ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXI (1976)

Sur le pilotage dans un champ de forces répulsives

par Z. MIKOLAJSKA (Kraków)

Résumé. La méthode topologique de T. Ważewski (cf. [1]) permet à demontrer que dans le cas de l'équation (1) $\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-h), \dot{x}(t-h)) + u$, où (2) $xf(t, x, y, \xi, \eta) \geqslant 0$ et (3) pour chaque $M \geqslant 0$ il existe $N(M) > 0$ tel que $|f(t, x, 0, \xi, \eta)| > M$, il existe pour chaque pilotage $u = u(t, x, y, \xi, \eta)$ borné, la famille $x(t, a)$ de solutions de l'équation (1) borné dans tout intervalle $\Delta(a)$ de l'existence. Dans le théorème en question les hypothèses (2), (3) ne pevent pas être remplacées par (2).

Dans la note [1] nous avons démontré que dans un champ de forces répulsives décrites par le système d'équations différentielles

$$\ddot{X} = F(t, X, \dot{X}), \quad X = (x_1, \ldots, x_n) \tag{0.1}$$

satisfaisant à la condition

$$X \cdot F(t, X, Y) \geqslant 0, \tag{0.2}$$

il existe une famille de solutions bornées $X(t, a)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ dépendant de n paramètres essentiels $(a_1, \ldots, a_n)$. Les solutions de la famille s'approchent de l'origine des coordonnées.

Dans la présente note nous nous occupos d'une équation à paramètre retardé

$$\ddot{x}(t) = f\big(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-h), \dot{x}(t-h)\big) + u \tag{0.3}$$

avec le pilotage $u = u\big(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-h), \dot{x}(t-h)\big)$. Nous nous occupos de la question suivante: quelle hypothèse faut-il faire sur le champ $f(t, x, y, \xi, \eta)$ de forces répulsives (c'est-à-dire telles que $x \cdot f(t, x, y, \xi, \eta) \geqslant 0$) pour qu'il existe, pour chaque pilotage $u(t, x, y, \xi, \eta)$ borné, une famille $x(t, a)$ de solutions de (0.3) bornées dans tout l'intervalle $\Delta_a = [0, t_a)$ dans lequel elles sont définies? L'exemple suivant montr que la condition (0.2) n'est pas suffisant.

EXEMPLE. Posons $f(t, x, y) \equiv 0$. Dans le cas envisagé l'hypothèse (0.2) est satisfaite, mais pour $u = \text{const} = c \neq 0$ chaque solution de (0.3) a la forme $x(t) = \frac{1}{2}ct^2 + \gamma t + \delta$, et par conséquent il n'existe pas de solution bornée.

1. Admettons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES H.

h_1. *$f(t, x, y, \xi, \eta)$ est continue.*

h_2. *Il sont satisfaites les conditions d'unicité des solutions de l'équation*

$$\ddot{x}(t) = f\big(t, x(t), \dot{x}(t), x(t-h), \dot{x}(t-h)\big)$$

avec la condition initiale

$$x(t) = \varphi(t), \quad \dot{x}(t) = \dot{\varphi}(t) \quad \textit{pour} \ -h \leqslant t < 0, \tag{1.1}$$

où $\varphi(t)$ et $\dot{\varphi}(t)$ sont continues.

h_3. *Pour chaque constante $M \geqslant 0$ il exise une constante $N(M) > 0$ telle que*

$$|f(t, x, 0, \xi, \eta)| > M \quad \textit{pour} \ |x| \geqslant N(M), \ |\xi| \leqslant |x|. \tag{1.2}$$

h_4. *Pour chaque (t, x, y, ξ, η) on a*

$$x \cdot f(t, x, y, \xi, \eta) \geqslant 0. \tag{1.3}$$

h_5. *Le pilotage $u = u(t, x, y, \xi, \eta)$ est borné*

$$|u| \leqslant L \quad \textit{pour chaque} \ (t, x, y, \xi, \eta), \ t \geqslant 0. \tag{1.4}$$

h_6. *Le pilotage u est tel qu'il y a l'unicité des solutions de l'équation* (0.3) *avec la condition* (1.1).

