

Zur Methode der Randintegration bei quasikonformen Abbildungen*

VON REINER KÜHNAU (Halle an der Saale)

Zusammenfassung. Eine der wichtigsten Methoden zur Behandlung von Extremalproblemen in der Theorie der konformen Abbildungen ist die Grunskysche Methode der Randintegration. Diese wird in dieser Arbeit auf quasikonforme Abbildungen (mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung) ausgedehnt. Der Anwendungsbereich erstreckt sich dabei wie im konformen Falle z. B. auf solche Extremalprobleme, bei denen die zugehörigen quadratischen Differentiale vollständige Quadrate sind. Hier genügt es, den Fall der verallgemeinerten Parallelschlitzabbildung genauer zu betrachten, wobei zunächst die Existenz dieser Abbildungen bewiesen wird.

§ 1. Einleitung und Resultate.

I. In vorliegender Mitteilung soll gezeigt werden, wie die zuerst umfassend von H. Grunsky [7], [8] in der Theorie der konformen Abbildungen zur Behandlung von Extremalproblemen angewandte Methode der Randintegration in geeigneter Ausgestaltung auf quasikonforme Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung ausgedehnt werden kann. Wie im konformen Falle ist die Methode in der unmittelbaren Form z.B. immer dann anwendbar, wenn quadratische Differentiale auftreten, die vollständige Quadrate sind. Es genügt, ein repräsentatives Beispiel zu betrachten. Und zwar soll hier die in [14] ursprünglich mit der Grötzschschen Flächenstreifenmethode (in [28] auch mit einer Variationsmethode) in Verallgemeinerung eines klassischen Satzes von R. de Possel [26] und H. Grötzsch [6] (vgl. auch [9]) bewiesene Extremaleigenschaft gewisser quasikonformer Parallelschlitzabbildungen durch diese Randintegration neu gewonnen und dabei verschärft werden. Die Verschärfung gegenüber [14] besteht dabei u.a. darin, daß die dortige Voraussetzung fallen gelassen wird, daß die Abbildungen konform sind in Umgebung der Pole der Ordnung ≥ 2 des zugehörigen quadratischen Differentials (im hier betrachteten Beispiel also in Umgebung des unendlich

* Hierüber habe ich am 22.6.1973 vor der Mathematischen Gesellschaft in Łódź vorgetragen.

fernen Punktes). Diese Verschärfung als solche läßt sich übrigens auch mit der Grötzschschen Flächenstreifenmethode bzw. allgemein der Methode der Extremalmetrik gewinnen. Weiter werden die Grunskyschen Flächensätze [7] (vgl. auch [31], [32], [33], S. 289–290, [4], [1], [24], S. 361 ff., [2], S. 181 ff., [23], S. 172, [29], [30]) auf quasikonforme Abbildungen verallgemeinert. Abschließend wird eine neue Querverbindung zwischen der Theorie der konformen und der der quasikonformen Abbildungen angedeutet.

II. Gegeben sei ein endlich vielfach zusammenhängendes Gebiet \mathfrak{G} der z -Ebene, welches $z = \infty$ im Innern enthält. In \mathfrak{G} sei eine (reelle) beschränkte Funktion $p_0(z) \geq 1$ definiert. Um nebensächliches Beiwerk nicht zu sehr wuchern zu lassen, sei hier zunächst folgende *Glattheitsvoraussetzung* A gemacht (von der man sich in bekannter Weise weitgehend lösen kann). \mathfrak{G} zerfalle in endlich viele von stückweise analytischen Jordankurven berandete Teilbereiche, von denen einer $z = \infty$ im Innern enthält, insbesondere seien die Randkomponenten von \mathfrak{G} selbst stückweise analytisch und nicht punktförmig. In jedem Teilbereich, d.h. bis auf die Punkte der Ausnahmelinien, sei $p_0(z)$ mit hölderstetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehen (in $z = \infty$ nach Stürzung). Es wird noch

$$\nu(z) = \frac{p_0(z) - 1}{p_0(z) + 1} (< 1)$$

gesetzt. Dann gilt zunächst folgender Satz über die Existenz gewisser verallgemeinerter Parallelschlitzabbildungen.

