ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XL (1983)

Verallgemeinerungen eines Satzes von Leighton über die Oszillation selbstadjungierter Differentialgleichungen

von E. MÜLLER-PFEIFFER (Erfurt)

Nach einem Satz von Leighton [7] ist die Differentialgleichung

$$-[r(x)y']'+q(x)y = 0, \quad r(x) > 0,\ a \leqslant x < \infty,$$

oszillatorisch, wenn die Voraussetzungen

$$\int_a^\infty \frac{dx}{r(x)} = \infty \quad \text{und} \quad \int_a^\infty q(x)dx = -\infty$$

erfüllt sind. Für den Spezialfall $r(x) \equiv 1$ wurde dieser Satz vorher von Wintner [16] bewiesen. Oszillationskriterien für gewöhnliche Differentialgleichungen der Ordnung vier bzw. $2n$ stammen u. a. von Leighton und Nehari [8], Glazman [2], Hinton [3], Hunt unt Namboodiri [4] und Levis [9], [10], [11]. Eine Zusammenstellung von solchen Oszillationskriterien findet sich z. B. in dem Buch [15] von Swanson.

Wir befassen uns im folgenden zunächst mit der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(1) \qquad Ay = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \big(a_k(x) y^{(k)}\big)^{(k)} = 0, \quad a_n(x) > 0,\ 0 \leqslant x < \infty,$$
$$a_k(x) \in C^k[0, \infty) \text{ und reell},\ k = 0, \ldots, n,$$

und danach mit der elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(2) \quad Au = -\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + q(x)u = 0, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n,$$
$$a_{jk}(x) \in C^1(R^n),\ a_{jk}(x) = a_{kj}(x) \text{ und reell},\ j, k = 1, \ldots, n,$$
$$q(x) \in C(R^n) \text{ und reell}.$$

Die Gleichung (1) heisst oszillatorisch, wenn für jedes $a > 0$ ein $b > a$ und eine nichttriviale Lösung $y(x)$ von (1) existieren, so dass

$$y^{(k)}(a) = y^{(k)}(b) = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

gilt.

Der folgende Satz befasst sich mit der Differentialgleichung (1) unter der Einschränkung, dass alle mittleren Koeffizienten $a_k(x)$, $k = 1, \ldots, n-1$, identisch verschwinden.

SATZ 1. *Die Differentialgleichung*

$$Ay = (-1)^n (a_n(x) y^{(n)})^{(n)} + a_0(x) y = 0, \qquad 0 \leqslant x < \infty,$$

ist oszillatorisch, wenn die Voraussetzungen

$$\int_0^\infty a_n^{-1}(x)\,dx = \infty \qquad \textit{und} \qquad \int_0^\infty x^{2(n-1)} a_0(x)\,dx = -\infty$$

erfüllt sind.

Beweis. $R_1 > 0$ wird beliebig gewählt. Wir zeigen, dass es eine Stelle S, $R_1 < S < \infty$, und entsprechend eine (reelle) Funktion $w_n(x) \in \mathring{W}_2^n(R_1, S)$ gibt, so dass die quadratische Form

$$\text{(3)} \qquad A[w, w] = \int_{R_1}^{S} a_n(x) |w^{(n)}|^2\,dx + \int_{R_1}^{S} a_0(x) |w|^2\,dx, \qquad w \in \mathring{W}_2^n(R_1, S),$$

für $w = w_n$ einen negativen Wert annimmt. Dabei ist $\mathring{W}_2^n(R_1, S)$ der Sobolevsche Raum, der aus der Menge $C_0^\infty(R_1, S)$ der in (R_1, S) beliebig oft differenzierbaren und finiten (komplexwertigen) Funktionen durch Vervollständigung in der Norm

$$\|u\|_{W_2^n(R_1, S)} = \Big(\int_{R_1}^{S} |u^{(n)}|^2\,dx + \int_{R_1}^{S} |u|^2\,dx\Big)^{1/2}$$

entsteht. Aus $w_n(x) \in \mathring{W}_2^n(R_1, S)$ folgen $w_n(x) \in C^{n-1}[R_1, S]$ und

$$w_n^{(k)}(R_1) = w_n^{(k)}(S) = 0, \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

Mit Hilfe des Variationsprinzips von Courant kann dann geschlossen werden, dass es eine Stelle R_1', $R_1 < R_1' < S$, und entsprechend eine Funktion $y_n(x)$ mit den Eigenschaften

$$y_n(x) \in W_2^{2n}(R_1, R_1') \cap \mathring{W}_2^n(R_1, R_1') \qquad \text{und} \qquad Ay_n = 0$$

gibt ([1]).