THÉORÈME 1. *Sous les hypothèses* H *il existe une constante $K > 0$ et une famille de solutions $x(t, a)$ de l'équation* (0.3) *dépendant d'un paramètre a, $a_1 \leqslant a \leqslant a_2$ telle que pour chaque solution $x(t, a)$ de la famille on a*

$$|x(t, a)| \leqslant K \tag{1.4}$$

dans tout l'intervalle $\Delta(a) = [0, t_a)$ dans lequel $x(t, a)$ est définie.

Dans la démonstration du théorème 1 nous appliquerons la méthode topologique de T. Ważewski [3]. Le théorème sur la méthode topologique contenu dans la note [3] n'est pas formulé pour les équations à paramètre retardé, mais la méthode de la démonstration peut aussi être utitisée dans notre cas. Il suffit de la formuler dans le lemme suivant:

2. LEMME TW. *Envisageons la famille de courbes $w(t, a)$ satisfaisant aux hypothèses suivantes:*

HYPOTHÈSES R.

r_1. *Pour chaque $a \in [a_1, a_2]$, $w(t, a)$ est continue dans l'intervalle $[0, t_a) = \Delta_a$ (où t_a peut être infini).*

r_2. *Désignons par Z l'ensemble suivant:*

$$Z = \{t = 0, (x, y) \,|\, \exists a, \ a \in [a_1, a_2], \ (x, y) = w(0, a)\}. \tag{2.1}$$

Supposons qu'à chaque point $w \in Z$ corresponde exactement un nombre $a = a(w) \in [a_1, a_2]$ et que $a(w)$ soit continue sur Z.

r_3. *Envisageons la domaine ω tel que pour $(t, x, y) \in \overline{\omega}$ on a $t \geqslant 0$, et*

$$Z \subset \overline{\omega}. \tag{2.2}$$

r_4. *La frontière de $\omega = F$ peut être considéré comme l'union de deux ensembles*

$$F = \tilde{F} \cup E_0$$

où

(2.3) $$E_0 = \{t = 0,\ (t, x, y) \in \bar{\omega}\} \quad \text{et} \quad \tilde{F} = S \cup E$$

où S est tel que

(2.4) $$Z \cap S \text{ est le rétracte de } S,$$

(2.5) $$Z \cap S \text{ n'est pas le rétracte de } Z.$$

r_5. *Pour chaque $a \in [a_1, a_2]$ tel que $w(t, a) \cap \tilde{F} \neq \emptyset$ (pour $t \geqslant 0$) désignons par $C(a)$ le point $w(\tau_a, a)$, où τ_a est un nombre non négatif tel que $\tau_a \geqslant 0$, $\tau_a \in [0, t_a)$*

(2.6) $$w(\tau_a, a) \in \tilde{F},$$

(2.7) $$w(t, a) \in \omega \quad \text{pour } 0 \leqslant t < \tau_a.$$

Supposons que pour chaque $a \in [a_1, a_2]$ tel que $C(a)$ existe on ait

(2.8) $$C(a) \in S.$$

r_6. *$C(a)$ est continue en chaque point a tel que $C(a)$ existe.*

Lemme TW. *Les hypothèses R étant supposées il existe au moins un $a_0 \in [a_1, a_2]$ tel que $w(t, a_0) \subset \omega$ pour $t \in [0, t_{a_0})$.*

Démonstration. Supposons qu'il n'existe pas de a_0 tel que $w(t, a_0) \subset \omega$ pour $t \in [0, t_{a_0})$. Alors pour chaque $a \in [a_1, a_2]$ il existe $C(a)$. Envisageons la transformation

$$v = T(w) = C(a(w)).$$

La transformation $T(w)$ est continue sur tout l'ensemble Z et en vertu de l'hypothèse (2.8) on a $T(w) = w$ pour $w \in Z \cap S$. D'après l'hypothèse (2.4) il existe une fonction $W(w)$ continue sur S telle que

$$W(S) \subset Z \cap S$$

et

$$W(w) = w \quad \text{pour } w \in Z \cap S.$$

La transformation composée $W(T(w))$ est continue sur Z, $W(T(w)) = w$ pour $w \in Z \cap S$ et $W(T(w)) \subset Z \cap S$ pour chaque $w \in Z$, c'est-à-dire la transformation $W(T(w))$ effectue la retraction de Z dans $Z \cap S$, ce qui est impossible en vertu de (2.5). Le Lemme TW est ainsi démontré.