SATZ 1. *Es gibt zu jedem reellen θ genau eine Funktion $j_\theta(z)$ mit folgenden Eigenschaften.*

a. $j_\theta(z)$ ist schlicht in \mathfrak{G} und stetig in den endlichen Punkten von \mathfrak{G} und — bis auf die Punkte der Ausnahmelinien — zweimal stetig partiell differenzierbar und mit positiver Funktionaldeterminante versehen.

b. $j_\theta(z)$ ist in $z = \infty$ durch die Entwicklung

$$(1) \quad (z + e^{2i\theta} \cdot \nu(\infty) \bar{z})(1 + \varepsilon(z))$$

normiert, wobei $\varepsilon(z)$ (wie im folgenden) irgendeine Funktion bezeichnet, für die mit jedem a , $0 < a < 1$, für $z \rightarrow \infty$ gilt $\varepsilon(z) \cdot z^a \rightarrow 0$. Ferner ist ein vorgegebener Punkt von \mathfrak{G} Fixpunkt bei $j_\theta(z)$.

c. $e^{-i\theta} j_\theta(z)$ erfüllt das System

$$(2) \quad w_{\bar{z}} = \nu \cdot \overline{w_z}.$$

d. Die Bilder der Randkomponenten sind Strecken des Neigungswinkels θ gegen die positiv reelle Achse.

$$e. j_\theta(z) = e^{i\theta} \cdot [\cos \theta \cdot j_0(z) - i \sin \theta \cdot j_{\pi/2}(z)].$$

III. Für diese Parallelschlitzabbildungen $j_0(z)$ ergibt sich nun eine Extremaleigenschaft in Verallgemeinerung des genannten klassischen Satzes von R. de Possel und H. Grötzsch, sowie in Verallgemeinerung von [14]. Wir können uns dabei wie in diesem klassischen konformen Falle auf den Fall $\theta = 0$ beschränken. Wir betrachten dann die Klasse \mathfrak{A} der (nicht notwendig schlichten) Abbildungen $w = w(z)$ von \mathfrak{G} , die folgende Voraussetzungen erfüllen. 1. Die Abbildungen $w(z)$ seien stetig und in jedem der von den oben genannten Ausnahmelinien berandeten Teilbereiche zweimal stetig partiell differenzierbar, und zwar einschließlich der Randpunkte (wobei für die verschiedenen Ufer natürlich verschiedene Ableitungen entstehen können). 2. Es gilt $w_z = 0$ für $v = 0$, wobei $|w_z|^2/v$ stetig bleibt, wenn man dieses dort $= 0$ definiert. 3. In einer gewissen Umgebung von $z = \infty$ sei eine (zweimal stetig partiell differenzierbare) Funktion $j^*(z)$ erklärt, die (2) und in $z = \infty$ die Normierung (1) mit $\theta = 0$ erfüllt und für alle $w(z) \in \mathfrak{A}$ einheitlich ist, so daß $w - j^*$ nach Stürzung $z = 1/\zeta$ als Funktion von ζ in $\zeta = 0$ zweimal stetig differenzierbar ist. (Man kann dabei z.B. $j^*(z) = j_0(z)$ wählen.) Die letzte Bedingung 3 ist unabhängig von der speziellen Wahl der Funktion j^* z.B. sicher dann befriedigt nach [25], Teil 1, § 9, wenn $w(z)$ selbst in einer Umgebung von $z = \infty$ (1) und (2) erfüllt, da dann $w - j^*$ als Lösung von (2) in $z = \infty$ eine hebbare Singularität besitzt.

Ferner machen wir noch folgende *Voraussetzung B*. Es seien die Ausnahmelinien und in Umgebung derselben die Funktion $p_0(z)$ so beschaffen, daß $j_0(z)$ und $j_{\pi/2}(z)$ die oben unter 1 genannte Glattheitsbedingung erfüllen. Das ist sicher z.B. dann gewährleistet, wenn — im folgenden *Voraussetzung B** genannt — $p_0(z)$ links und rechts der analytischen Ausnahmelinien in gewissen Uferstreifen jeweils gleich zwei (möglicherweise verschiedenen) Konstanten ist⁽¹⁾, und die Randkomponenten geschlossene und durchweg analytische Jordankurven sind, in deren Umgebung $p_0(z)$ jeweils konstant ist.