Bei der Konstruktion von $w_n(x)$ benötigen wir Hilfsfunktionen $\omega_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$, die folgendermassen gewonnen werden. Durch Mittelung der Funktion

$$\chi_{R_1}(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leqslant R_1 + \frac{1}{2}, \\ 1, & R_1 + \frac{1}{2} < x < \infty, \end{cases}$$

([1]) $W_2^{2n}(R, R')$ besteht aus der Menge der auf (R, R') definierten (komplexwertigen) Funktionen, deren verallgemeinerte Ableitungen bis zur Ordnung $2n$ auf (R, R') quadratisch integrierbar sind.

wobei der Mittelungsradius $\frac{1}{2}$ betrage (vergl. [14]), entsteht die Funktion $\varphi_{K_1}(x)$ mit den Eigenschaften

$$\varphi_{K_1}(x) \begin{cases} = 0, & -\infty < x \leqslant R_1, \\ = 1, & R_1+1 \leqslant x < \infty, \\ \in C^\infty(-\infty, \infty). \end{cases}$$

Mittels $\varphi_{K_1}(x)$ werden die Funktionen

$$\omega_k(x) = \left(\varphi_{K_1}(x)\cdot\frac{x^n}{n!}\right)^{(n+1-k)}, \quad 0 \leqslant x \leqslant R_1+1,\ k = 1, \ldots, n,$$

definiert, für die

$$\omega_k(R_1+1) = \frac{(R_1+1)^{k-1}}{(k-1)!}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

gilt.

Die Funktion $w_n(x)$ gewinnen wir induktiv. Mittels $\omega_1(x)$ definieren wir zunächst

($k = 1$).

$$v_1(x) = \begin{cases} \omega_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant R_1+1, \\ 1, & R_1+1 \leqslant x \leqslant R_2, \\ 1-\int\limits_{R_2}^{x} \frac{dt}{a_n(t)}, & R_2 \leqslant x \leqslant S_1, \text{ mit } \int\limits_{R_2}^{S_1} \frac{dt}{a_n(t)} = 1, \\ 0, & S_1 \leqslant x < \infty. \end{cases}$$

Die Lage des Punktes R_2 wird später festgelegt. Weil

$$\int\limits_{R_2}^{\infty} \frac{dt}{a_n(t)} = \infty$$

gilt, ist

$$\int\limits_{R_2}^{S_1} \frac{dt}{a_n(t)} = 1$$

durch ein $S_1 > R_2$ erfüllbar. S_1 ist durch R_2 eindeutig bestimmt. Die Einschränkung von $v_1(x)$ auf (R_1, S_1) gehört zu $\mathring{W}_2^1(R_1, S_1)$.

($k = 2$). Weiter sei

$${}_1v_1(x) = \begin{cases} v_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant S_1, \\ 1-\int\limits_{R_2}^{x} \frac{dt}{a_n(t)}, & S_1 \leqslant x \leqslant R_3, \text{ mit } 1-\int\limits_{R_2}^{R_3} \frac{dt}{a_n(t)} = \varrho_1 \geqslant -1, \\ \varrho_1, & R_3 \leqslant x \leqslant R_4,\ R_3 \leqslant R_4, \\ \varrho_1+\int\limits_{R_4}^{x} \frac{dt}{a_n(t)}, & R_4 \leqslant x \leqslant S_2, \text{ mit } \varrho_1+\int\limits_{R_4}^{S_2} \frac{dt}{a_n(t)} = 0, \\ 0, & S_2 \leqslant x < \infty. \end{cases}$$

Über die Lage der Punkte R_3, R_4 und S_2 wird dabei wie folgt verfügt. Bei fixierten Punkten R_1, R_2 wird

$$\int_{R_1}^{S_1} {}_1v_1(x)\,dx = -\int_{S_1}^{S_2} {}_1v_1(x)\,dx$$

gefordert. Dabei können die Fälle

1° $R_3 = R_4$, $0 > \varrho_1 > -1$; 2° $R_3 = R_4$, $\varrho_1 = -1$; 3° $R_3 < R_4$, $\varrho_1 = -1$, eintreten. R_3, R_4 und S_2 sind durch R_1 und R_2 eindeutig bestimmt. Die Gewinnung von ${}_1v_1(x)$ aus $v_1(x)$ wollen wir „Symmetrische Fortsetzung von $v_1(x)$ an der Stelle S_1" nennen. Mit Hilfe von ${}_1v_1(x)$, $0 \leqslant x < \infty$, wird jetzt

$$v_2(x) = \int_0^x {}_1v_1(t)\,dt, \qquad 0 < x < \infty,$$

definiert. $v_2(x)$ besitzt die Eigenschaften

1° $v_2(x) \in \mathring{W}_2^2(R_1, S_2)$ (damit gilt $v_2(R_1) = v_2'(R_1) = v_2(S_2) = v_2'(S_2) = 0$),