3. Démonstration du théorème 1. L'équation (0.3) est équivalente au système des équations suivantes

(3.1) $$\begin{aligned} x'(t) &= y(t), \\ y'(t) &= f(t, x(t), y(t), x(t-h), y(t-h)) + u \end{aligned}$$

et les conditions (1.1) sont équivalentes aux conditions

$$x(t) = \varphi(t), \quad y(t) = \varphi'(t) \quad \text{pour } -h \leqslant t \leqslant 0. \tag{3.2}$$

Supposons que u soit le pilotage $u = u\big(t, x(t), y(t), x(t-h), y(t-h)\big)$ satisfaisant à h_5 et h_6. De l'hypothèse h_3 il vient qu'il existe une constante $N = N(L) > 0$ telle que

$$|f(t, x, 0, \xi, \eta)| > L \quad \text{pour } |x| \geqslant N(L),\ |\xi| \leqslant |x|. \tag{3.3}$$

Définissons les ensembles ω, Z, S, E intervenant dans le lemme TW de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \omega &= \{(t, x, y) \mid |x| < N(L),\ t \geqslant 0\}, \\ Z = Z_a &= \{(t, x, y) \mid y = x + a,\ |x| \leqslant N(L),\ t = 0\} \quad \text{pour } |a| < N, \\ S &= \{(t, x, y) \mid |x| = N(L),\ x \cdot y > 0,\ t \geqslant 0\}, \\ E &= \{(t, x, y) \mid |x| = N(L),\ x \cdot y \leqslant 0,\ t \geqslant 0\}. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que les ensembles ω, Z, S, E ainsi définis satisfont aux hypothèses (2.2), (2.3), (2.4) et (2.5). Il reste à définir la famille $w_a(t, a)$ de telle façon qu'on ait (2.1), (2.6) et r_6. Désignons par $w_a(t, a)$ la solution de (3.1) satisfaisant à la condition suivante

$$x_a(t, \alpha) = \alpha t + \alpha - a \quad \text{pour } -h \leqslant t \leqslant 0, \tag{3.4}$$

$$y_a(t, \alpha) = \alpha \quad \text{pour } -h \leqslant t \leqslant 0. \tag{3.5}$$

Pour $w_a(t, \alpha) = \{t, x_a(t, \alpha), y_a(t, \alpha)\}$ est satisfaite la condition

$$w_a(0, \alpha) = (\alpha - a, \alpha) \in Z_a \quad \text{pour } a - N(L) \leqslant \alpha \leqslant a + N(L)$$

c'est-à-dire $\alpha_1 = a - N(L)$, $\alpha_2 = a + N(L)$. A chaque $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_a$ correspond exactement un $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) \in [\alpha_1, \alpha_2]$, $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}$ pour chaque $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_a$. $\alpha(x, y)$ ainsi défini est continu sur Z_a. Nous démontrons que pour un $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ on a (2.8). Supposons que pour un $\alpha_0 \in [\alpha_1, \alpha_2]$ on ait $C(\alpha_0) \in E$. Alors il exista un $t_0 \geqslant 0$ tel que

$$w(t, \alpha_0) \in \omega \quad \text{pour } 0 \leqslant t < t_0, \tag{3.6}$$

$$C(\alpha_0) = w(t_0, \alpha_0) \in E. \tag{3.7}$$

Envisageons deux cas: 1° $y(t_0, \alpha_0) \neq 0$ et 2° $y(t_0, \alpha_0) = 0$.

Dans le cas 1° on a

$$\frac{d}{dt} x^2(t, \alpha_0)_{t=t_0} = 2x(t_0, \alpha_0) \cdot y(t_0, \alpha_0) < 0$$

et par consequent

$$x^2(t, \alpha_0) > x^2(t_0, \alpha_0) = N^2(L) \quad \text{pour } t_0 - \varepsilon \leqslant t < t_0$$

ce qui est incompatible avec (3.6) et avec la définition de ω.