(¹) Es gilt nämlich nach der Schlußweise z. B. in [17], S. 3 oder [19]: Ist Ω eine analytische Kurve und $f(z)$ eine in Umgebung von Ω stetige Funktion, wobei auf der einen Seite von Ω die Funktion $f(z) + q_1 \overline{f(z)}$ ($|q_1| < 1$), auf der anderen Seite $f(z) + q_2 \overline{f(z)}$ ($|q_2| < 1$) analytisch ist, dann sind diese Funktionen noch auf Ω analytisch. Beim Beweis kann man Ω als die reelle Achse annehmen. Dann ergibt sich diese Behauptung daraus, daß die etwa oberhalb der reellen Achse analytische Funktion $f(z) + q_1 \overline{f(z)}$ mit der unterhalb der reellen Achse analytischen Funktion

$$\frac{1 - |q_1|^2}{1 - \bar{q}_1 q_2} [f(z) + q_2 \overline{f(z)}] + \frac{q_1 - q_2}{1 - \bar{q}_1 q_2} \overline{[f(\bar{z}) + q_1 \overline{f(\bar{z})}]}$$

längs der reellen Achse übereinstimmt, also dort noch analytisch ist.

Jeder Abbildung $w(z) \in \mathfrak{A}$ wird nun das Funktional

$$(3) \quad K_w = \Re \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \int_{|z|=R} (w - j^*) (dz + \nu(\infty) \bar{dz})$$

(positive Wegorientierung)

zugeordnet. Der Grenzwert in (3) existiert dabei nach Voraussetzung 3. Man erkennt unschwer, daß $K_w/(2\pi)$ den Realteil des ersten Koeffizienten des regulären Bestandteiles der Laurententwicklung von $w(z)$ um $z = \infty$ darstellt (bis auf eine Konstante), falls speziell $p_0(z) \equiv 1$ gilt in einer Umgebung von $z = \infty$.

Daneben betrachten wir noch das Funktional

$$(4) \quad \mathfrak{F}_w = I_w + \iint_{\mathfrak{G}} \left(\nu |w_z|^2 - \frac{1}{\nu} |w_{\bar{z}}|^2 \right) dx dy.$$

Dabei ist I_w der (bei Nichtschlichtheit in bekannter Weise vorzeichenbehaftete, z.B. gemäß $\frac{1}{2i} \int \bar{w} dw$ definierte) Inhalt des Komplementes des Bildgebietes. Wie unten folgt, konvergiert in (4) das Gebietsintegral für $w(z) \in \mathfrak{A}$, wenn man von \mathfrak{G} zunächst durch $|z| = R$ ein Teilgebiet abgrenzt und den Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ durchführt. Das Gebietsintegral in (4) kann man noch schreiben als

$$(5) \quad \iint \left(\nu |w_z|^2 - \frac{1}{\nu} |w_{\bar{z}}|^2 \right) dx dy = \iint \frac{\nu^2 - \mu^2}{\nu(1 - \mu^2)} (|w_z|^2 - |w_{\bar{z}}|^2) dx dy,$$

$$\mu = |w_{\bar{z}}|/|w_z|,$$

so daß es dann als Flächeninhalt mit dem Gewicht $(\nu^2 - \mu^2)/\nu(1 - \mu^2)$ erkennbar ist.

Nun gilt unter den Voraussetzungen *A* und *B* die folgende Verallgemeinerung von Satz 1 in [14].

SATZ 2. $K_w + \mathfrak{F}_w$ — und unter der zusätzlichen Voraussetzung von $|w_{\bar{z}}| \leq \nu \cdot |w_z|$ und Schlichtheit der Abbildungen auch K_w — werden in der Abbildungsklasse \mathfrak{A} genau für $w(z) \equiv j_0(z) + \text{const}$ maximal.

Diese Aussage im Spezialfalle $p_0(z) \equiv 1$ findet sich bezüglich K_w — wie schon bemerkt — bei R. de Possel [26] und H. Grötzsch [6], bezüglich $K_w + \mathfrak{F}_w$ bei H. Grunsky [8], bezüglich K_w , wobei nur $p_0(z) \equiv 1$ in einer Umgebung von $z = \infty$ gefordert wird, in [14].