2° $v_2(x) = 0$, $x \in [0, R_1] \cup [S_2, \infty)$,

3° $v_2(x) = \omega_2(x)$, $0 \leqslant x \leqslant R_1 + 1$,

4° $v_2'(x) > 0$, $R_1 + 1 \leqslant x < S_1$; $v_2'(x) < 0$, $S_1 < x < S_2$,

5° $v_2(x) = xf_2(x)$; $f_2(x) = 1$, $R_1 + 1 \leqslant x \leqslant R_2$; $f_2'(x) < 0$, $f_2(x) > 0$, $R_2 < x < S_2$,

von denen 1°–4° offensichtlich sind. Aus der Ungleichung

$$-\frac{x}{a_n(x)} = xv_1'(x) < 0, \qquad R_2 < x \leqslant S_1,$$

folgt durch Integration bei Berücksichtigung von $v_2(R_2) = R_2$

$$\begin{aligned} 0 > \int_{R_2}^x tv_1'(t)\,dt &= xv_1(x) - R_2 v_1(R_2) - \int_{R_2}^x v_1(t)\,dt \\ &= xv_1(x) - R_2 v_1(R_2) - v_2(x) + v_2(R_2) = xv_2'(x) - v_2(x), \qquad R_2 < x \leqslant S_1. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist aber gleichbedeutend mit $f_2'(x) < 0$, $R_2 < x \leqslant S_1$, wenn $v_2(x) = xf_2(x)$ gesetzt wird. Wie man leicht sieht, gilt auch $f_2'(x) < 0$, $S_1 \leqslant x < S_2$. Damit ist 5° als bewiesen anzusehen.

($k = 3$). Analog dem Vorgehen im Falle $k = 2$ wird aus ${}_1v_1(x)$ durch symmetrische Fortsetzung bei $x = S_2$ eine Funktion ${}_2v_1(x)$ gewonnen. Die Funktion

$${}_2v_2(x) = \int_0^x {}_2v_1(t)\,dt$$

entsteht entsprechend aus ${}_1v_2(x) = v_2(x)$ durch eine Fortsetzung bei $x = S_2$.

Mit Hilfe von ${}_2v_2(x)$ wird nun

$$v_3(x) = \int_0^x {}_2v_2(t)\,dt, \quad 0 \leqslant x < \infty,$$

definiert. Die symmetrische Fortsetzung von ${}_1v_1(x)$ bei $x = S_2$ hat Eigenschaften einer Spiegelung. Bei dieser „Spiegelung" entsprechen sich folgende Punkte, die in Paaren zusammengefasst sind:

$$(R_1, S_4),\ (R_1+1, R_8),\ (R_2, R_7),\ (S_1, S_3),\ (R_3, R_6),\ (R_4, R_5)\ ({}^2).$$

$(k = n)$. Bei Fortsetzung dieser Methode gewinnt man schliesslich eine Funktion

$$v_n(x) = w_n(x), \quad 0 \leqslant x < \infty,$$

mit den Eigenschaften

1° $w_n(x) \in \mathring{W}_2^n(R_1, S_{2n-1})$ (damit gilt $w_n^{(k)}(R_1) = w_n^{(k)}(S_{2n-1}) = 0,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1$),

2° $w_n(x) = 0,\ x \in [0, R_1] \cup [S_{2n-1}, \infty);\ w_n(x) > 0,\ R_1 < x < S_{2n-1}$,

3° $w_n(x) = \omega_n(x),\ 0 \leqslant x \leqslant R_1+1$,

4° $w_n'(x) > 0,\ R_1+1 \leqslant x < S_{2n-2};\ w_n'(x) < 0,\ S_{2n-2} < x < S_{2n-1}$,

