$ *et* Z_3^* *étant admises,* $x(t)$ *est bornée.*

Démonstration. Supposons que $x(t)$ ne soit pas bornée. Il existe donc une suite $\{t_v\}$, $t_v \in [t_0, \omega)$, $t_v \to \omega$ telle que

$$\|x(t_v)\| \to \infty \quad \text{pour } v \to \infty \tag{1.12}$$

et par suite

$$|x_{t_v}(\cdot)| = \sup_{-\tau \leqslant s \leqslant 0} \|x(t_v + s)\|. \tag{1.13}$$

On a

$$|x_{t_v}(\cdot)| \geqslant \|x(t_v)\| \geqslant 2B \quad \text{pour } v \geqslant N. \tag{1.14}$$

En vertu de (1.12) on peut extraire de la suite $\{t_v\}$ une suite $\{\bar{t}_v\}$ telle que

$$\|x(\bar{t}_{v+1}) - x(\bar{t}_v)\| \geqslant 2B \quad \text{pour } v \geqslant \bar{N}. \tag{1.15}$$

La continuité de $x(t)$ entraîne qu'il existe pour chaque v un $\delta_v > 0$ tel que

$$|x_t(\cdot)| \geqslant \|x(t)\| \geqslant B \quad \text{pour } \bar{t}_v \leqslant t \leqslant \bar{t}_v + \delta_v \tag{1.16}$$

et

$$\|x(\bar{t}_v + \delta_v) - x(t_v)\| \geqslant B \quad \text{pour } v \geqslant \bar{N}. \tag{1.17}$$

On peut choisir $\delta_v > 0$ de telle façon que

$$\bar{t}_v < t_v + \delta_v \leqslant t_{v+1}. \tag{1.18}$$

Envisageons la fonction composée $v(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} V(t, x(t))$,

$$D^+ v(t) = \limsup_{h \to 0_+} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \limsup_{h \to 0_+} \frac{V(t+h, x(t+h)) - V(t, x(t))}{h}$$

$$= (D^+ V)(t, x(t), x_t(\cdot)) + \limsup_{h \to 0_+} \frac{V(t+h, x(t+h)) - V(t+h, x(t) + hf(t, x_t))}{h},$$

$V(t, x)$ étant lipschitzienne, on a

$$\|V(t+h, x(t+h)) - V(t+h, x(t) + hf(t, x_t))\| \leqslant L\|x(t+h) - x(t) - hf(t, x_t)\|$$
$$= Lh \left\| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} - f(t, x_t) \right\|$$

et par suite $D^+ v(t) = (D^+ V)(t, x(t), x_t)$.

Ainsi nous avons

$$v(\bar{t}_v + \delta_v) - v(\bar{t}_v) \leqslant \int_{\bar{t}_v}^{\bar{t}_v + \delta_v} D^+ v(s)\, ds = \int_{\bar{t}_v}^{\bar{t}_v + \delta_v} (D^+ V)(s, x(s), x_s)\, ds$$

d'où en vertu de (1.9) et (1.16), on obtient

$$v(\bar{t}_v + \delta_v) - v(\bar{t}_v) \leqslant -C \int_{\bar{t}_v}^{\bar{t}_v + \delta_v} \|f(s, x_s)\|\, ds \tag{1.19}$$

$$\leqslant -C \left\| \int_{\bar{t}_v}^{\bar{t}_v + \delta_v} x'(s)\, ds \right\| = -C\|x(\bar{t}_v + \delta_v) - x(\bar{t}_v)\| < -CB$$

pour $v \geqslant \bar{N}$;

$$v(\bar{t}_v + \bar{\delta}_v) - v(\bar{t}_{v_0}) \leqslant \sum_{j=v_0}^{v} [v(\bar{t}_j + \delta_j) - v(\bar{t}_j)] + \sum_{j=v_0+1}^{v} [v(\bar{t}_j) - v(\bar{t}_{j-1} + \delta_{j-1})].$$

En vertu de (1.11) $D^+v(t) \leqslant 0$ et, par suite, $v(t)$ est décroissante d'où en vertu de (1.18)

$$v(\bar{t}_j) - v(\bar{t}_{j-1} + \delta_{j-1}) \leqslant 0,$$

donc

$$-2D \leqslant v(\bar{t}_\nu + \delta_\nu) - v(\bar{t}_{\nu_0}) \leqslant -(\nu - \nu_0)CB \qquad \text{pour } \nu \geqslant \nu_0 \geqslant \bar{N}$$

d'où, en passant à la limite, on obtient

$$-\infty < -2D \leqslant -\infty.$$

La démonstration est ainsi achevée.

Remarque. On vérifie facilement que l'hypothèse Z_3^* peut être remplacée par l'hypothèse suivante Z_3^*: Il existe une fonction $V(t, x)$ continue dans $I \times \Omega$ et localement lipschitzienne par rapport à x, et une fonction $U(x)$ de classe C^1 telles que pour chaque $B > 0$ il existe $\mu > 0$ tel que

(i) $\qquad \|U(\bar{x}) - U(\bar{\bar{x}})\| \geqslant \mu \qquad$ pour $\|\bar{x}\| \geqslant B$, $\|\bar{\bar{x}}\| \geqslant B$, $\|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\| \geqslant B$,

(ii) $\qquad (D^+V)(t, x, \varphi) \leqslant -|(D^+U)(t, x, \varphi)| \qquad$ pour $\|x\| \geqslant B_0$, $|\varphi| \geqslant B_0$.

La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème II.

Travaux cités

[1] N. Rouche, P. Habets, M. Laloy, *Stability theory by Liapunov's direct method*, Applied Mathematical Sciences 22, Springer, New York, Heidelberg, Berlin 1977.

[2] J. P. La Salle, *Stability theory for ordinary differential equations*, J. Diff. Eq. 4, p. 57–65.

Reçu par la Rédaction le 12.06.1979