Dans le cas 2° on a

$$\frac{d}{dt}x^2(t, a_0)_{t=t_0} = 0.$$

Dans le cas envisagé on a

$$\frac{d}{dt}\big(x(t, a_0)\cdot y(t, a_0)\big)_{t=t_0} = y^2(t_0, a_0)+x(t_0, a_0)\cdot y'(t_0, a_0)$$
$$= x(t_0, a_0)\cdot f\big(t_0, x(t_0, a_0), y(t_0, a_0), x(t_0-h, a_0), y(t_0-h, a_0)\big)+$$
$$+x(t_0, a_0)u \geqslant x(t_0, a_0)f\big(t_0, x(t_0, a_0), 0, x(t_0-h, a_0), y(t_0-h, a_0)\big)-$$
$$-|x(t_0, a_0)|\cdot|u|.$$

En vertu de (1.3) on a

$$\frac{d}{dt}\big(x(t, a_0)\cdot y(t, a_0)\big)_{t=t_0} \geqslant |x(t_0, a_0)|\big|f\big(t_0, x(t_0, a_0), 0, \xi, \eta\big)\big|-N(L)|u|$$
$$= N(L)\big\{|f\big(t_0, x(t_0, a_0), 0, \xi, \eta\big)|-|u|\big\}$$
$$\text{où } \xi = x(t_0-h, a_0),\ \eta = y(t_0-h, a_0),$$

d'où, en vertu de (3.3), (3.6) et (1.4), on a

$$\frac{d}{dt}\big(x_a(t, a_0)\cdot y_a(t, a_0)\big)_{t=t_0} > N(L)(L-L) = 0$$

et, par suite, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\frac{d}{dt}\big(x_a^2(t, a_0)\big) = 2x_a(t, a_0)\cdot y_a(t, a_0) < 0 \quad \text{pour } t_0-\delta \leqslant t < t_0$$

d'où

$$x_a^2(t, a_0) > x_a^2(t_0, a_0) = N^2(L) \quad \text{pour } t_0-\delta \leqslant t < t_0$$

ce qui est incompatible avec (3.6) et avec la définition de ω. Nous avons ainsi démontré que pour chaque $a\in[a_1, a_2]$ tel que $C(a)$ existe on a (2.8) et par suite, pour chaque $a_0\in[a_1, a_2]$ tel que $C(a)$ existe, $C(a) = w(t_0, a_0)$, on a

$$\frac{d}{dt}\big(x_a^2(t, a_0)\big)_{t=t_0} = 2x_a(t_0, a_0)\cdot y_a(t_0, a_0) > 0$$

donc

$$x_a^2(t, a_0) < x_a^2(t_0, a_0) = N^2(L) \quad \text{pour } 0 \leqslant t < t_0, \tag{3.8}$$

$$x_a^2(t, a_0) > x_a^2(t_0, a_0) = N^2(L) \quad \text{pour } t_0 < t \leqslant t_0+\delta. \tag{3.9}$$

Comme l'intégrale $x_a(t, a)$, $y_a(t, a)$ dépend d'une manière continue de la condition initiale et de (3.8), (3.9) $C(a)$ est continue. On peut donc appliquer le lemme TW et par conséquent pour chaque a il existe un $a_a \in [a_1, a_2]$ tel que l'integrale $x_a(t, a_a)$, $y_a(t, a_a)$ parcourt dans ω pour tout $t \in [0, t_{a_a})$. La démonstration du théorème 1 est ainsi terminée.

Remarque 1. Dans la démonstration du théorème 1 il n'est pas essentielle quel est la forme de $x_a(t, a)$ dans l'intervalle $-h \leqslant t < 0$. On peut faire un raisonnement analogue dans le cas où

$$x_a(t, a) = \psi(t, a, a) \quad \text{pour} \quad -h \leqslant t \leqslant 0,$$
$$y_a(t, a) = \psi'_t(t, a, a) \quad \text{pour} \quad -h \leqslant t \leqslant 0$$

(cf. (3.4), (3.5)) pour $a_1(a) \leqslant a \leqslant a_2(a)$ où la fonction ψ satisfait à la condition suivant:

a. $\psi(t, a, a)$ est continue par rapport à a et de classe C^1 par rapport à t pour $-h \leqslant t \leqslant 0$.

b. Pour $t = 0$ elle satisfait à la condition (2.1) et r_2 avec l'ensemble $Z = Z_a$. En particulier on peut supposer

b_0. $\psi(0, a, a) = a - a$, $\psi'_t(0, a, a) = a$ pour $a - N = a_1 \leqslant a \leqslant a_2 = a + N(L)$.