5° $w_n(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} f_n(x),\ f_n(x) = 1,\ R_1+1 \leqslant x \leqslant R_2,\ f_n'(x) < 0,$
$R_2 < x < S_{2n-1}$,

die man mittels vollständiger Induktion beweisen kann. Wir zeigen dies für 5°. Wie bereits bemerkt wurde, ist 5° richtig für $n = 2$ $(v_2(x))$. Gilt

$$v_{n-1}(x) = \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} f_{n-1}(x) \quad \text{mit } f_{n-1}'(x) < 0,\ R_2 < x < S_{2n-2},$$

so folgt über

$$(n-2)!\left(\frac{v_{n-1}(x)}{x^{n-2}}\right)' = (n-2)!\,\frac{v_{n-1}' \cdot x^{n-2} - (n-2)v_{n-1}x^{n-3}}{x^{2(n-2)}} < 0,$$
$$R_2 < x < S_{2n-2},$$

die Ungleichung

$$xv_{n-1}' - (n-2)v_{n-1} < 0, \quad R_2 < x < S_{2n-2}.$$

(²) Die Eindeutigkeit der genannten Fortsetzung bei $x = S_2$ ergibt sich dabei durch die Festlegungen

$$\int_{S_2}^{S_3} {}_2v_1(x)\,dx = -\int_{S_3}^{S_4} {}_2v_1(x)\,dx\ (< 0) \quad \text{und} \quad \int_{S_2}^{S_4} {}_2v_2(x)\,dx = -\int_{R_1}^{S_2} v_2(x)\,dx\ (< 0).$$

Durch Integration ergibt sich hieraus bei Berücksichtigung von

$$v_k(R_2) = \frac{R_2^{k-1}}{(k-1)!}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

die Beziehung

$$\int_{R_2}^{x} t v'_{n-1}\, dt - (n-2) \int_{R_2}^{x} v_{n-1}\, dt$$

$$= x v_{n-1}(x) - R_2 v_{n-1}(R_2) - v_n(x) + v_n(R_2) - (n-2) v_n(x) + (n-2) v_n(R_2)$$

$$= x v_{n-1}(x) - (n-1) v_n(x) = x v'_n(x) - (n-1) v_n(x) < 0, \qquad R_2 < x < S_{2n-2}.$$

Die letzte Ungleichung ist aber gleichbedeutend mit

$$f'_n(x) < 0, \qquad R_2 < x < S_{2n-2},$$

wenn

$$v_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f_n(x), \qquad R_2 < x < S_{2n-2},$$

gesetzt wird. Die Behauptung 5° im Falle $S_{2n-2} \leqslant x < S_{2n-1}$ folgt unmittelbar aus 4°.

Durch die Punkte R_1 und R_2 wird die Funktion $w_n(x)$ eindeutig festgelegt. Mit $w_n(x)$ wird folgende Abschätzung durchgeführt.

$$(4) \qquad \int_{R_1}^{S_{2n-1}} a_n(x) [w_n^{(n)}(x)]^2\, dx + \int_{R_1}^{S_{2n-1}} a_0(x) w_n^2(x)\, dx$$

$$= \int_{R_1}^{R_1+1} a_n(x) [\omega'_1(x)]^2 dx + \int_{R_2}^{R_3} a_n(x) a_n^{-2}(x) dx + \ldots + \int_{R_{2n-2}}^{R_{2n-1}} a_n(x) a_n^{-2}(x) dx +$$

$$+ \int_{R_{2n}}^{S_{2n-1}} a_n(x) a_n^{-2}(x)\, dx + \int_{R_1}^{R_1+1} a_0(x) \omega_n^2(x)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{[(n-1)!]^2} \int_{R_1+1}^{S_{2n-1}} a_0(x) x^{2n-2} f_n^2(x)\, dx.$$

Weil $f_n^2(x)$ eine auf $[R_2, S_{2n-1}]$ von $f_n^2(R_2) = 1$ bis $f_n^2(S_{2n-1}) = 0$ monoton fallende Funktion ist, gibt es nach dem zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung eine Stelle ξ_n, $R_2 \leqslant \xi_n \leqslant S_{2n-1}$, so dass

$$(5) \qquad \frac{1}{[(n-1)!]^2} \int_{R_1+1}^{S_{2n-1}} a_0(x) x^{2n-2} f_n^2(x)\, dx = \frac{1}{[(n-1)!]^2} \int_{R_1+1}^{\xi_n} a_0(x) x^{2n-2}\, dx$$

gilt. Andere Summanden auf der rechten Seite von (4) werden durch

$$(6)\qquad \int_{R_{2\nu}}^{R_{2\nu+1}} a_n^{-1}(x)dx \leqslant 2, \qquad \nu = 1, \dots, 2^{n-1}-1,$$

$$\text{und} \qquad \int_{R_{2^n}}^{S_{2^n-1}} a_n^{-1}(x)dx \leqslant 1$$

abgeschätzt. Mit (5) und (6) vereinfacht sich jetzt (4) zu

$$(7)\qquad A[w_n, w_n] \leqslant \int_{R_1}^{R_1+1} a_n(x)[\omega_1'(x)]^2 dx + \int_{R_1}^{R_1+1} a_0(x)\omega_n^2(x)dx + 2^n - 1 + \\ + \frac{1}{[(n-1)!]^2} \int_{R_1+1}^{\xi_n} a_0(x)x^{2n-2}dx, \qquad R_2 \leqslant \xi_n.$$