Das weitergehende Problem der Bestimmung des genauen Wertebereichs der komplexen Größe $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \int_{|z|=R} (w - j^*) (dz + \nu(\infty) \bar{dz})$ hat i. allg. keinen Sinn. Das zeigt schon der Fall $p_0(z) \equiv Q$ für alle z (\mathfrak{G} ist dann

die ganze z -Ebene). Hier ist $j_0(z) = z + q\bar{z}$ mit

$$(6) \quad q = \frac{Q-1}{Q+1}.$$

Für die schlichte Abbildung

$$(7) \quad w(z) = \begin{cases} z + q\bar{z} + q \frac{e^{2ia}-1}{1-q^2 e^{2ia}} \cdot \frac{q^2}{z} + q^2 \frac{e^{-2ia}-1}{1-q^2 e^{-2ia}} \cdot \frac{q^2}{\bar{z}} & \text{für } |z| \geq q, \\ z + q\bar{z} + q \frac{e^{2ia}-1}{1-q^2 e^{2ia}} \cdot \bar{z} + q^2 \frac{e^{-2ia}-1}{1-q^2 e^{-2ia}} \cdot z & \text{für } |z| \leq q \end{cases}.$$

ist $w_{\bar{z}} = q\overline{w_z}$ für $|z| \geq q$, $w_{\bar{z}} = qe^{2ia} \overline{w_z}$ für $|z| \leq q$, also überall $|w_{\bar{z}}/w_z| \leq q$, und mit $j^*(z) \equiv j_0(z)$ ist bei $R > q$

$$\frac{1}{i} \int_{|z|=R} (w - j^*)(dz + q\bar{d}z) = -4\pi q^2(1 - q^4)q \cdot \sin a \cdot \frac{\sin a - i \cos a}{1 + q^4 - 2q^2 \cos 2a},$$

so daß der Wertebereich der Größe $\lim_{|z|=R} \frac{1}{i} \int (w - j^*)(dz + q\bar{d}z)$ die ganze linke Hälfte der komplexen Zahlenebene ist, wobei von der begrenzenden imaginären Achse nur ein einziger Punkt hinzuzunehmen ist, nämlich der Nullpunkt, der sich nach Satz 2 genau für $w \equiv j_0 + \text{const}$ einstellt. In diesem Beispiel (vermutlich immer bei $p_0(\infty) \neq 1$) ist also der Wertebereich dieser Größe keine abgeschlossene Kreisscheibe wie im klassischen konformen Falle [6], [27] und im in [14] betrachteten Falle, wo $p_0(z) \equiv 1$ ist in einer Umgebung von $z = \infty$.

Wird speziell $p_0(z) \equiv 1$ für $|z| > 1$, $p_0(z) \equiv Q (> 1)$ für $|z| < 1$ gesetzt, wobei also \mathbb{G} die ganze z -Ebene ausmacht, dann gehört zur Klasse \mathfrak{A} die Klasse $\Sigma(Q)$ der ins Innere des Einheitskreises Q -quasikonform fortsetzbaren schlichten konformen Abbildungen der bekannten Klasse Σ (die noch unsere Glattheitsvoraussetzungen erfüllen). Für diese folgt somit, da dann $j_0(z)$ explizit bekannt ist (vgl. z.B. [14]), in Verallgemeinerung von Satz 3 in [14] der (an sich also auch ohne die Voraussetzung der Schlichtheit und der Q -Quasikonformität gültige)

SATZ 2'. Für die Abbildungen $w(z) \in \Sigma(Q)$ mit der Entwicklung $w(z) = z + a_1/z + \dots$ für $|z| > 1$ gilt mit (6)

$$(8) \quad \Re a_1 + \frac{1}{2\pi} \iint_{|z| < 1} \left(q |w_z|^2 - \frac{1}{q} |w_{\bar{z}}|^2 \right) dx dy \leq q,$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn

$$(9) \quad w(z) = j_0(z) = \begin{cases} z + q/z & \text{für } |z| \geq 1, \\ z + q\bar{z} & \text{für } |z| \leq 1. \end{cases}$$

Hieraus fließt noch die

FOLGERUNG. Für $w(z) = z + a_1/z + \dots \in \Sigma(Q)$ gilt, falls der Inhalt I des Bildes von $|z| < 1$ die Ungleichung

$$I \leq 2\pi \frac{1-q^2}{1+q^2}$$

erfüllt,

$$(10) \quad \operatorname{Re} a_1 \leq q \cdot \sqrt{1 - \left[\frac{I}{\pi(1-q^2)} - 1 \right]^2},$$

wobei das Gleichheitszeichen genau für (9) steht. (Man beachte hierbei, daß nach [16] – vgl. auch [21] – $I \geq \pi(1-q^2)$ gilt, und daß die rechte Seite von (10) bei festem I als Funktion von q monoton steigend ist für die in Betracht kommenden q -Werte.)