Désignons la famille des fonctions $\psi(t, a, a)$ satisfaisant aux conditions a et b_0 par Ω. On a le théorème suivant:

4. Théorème 1'. *Sous les hypothèses H il existe pour chaque fonction $\psi(t, a, a)$ de la famille Ω et por chaque a, $|a| \leqslant N(L)$ au moins un nombre $a(a)$ tel que la solution de l'équation (0.1) $x\big(t;\ \psi(\cdot, a(a), a)\big)$ satisfait à la condition initiale*

$$x\big(t, \psi(\cdot, a(a), a)\big) = \psi\big(t, a(a), a\big) \quad \textit{pour} \quad -h \leqslant t \leqslant 0, \tag{4.1}$$

$$x'\big(t, \psi(\cdot, a(a), a)\big) = \psi'_t\big(t, a(a), a\big) \quad \textit{pour} \quad -h \leqslant t \leqslant 0 \tag{4.2}$$

rest bornée dans tout intervalle $[0, t_{a(a)})$ dans lequel elle est définie. C'est-à-dire il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\Big|x\big(t, \psi(\cdot, a(a), a)\big)\Big| \leqslant K \quad \textit{pour} \quad t \in [0, t_{a(a)}),\ |a| \leqslant N(L). \tag{4.3}$$

La constante K est indépendente de a et ψ.

La démonstration du théorème 1' est tout à fait analogue à celle du théorème 1.

5. Hypothèse H_1. *Il existe des fonctions $\Phi(x)$ et $\Gamma(y)$, continues pour tous les x et y, telles que*

$$\Gamma(y) > 1 \quad \textit{pour} \quad y \geqslant 0, \tag{5.1}$$

$$\int_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{\Gamma(y)} = \infty \quad (\textit{pour chaque } y_0), \tag{5.2}$$

$$\Phi(x) \geqslant 0, \tag{5.3}$$

$$|f(t, x, y, \xi, \eta)| \leqslant \Phi(|x|) \cdot \Gamma(|y|). \tag{5.4}$$

THÉORÈME 2. *Sous les hypothèses* H *et* H_1 *les intégrales* $x\big(t, \psi(\cdot, \alpha(a), a)\big)$ *sont définies dans tout l'intervalle* $[-h, \infty)$ *et elles satisfont à* (4.3) *pour* $0 \leqslant t < \infty$.

Démonstration. Pour établir que $x\big(t, \psi(\cdot, \alpha(a), a)\big)$ est définie dans tout intervalle $[-h, \infty)$ il suffit de démontrer que dans chaque intervalle fini $[-h, T)$

$$y\big(t, \psi(\cdot, \alpha(a), a)\big) = x'\big(t, \psi(\cdot, \alpha(a), a)\big)$$

est borné. Remarquons que

$$\big|y'\big(t, \psi(\cdot, \alpha(a), a)\big)\big| \leqslant |f(t, x, y, \xi, \eta)| + |u|$$

où $x = x(t, \psi)$, $y = y(t, \psi)$, $\xi = x(t-h, \psi)$, $\eta = x'(t-h, \psi)$ et, par suite, de l'hypothèse (1.4) et (5.4) on tire

$$|y'| \leqslant \Phi(|x|)\cdot\Gamma(|y|) + L$$

d'où, en vertu de (5.3) ef (5.1),

$$|y'| \leqslant \big(\Phi(|x|) + L\big)\,\Gamma(|y|).$$

Les intégrales de la famille $x\big(t, \psi(\cdot, \alpha(a), a)\big)$ sont bornées

$$\big|x\big(t, \psi(\cdot, \alpha(a), a)\big)\big| \leqslant N(L) \qquad \text{pour } t \geqslant 0$$

et, par suite, il existe une constante $m > 0$ telle que

$$|y'| \leqslant (m + L)\,\Gamma(|y|) \qquad \text{pour } 0 \leqslant t.$$

De la théorie des inégalités différentielles (cf. [2]) il résulte que

$$\big|y\big(t, \psi(\cdot, \alpha(a), a)\big)\big| \leqslant v(t) \qquad \text{pour } t \geqslant 0, \tag{5.5}$$

où $v(t)$ est la soltuion de l'éqution

$$\begin{aligned} v'(t) &= (m + L)\,\Gamma(v),\\ v(0) &= \big|y\big(0, \psi(\cdot, \alpha(a), a)\big)\big| = |\alpha(a)| \geqslant 0. \end{aligned}$$

De l'hypothèse (5.1) et (5.2) il vient que $v(t)$ est défini dans tout l'intervalle $[0, \infty)$ et par suite $x\big(t, \psi(\cdot, \alpha(a), a)\big)$, $y\big(t, \psi(\cdot, \alpha(a), a)\big)$ sont définies pour $0 \leqslant t < \infty$. Le théorème 2 se trouve ainsi démontré.