Der letzte Summand auf der rechten Seite von (7) strebt nach Voraussetzung für $R_2 \to \infty$ gegen $-\infty$, so dass bei fixiertem R_1 für ein hinreichend grosses R_2 die Beziehung

$$A[w_n, w_n] < 0$$

gilt. Damit ist auch

$$(8)\qquad \inf_{\substack{w \in \mathring{W}_2^n(I_n) \\ \|w\|_{I_n}=1}} A[w, w] < 0, \qquad I_n = (R_1, S_{2^n-1}), \qquad \|w\|_{I_n}^2 = \int_{I_n} |w|^2 dx,$$

bewiesen.

Die Form (3) mit $S = S_{2^n-1}$ ist halbbeschränkt nach unten und abgeschlossen. (Die durch $A[w, w]$ definierte Norm ist zur Norm des Raumes $\mathring{W}_2^n(R_1, S_{2^n-1})$ äquivalent.) Der durch die Form $A[w, w]$ eindeutig definierte selbstadjungierte Operator $\hat{A}$, $D(\hat{A}) \subseteq \mathring{W}_2^n(R_1, S_{2^n-1})$ (vergl. [5], p. 322), besitzt ein diskretes Spektrum. Der kleinste Eigenwert $\lambda_1(I_n)$ von $\hat{A}$ ist wegen (8) negativ. Nach dem Variationsprinzip von Courant wird $\lambda_1(I_n)$ grösser, wenn das Intervall I_n bei festem R_1 verkleinert wird. Es gibt daher ein R_1', $R_1 < R_1' < S_{2^n-1}$, so dass

$$\lambda_1(I_n') = 0, \qquad I_n' = (R_1, R_1'),$$

gilt. Die zugehörige Eigenfunktion $y_n(x)$ gehört zu $\mathring{W}_2^n(I_n')$, sie gehört aber auch zum Raum $W_2^{2n}(I_n')$ (vergl. [1], Theorem 5). Daher gilt

$$Ay_n = 0, \qquad y_n^{(k)}(R_1) = y_n^{(k)}(R_1') = 0, \qquad k = 0, \dots, n-1.$$

(Der Raum $W_2^{2n}(I_n')$ ist in den Raum $C^{2n-1}[R_1, R_1']$ eingebettet, und aus der Gültigkeit der Differentialgleichung $Ay_n = 0$ folgt schliesslich $y_n(x) \in \in C^{2n}[R_1, R_1']$.) Der Satz 1 ist bewiesen.

Bemerkungen. Die Beweismethode von Satz 1 kann auch für die allgemeinere Differentialgleichung (1) verwendet werden. Es zeigt sich, dass die Gleichung (1) oszillatorisch ist, wenn die Voraussetzungen 1° oder die Voraussetzungen 2° erfüllt sind.

1° (a) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{a_n(x)} = \infty$,

(b) $\int\limits_0^\infty x^{2(n-1)} a_0(x)\,dx = -\infty$,

(c) Es existiert eine Konstante M, so dass für beliebige positive α, β die Abschätzungen

$$\left|\int\limits_\alpha^\beta x^\varkappa a_k(x)\,dx\right| \leqslant M, \quad \varkappa = 0, \ldots, 2(n-k-1), \; k = 1, \ldots, n-1, \tag{9}$$

gelten. (Das ist insbesondere dann der Fall, wenn alle Integrale

$$\int\limits_0^\infty x^\varkappa a_k(x)\,dx, \quad \varkappa = 0, \ldots, 2(n-k-1), \; k = 1, \ldots, n-1,$$

konvergieren.)