IV. Mit den Funktionen $j_0(z)$ und $j_{\pi/2}(z)$ von Satz 1 bilden wir nun

$$(11) \quad M(z) = \frac{1}{2}[j_0(z) - j_{\pi/2}(z)], \quad N(z) = \frac{1}{2}[j_0(z) + j_{\pi/2}(z)].$$

SATZ 3. Diese Funktionen sind durch

$$(12) \quad M_{\bar{z}} = \nu \overline{N_z}, \quad N_{\bar{z}} = \nu \overline{M_z}$$

verknüpft und durch

$$(13) \quad M = \nu(\infty)\bar{z} + z \cdot \varepsilon(z), \quad N = z + z \cdot \varepsilon(z)$$

in $z = \infty$ normiert. Auf dem Rande gilt

$$(14) \quad dN = \overline{dM}.$$

Unter den obigen Voraussetzungen A und B^* gilt weiter folgendes. N erfüllt in \mathfrak{G} $|N_{\bar{z}}| \leq \nu |N_z|$, wobei für die Randpunkte von \mathfrak{G} das Gleichheitszeichen steht. Ferner ist N schlicht und bildet jede Randkomponente von \mathfrak{G} auf eine geschlossene konvexe analytische Jordankurve ab.

Dagegen ist M i. allg. nicht einmal eine „innere Abbildung“ im Sinne von Stoilow, wie man schon im Beispiel $p_0(z) \equiv 1$ für $|z| > 1$, $p_0(z) \equiv Q (> 1)$ für $|z| < 1$ sieht (s.o.). Hier ist $M = q/z$ für $|z| \geq 1$, $M = q\bar{z}$ für $|z| \leq 1$, und die Abbildung der Vollebene erfolgt auf ein „Faltflächenstück“ im Sinne von Koebe, d.h. auf ein Flächenstück, bestehend hier aus zwei Kreisscheiben, die längs des Randes faltenartig verheftet sind.

V. Für diese Funktionen M und N ergibt sich nun eine Extremaleigenschaft, in Verallgemeinerung eines auf H. Grunsky (vgl. die oben unter I angegebene Literatur) zurückgehenden klassischen Resultates. Wir betrachten dazu die Klasse \mathfrak{B} der (nicht notwendig schlichten) Abbildungen $w = w(z)$ von \mathfrak{G} , die folgende Voraussetzungen erfüllen. 1. $w(z)$

besitze die bei der Klasse \mathfrak{A} unter „1“ geforderte Eigenschaft. 2. Es sei $w_z = 0$ dort, wo $\nu = 0$, wobei $|w_z|^2/\nu$ stetig bleibt, wenn man dieses dort $= 0$ definiert. 3. In einer gewissen Umgebung von $z = \infty$, etwa $|z| > K$ (K fest), sei eine zweimal stetig partiell differenzierbare, das System

$$(15) \quad F_z = \overline{\nu G_z}, \quad G_z = \nu \overline{F_z}$$

(hier für F eingesetzt mit einer gewissen anderen Funktion G) erfüllende und in $z = \infty$ wie N durch

$$(16) \quad z(1 + \epsilon(z))$$

normierte, für alle $w \in \mathfrak{B}$ einheitliche Funktion N^* erklärt (man kann z.B. $N^* \equiv N$ wählen), so daß $w - N^*$ nach Stürzung $z = 1/\zeta$ als Funktion von ζ in $\zeta = 0$ zweimal stetig partiell differenzierbar ist. Diese letzte Bedingung ist unabhängig von der speziellen Wahl der Funktion N^* und z.B. sicher dann befriedigt, wenn $w(z)$ selbst in einer Umgebung von $z = \infty$ (15) (dort für F eingesetzt mit einer geeigneten zweiten Funktion G) und (16) erfüllt. Das ergibt sich, wenn man auf $w - N^*$ den in § 6 dargestellten Hilfssatz anwendet. Im folgenden wird nebst Voraussetzung A noch Voraussetzung B gefordert, was offenbar $N \in \mathfrak{B}$ nach sich zieht.