6. Remarque 2. Dans le cas où l'on envisage exclusivement des pilotages u satisfaisantes à l'inégalité

$$|u| < |f(t, x, y, \xi, \eta)| \qquad \text{pour } |y| \geqslant B,\ x \neq 0 \tag{6.1}$$

les hypothèses H_1 ne sont plus nécessaires. On a:

THÉORÈME 3. *Sus les hypothèses* H *et* (6.1) *il existe une famille* $x(t, a)$ *de solutions de l'équation* (3.1) *dépendante d'un paramètre essentiel* a, *telle que*

$$|x(t, a)| \leqslant N(L) \quad pour\ 0 \leqslant t < \infty,$$
$$|y(t, a)| \leqslant B \quad pour\ 0 \leqslant t < \infty,\ |a| \leqslant N(L).$$

Démonstration. Envisageons l'ensemble

$$\tilde{\omega} = \{(t, x, y) \mid |x| \leqslant N(L),\ |y| \leqslant B,\ t \geqslant 0\}.$$

La frontière $\tilde{F}$ de $\tilde{\omega}$ se compose des ensembles suivants

$$\tilde{S}_1 = \{(t, x, y) \mid x = N(L),\ 0 < y \leqslant B,\ t \geqslant 0\},$$
$$\tilde{S}_2 = \{(t, x, y) \mid x = -N(L),\ -B \leqslant y < 0,\ t \geqslant 0\},$$
$$\tilde{S}_3 = \{(t, x, y) \mid 0 < x \leqslant N(L),\ y = B,\ t \geqslant 0\},$$
$$\tilde{S}_4 = \{(t, x, y) \mid -N(L) \leqslant x < 0,\ y = -B,\ t \geqslant 0\},$$
$$\tilde{F} = \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2 \cup \tilde{S}_3 \cup \tilde{S}_4 \cup E.$$

On vérifie facilement que tous les points de l'ensemble $\tilde{S} = \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2 \cup \cup \tilde{S}_3 \cup \tilde{S}_4$ sont des points de sortie stricte de $\tilde{\omega}$ pour les solutions de (3.1). Envisageons l'ensemble $\tilde{Z}$

$$\tilde{Z} = \{(0, x, y) \mid y = x + a,\ |x| \leqslant N(L),\ |y| \leqslant B\}.$$

On vérifie facilement que l'ensemble $\tilde{Z} \cap \tilde{S}$ satisfait à l'hypothèses (2.4) et (2.5). Envisageons la famille $x_a(t, a)$ des solutions de (3.1) telle que

$$\begin{aligned} x_a(t, a) &= at + a - a \\ y_a(t, a) &= a \end{aligned} \qquad \text{pour } -h \leqslant t \leqslant 0,$$

pour $a \in [a_1(a), a_2(a)]$ où $a_i(a)$ sont telles que le point $(a_i - a, a_i) \in \tilde{Z}$. La famille des courbes $w_a(t, a) = (t, x_a(t, a), y_a(t, a))$ satisfait à (2.1) et r_2. On vérifie facilemet que les conditions r_5 et r_6 sont aussi satisfaites et que, par suite, en vertu du lemme TW, le théorème 3 est vérifié.

Références

[1] Z. Mikołajska, *Sur les mouvements asymptotiques d'un point matériel mobile dans le champ des forces repoussantes*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 1 (1–2) (1953).

[2] J. Szarski, *Differential inequatilies*, Monografie Mat. 43, Warszawa 1965.

[3] T. Ważewski, *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des integrales des équations différentielles ordinaires*, Ann. Soc. Polon. Math. 20 (1947), p. 279.

Reçu par la Rédaction le 22. 6. 1973