Wir skizzieren den Beweis für den Fall $n = 2$ und zeigen, dass

$$\int\limits_{R_1}^{S_2} a_1(x)\,[w_2'(x)]^2\,dx = \int\limits_{R_1}^{S_2} a_1(x)\,{}_1v_1^2(x)\,dx$$

für $R_2 \to \infty$ beschränkt bleibt. Da ${}_1v_1^2(x)$ auf den Intervallen $[R_2, S_1]$, $[S_1, R_3]$ und $[R_4, S_2]$ eine monotone Funktion ist, gibt es Zahlen ξ_2, $R_2 \leqslant \xi_2 \leqslant S_1$, ξ_3, $S_1 \leqslant \xi_3 \leqslant R_3$, und ξ_4, $R_4 \leqslant \xi_4 \leqslant S_2$, so dass

$$\int\limits_{R_1}^{S_2} a_1(x)\,{}_1v_1^2(x)\,dx = \int\limits_{R_1}^{R_1+1} a_1(x)\,{}_1v_1^2(x)\,dx + \int\limits_{R_1+1}^{\xi_2} a_1(x)\,dx + \int\limits_{\xi_3}^{\xi_4} a_1(x)\,dx \tag{10}$$

gilt. Der erste Summand auf der rechten Seite von Gleichung (10) hängt von R_2 nicht ab, und die beiden anderen Summanden sind nach Voraussetzung (9) beschränkt.

Entsprechend wird im Falle $n > 2$ geschlossen.

2° (a) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{a_n(x)} = \infty$,

(b) $\int\limits_0^\infty x^{2(n-1)} a_0(x)\,dx = -\infty$,

(c) $\int\limits_0^\infty x^{2(n-k-1)} a_k^+(x)\,dx < \infty$, $a_k^+(x) = \max\left(a_k(x), 0\right)$, $k = 1, \ldots, n-1$.

Im folgenden wird das Kriterium von Leighton auf elliptische Differentialoperatoren zweiter Ordnung übertragen. Ein im Raum R^n gelegenes

Gebiet G heisst Knotengebiet der Gleichung (2), wenn diese Gleichung eine nichttriviale Lösung u besitzt, die zu

$$W_{2,\mathrm{loc}}^{2}(G) \cap \mathring{W}_2^1(G)\ (^3)$$

gehört. Die Differentialgleichung (2) heisst oszillatorisch, wenn sie für jedes $\varrho > 0$ ein Knotengebiet besitzt, daß ausserhalb der Kugel $K_\varrho = \{x \mid |x| < \varrho\}$ liegt.

Was die Elliptizität der Gleichung (2) betrifft, so wird vorausgesetzt, dass der kleinste Eigenwert $\lambda_0(x)$ der Koeffizientenmatrix $(a_{jk}(x))_{1 \leqslant j,k \leqslant n}$ überall positiv ist. Mit

$$\xi_j = \frac{x_j}{|x|}, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 = 1,$$

gilt dann die Abschätzung

$$\lambda_0(x) \leqslant \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k. \tag{11}$$

Durch Mittelung der in der Ungleichung (11) rechts stehenden quadratischen Form über die Kugel vom Radius $|x| = r$ erhält man die Funktion

$$\Lambda(r) = \frac{1}{|\omega|} \int_{|x|=r} \Big(\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \Big) d\omega. \tag{12}$$

In (12) ist $d\omega$ das Flächenelement der Einheitskugel, und $|\omega|$ ist das Mass ihrer Oberfläche. Der Mittelwert (12) wird im folgenden Satz verwendet.

SATZ 2. *Wenn die Voraussetzungen*

$$\int_1^\infty \frac{r^{1-n}}{\Lambda(r)} dr = \infty \quad \text{und} \quad \int_{K^n} q(x)dx = -\infty \tag{13}$$

erfüllt sind, so ist die Differentialgleichung (2) oszillatorisch.

Beweis. $R_1 > 0$ wird beliebig gewählt. Für die spezielle Funktion $u(x) = w(x)$,

$$w(x) = w(r) = \begin{cases} 0, & |x| = r \leqslant R_1, \\ r - R_1, & R_1 \leqslant |x| \leqslant R_1 + 1, \\ 1, & R_1 + 1 \leqslant |x| \leqslant R_2, \\ 1 - \int_{R_2}^{r} \frac{t^{1-n}}{\Lambda(t)} dt, & R_2 \leqslant |x| \leqslant S, \quad \int_{R_2}^{S} \frac{t^{1-n}}{\Lambda(t)} dt = 1, \\ 0, & |x| \geqslant S, \end{cases}$$

(3) Der Sobolevsche Raum $W_{2,\mathrm{loc}}^2(G)$ besteht aus der Menge derjenigen in G definierten (komplexwertigen) Funktionen, deren verallgemeinerte Ableitungen bis zur Ordnung 2 auf jeder kompakten Teilmenge von G quadratisch integrierbar sind.