Jeder Abbildung $w(z) \in \mathfrak{B}$ wird nun das Funktional

$$(17) \quad \mathfrak{F}_w^* = I_w + \iint_{|z| > K} \left[\left(\nu |w_z|^2 - \frac{1}{\nu} |w_{\bar{z}}|^2 \right) - \left(\nu |N_w^*|^2 - \frac{1}{\nu} |N_{\bar{z}}^*|^2 \right) \right] dx dy + \\ + \iint_{\mathfrak{G} - \{|z| > K\}} \left(\nu |w_z|^2 - \frac{1}{\nu} |w_{\bar{z}}|^2 \right) dx dy + \nu(\infty) \Re \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \int_{|z|=R} (w - N^*) d\bar{z}$$

zugeordnet. (Zur Deutung des Doppelintegrals als Flächeninhalt mit Gewicht vgl. (5).) Es gilt dann unter den Voraussetzungen A und B der

Satz 4. \mathfrak{F}_w^* wird in der Abbildungsklasse \mathfrak{B} genau für $w(z) \equiv N(z) + \text{const}$ maximal. (Das in (17) in der Definition für \mathfrak{F}_w^* auftretende Doppelintegral konvergiert dabei für $w(z) \in \mathfrak{B}$, wenn man von \mathfrak{G} zunächst durch $|z| = R$ ein Teilgebiet abgrenzt und den Grenzwert für $R \rightarrow \infty$ betrachtet. Das brauchte nicht der Fall zu sein, wenn man in (17) rechts im ersten Gebietsintegral den konvergenzerzeugenden Anteil von N^* wegläßt — vgl. z.B. den Fall $p_0(z) \equiv Q$ (> 1) für alle z . Hier ist $j_0(z) \equiv z + q\bar{z}$, $j_{\pi/2}(z) = z - q\bar{z}$ mit (6), also $N(z) \equiv z$, so daß hier $\iint_{\mathfrak{G}} \left(\nu |N_z|^2 - \frac{1}{\nu} |N_{\bar{z}}|^2 \right) dx dy$ nicht konvergiert).

Für $p_0(z) \equiv 1$ entsteht aus Satz 4 der genannte klassische Satz von H. Grunsky. Als Spezialfall ergibt sich aus Satz 4 für die Klasse $\mathcal{L}(Q)$ (s.o.) der folgende Satz (der an sich wie bei Satz 2' ohne die Voraussetzung der Schlichtheit gültig ist).

SATZ 4'. Für $w(z) \in \Sigma(Q)$ gilt

$$(18) \quad \iint_{|z| < 1} \left(q |w_z|^2 - \frac{1}{q} |w_{\bar{z}}|^2 \right) dx dy \leq q \pi,$$

wobei das Gleichheitszeichen, genau für $w(z) \equiv z$ ($\equiv N(z)$) steht.

VI. Weiters wird unter den gleichen Voraussetzungen, wie zu Satz 1 unter II genannt, unten der folgende Satz über die Existenz gewisser verallgemeinerter Spiralschlitzabbildungen (im Spezialfall Kreisbogen- und Radialschlitzabbildungen) bewiesen.

SATZ 5. Es gibt zu jedem $z_0 \in \mathbb{G}$ und jedem reellen θ genau eine Funktion $j_\theta(z, z_0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften.

a. $j_\theta(z, z_0, \infty)$ ist schlicht in \mathbb{G} und stetig in den endlichen Punkten von \mathbb{G} und — bis auf die Punkte der Ausnahmelinien — zweimal stetig partiell differenzierbar und mit positiver Funktionaldeterminante versehen.

b. Es gilt $j_\theta(z_0, z_0, \infty) = 0$, und in $z = \infty$ liegt die Normierung

$$(19) \quad \log j_\theta = \frac{1}{1 - \nu^2(\infty)} \left[(1 + e^{2i\theta} \nu(\infty)) \log z + \nu(\infty) (e^{2i\theta} + \nu(\infty)) \overline{\log z} \right] + \varepsilon(z)$$

vor (so daß insbesondere $\infty \rightarrow \infty$ gilt).

c. $e^{-i\theta} \log j_\theta$ erfüllt das System (2).

d. Die Bilder der Randkomponenten bei der Abbildung durch $\log j_\theta$ sind Strecken des Neigungswinkels θ gegen die positiv reelle Achse.

e. $\log j_\theta = e^{i\theta} [\cos \theta \cdot \log j_0 - i \cdot \sin \theta \cdot \log j_{\pi/2}]$.