$\mathring{W}_2^1(G)$ ist die Vervollständigung von $C_0^\infty(G)$ in der Norm des Sobolevschen Raumes $W_2^1(G)$.

wird die quadratische Form

$$A[u,u] = \sum_{j,k=1}^{n} \int_{K_{R_1,S}} a_{jk}(x) u_{x_j} \bar{u}_{x_k} dx + \int_{K_{R_1,S}} q(x)|u|^2 dx, \qquad u \in \mathring{W}_2^1(K_{R_1,S}),$$

nach oben abgeschätzt. Dabei ist $K_{R_1,S}$ die Kugelschale

$$K_{R_1,S} = \{x | R_1 \leqslant |x| \leqslant S\}.$$

Die Funktion $w(x)$ liegt in $\mathring{W}_2^1(K_{R_1,S})$, und für sie gilt

$$\begin{aligned}
(14) \quad A[w,w] &= \sum_{j,k=1}^{n} \int_{R_1 \leqslant |x| \leqslant R_1+1} a_{jk}(x) w_{x_j} w_{x_k} dx + \\
&\quad + \sum_{j,k=1}^{n} \int_{R_2 \leqslant |x| \leqslant S} a_{jk}(x) \frac{r^{2(1-n)}}{\Lambda^2(r)} \frac{x_j x_k}{r^2} dx + \int_{R_1 \leqslant |x| \leqslant S} q(x) w^2 dx \\
&= C_{R_1} + \int_{R_2}^{S} \frac{r^{1-n}}{\Lambda^2(r)} \int_{|x|=r} \Big(\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \xi_j \xi_k \Big) d\omega dr + \int_{R_1 \leqslant |x| \leqslant S} q(x) w^2 dx \\
&= C_{R_1} + |\omega| \int_{R_2}^{S} \frac{r^{1-n}}{\Lambda(r)} dr + \int_{R_1 \leqslant |x| \leqslant S} q(x) w^2(x) dx .
\end{aligned}$$

Der letzte Summand wird wie folgt behandelt.

$$\int_{R_1 \leqslant |x| \leqslant S} q(x) w^2(x) dx = \int_{R_1}^{S} w^2(r) r^{n-1} \Big(\int_{|x|=r} q(x) d\omega \Big) dr = \int_{R_1}^{S} w^2(r) r^{n-1} Q(r) dr$$

mit

$$Q(r) = \int_{|x|=r} q(x) d\omega .$$

Da der Faktor $w^2(r)$ auf $[R_1, R_1+1]$ von Null bis Eins monoton steigt und auf $[R_2, S]$ von Eins bis Null monoton fällt, gibt es Zahlen ϱ_1, $R_1 \leqslant \varrho_1 \leqslant R_1+1$, und ϱ_2, $R_2 \leqslant \varrho_2 \leqslant S$, so dass

$$\int_{R_1}^{S} w^2(r) r^{n-1} Q(r) dr = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} r^{n-1} Q(r) dr = \int_{\varrho_1 \leqslant |x| \leqslant \varrho_2} q(x) dx$$

gilt. Damit vereinfacht sich die Abschätzung (14) zu

$$\begin{aligned}
(15) \quad & A[w,w] \\
& = C_{R_1} + |\omega| + \int_{\varrho_1 \leqslant |x| \leqslant \varrho_2} q(x) dx, \qquad R_1 \leqslant \varrho_1 \leqslant R_1+1,\ R_2 \leqslant \varrho_2 \leqslant S.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite der Abschätzung (15) wird nach Voraussetzung (13) negativ, wenn (bei festem R_1) der Parameter R_2 hinreichend gross gewählt wird.

Es existiert also ein $S > R_1$, so dass

$$(16) \qquad \inf_{\substack{u \in \mathring{W}_2^1(K_{R_1,S}) \\ \|u\|_{K_1,S} = 1}} A[u,u] < 0, \qquad \|u\|^2_{K_1,S} = \int_{K_{K_1,S}} |u|^2\, dx,$$

gilt. Die durch die nach unten halbbeschränkte Form

$$(17) \qquad A[u,v], \quad u, v \in \mathring{W}_2^1(R_1, S).$$

definierte Norm

$$(A[u,u] + c\,\|u\|^2_{K_1,S})^{1/2}, \qquad c \text{ hinreichend gross,}$$

ist zur Norm des Raumes $\mathring{W}_2^1(K_{K_1,S})$ äquivalent, da auf $K_{K_1,S}$ die Koeffizienten $a_{jk}(x)$ und $q(x)$ beschränkt sind und

$$\min_{x \in K_{K_1,S}} \lambda_0(x) > 0$$

gilt. Die Form (16) ist daher abgeschlossen und definiert eindeutig einen selbstadjungierten Operator

$$\hat{A}_S, \ D(\hat{A}_S) \subseteq \mathring{W}_2^1(K_{K_1,S}),$$

wobei nach [1], Theorem 5

$$D(\hat{A}_S) = \mathring{W}_2^1(K_{K_1,S}) \cap W_2^2(K_{K_1,S})$$

gilt. Das Spektrum von $\hat{A}_S$ ist diskret, und der kleinste Eigenwert $\lambda_1(S)$ von $\hat{A}_S$ ist wegen (16) negativ. Nach dem Variationsprinzip von Courant wird $\lambda_1(S)$ grösser, wenn (bei festem R_1) S verkleinert wird. Es gibt ein R_1', $R_1 < R_1'$, so dass der kleinste Eigenwert $\lambda_1(R_1')$ von $\hat{A}_{K_1'}$ gleich Null ist. Für die zugehörige Eigenfunktion $u(x)$ gilt dann

$$Au = 0, \qquad u \in \mathring{W}_2^1(K_{K_1,K_1'}) \cap W_2^2(K_{K_1,K_1'}).$$

Der Satz 2 ist bewiesen.

Bemerkung. Im Falle $n = 1$ erhält man das Kriterium von Leighton. Wird im Falle $n = 2$ die Schrödingergleichung

$$-\Delta u + q(x) u = 0, \qquad x = (x_1, x_2) \in R^2,$$

betrachtet, so sind die Voraussetzungen (13) erfüllt, wenn

$$\int_{K^2} q(x)\, dx = -\infty$$

gilt. Dass die Schrödingergleichung unter dieser Voraussetzung oszilliert, wurde unabhängig voneinander von Noussair [13] und Kreith und Travis [6] bewiesen. Man vergleiche auch [12]. Benutzt man anstelle der Funktion (12) die Funktion

$$\tilde{\Lambda}(r) = \frac{1}{|\omega|} \int_{|x|=1} \Lambda_0(x)\, d\omega,$$

wobei $\Lambda_0(x)$ der grösste Eigenwert der Matrix $(a_{jk}(x))_{1 \le j,k \le n}$ an der Stelle x ist, und sind entsprechend die Voraussetzungen (13) mit $\tilde{\Lambda}(r)$ erfüllt, so ist die Gleichung (2) ebenfalls oszillatorisch. In dieser etwas schwächeren Form wurde der Satz 2 früher mit einer anderen Methode von Kreith und Travis [6], Theorem 5.1, bewiesen.

Literatur

[1] F. E. Browder, *On the spectral theory of elliptic differential operators I*, Math. Ann. 142 (1961), p. 22–130.

[2] I. M. Glazman, *Direct methods of qualitative spectral analysis of singular differential operators*, Jerusalem 1965.

[3] D. Hinton, *A criterion for (n, n)-oscillation in differential equations of order $2n$*, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968), p. 511–518.

[4] R. W. Hunt and M. S. T. Namboodiri, *Solution behavior for general self-adjoint differential equations*, Proc. London Math. Soc. (3) 21 (1970), p. 637–650.

[5] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Berlin, Heidelberg, New York 1966.

[6] K. Kreith and C. C. Travis, *Oscillation criteria for self-adjoint elliptic equations*, Pacific J. Math. 41 (1972), p. 743–753.

[7] W. Leighton, *On self-adjoint differential equations of second order*, J. London Math. Soc. 27 (1952), p. 37–47.

[8] – and Z. Nehari, *On the oscillation of solutions of self-adjoint differential equations of the fourth order*, Trans. Amer. Math. Soc. 89 (1958), p. 325–377.

[9] R. T. Lewis, *Oscillation and nonoscillation criteria for some self-adjoint even order linear differential operators*, Pacific J. Math. 51 (1974), p. 221–234.

[10] – *The oscillation of fourth order linear differential operators*, Canad. J. Math. 27 (1975), p. 138–145.

[11] – *The existence of conjugate points for self-adjoint differential equations of even order*, Proc. Amer. Math. Soc. 56 (1976), p. 162–166.

[12] E. Müller-Pfeiffer, *Kriterien für die Oszillation von elliptischen Differentialgleichungen höherer Ordnung*, Math. Nachr. 90 (1979), p. 239–247.

[13] E. S. Noussair, *Oscillation theory of elliptic equations of order 2m*, J. Differential Eqs. 10 (1971), p. 100–111.

[14] S. L. Sobolev, *Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik*, Berlin 1964.

[15] C. A. Swanson, *Comparison and oscillation theory of linear differential equations*, Academic Press, New York 1968.

[16] A. Wintner, *A criterion of oscillatory stability*, Quart. Appl. Math. 7 (1949), p. 115–117.

Reçu par la Rédaction le 3. 5. 1978