Für diese Abbildungen j_θ kann man leicht noch eine Extremaleigenschaft herleiten. Das soll hier jedoch nicht durchgeführt werden — dazu ist lediglich im Beweis von Satz 2 $j_0(z)$ durch $e^{-i\theta} \log j_\theta(z, z_0, \infty)$, w durch $e^{-i\theta} \log w$ zu ersetzen. Auch lassen sich weiter die in [16] angegebenen Koeffizientenbedingungen vom Grunskyschen Typ und die Verzerrungssätze von Golusinschen Typ in dieser Weise durch eine Randintegration herleiten und in dieser Richtung verallgemeinern.

§ 2. Beweis von Satz 1⁽²⁾. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß $z = 0$ und $z = 1$ innere Punkte von \mathbb{G} sind. Dann ergeben sich nach einer Ähnlichkeitstransformation aus [14] (vgl.

(²) Ein anderer Beweis dieses Satzes ergibt sich — entsprechend einer Bemerkung in [3] auf S. 513 — wie im konformen Falle durch Lösung eines Dirichletschen Problems, wobei man allerdings erst die Existenz von „Grundlösungen“ mit dipolartiger Singularität bereitstellen muß (etwa durch Differentiation nach dem Aufpunkt bei einer Grundlösung mit logarithmischer Singularität wie bei der Greenschen Funktion). Satz 1 läßt sich auch über eine Integralgleichung gewinnen. Der hier gegebene Beweis hat den Vorteil, ganz im Gebiete der quasikonformen Abbildungen zu verlaufen. Er läßt sich übrigens auch mit schwächeren Voraussetzungen durchführen.

auch den andersartigen und ganz im Gebiete der quasikonformen Abbildungen verlaufenden Beweis in [28]) zwei Abbildungen $j_0^{(R)}$ und $j_{\pi/2}^{(R)}$, für die $j_0^{(R)}$ und $i \cdot j_{\pi/2}^{(R)}$ auf jeder Randkomponente konstanten Imaginärteil besitzen und das System (2) erfüllen, wenn dort ν durch 0 ersetzt wird für $|z| > R$ (= hinreichend groß und zunächst fest), wobei, $j_0^{(R)}(0) = j_{\pi/2}^{(R)}(0) = 0$, $j_0^{(R)}(1) = e^{i\beta}$, $i \cdot j_{\pi/2}^{(R)}(1) = e^{i\gamma}$ gilt, und in $z = \infty$ für $j_0^{(R)}$ und $j_{\pi/2}^{(R)}$ eine Entwicklung der Form $\lambda z + \mathfrak{P}(1/z)$ mit einer gewissen positiven Konstanten λ vorliegt (β, γ, λ von der Abbildung, insbesondere von R abhängig). Hier ist sicher $e^{i\beta} \neq e^{i\gamma}$, da sonst das Argumentprinzip — angewandt auf $j_0^{(R)}(z) - i j_{\pi/2}^{(R)}(z)$ (mit mindestens 2 Nullstellen und einem Pol erster Ordnung) — einen Widerspruch ergäbe, da diese Differenz Lösung von (2) ist und also das sog. Darstellungstheorem anwendbar ist in einem etwa durch einen großen Kreis abgegrenzten Teilstück von \mathfrak{G} . Demnach gibt es sicher mit reellen Koeffizienten gebildete Linearkombinationen $j_0^{(R)*}$ und $i \cdot j_{\pi/2}^{(R)*}$ von $j_0^{(R)}$ und $i \cdot j_{\pi/2}^{(R)}$, die wieder (2) erfüllen, auf den Randkomponenten konstanten Imaginärteil besitzen und damit schlicht sind, $j_0^{(R)*}(0) = i \cdot j_{\pi/2}^{(R)*}(0) = 0$, $j_0^{(R)*}(1) = 1$, $i \cdot j_{\pi/2}^{(R)*}(1) = i$ erfüllen, und wobei $j_0^{(R)*}$ und $j_{\pi/2}^{(R)*}$ in $z = \infty$ in der Form $\lambda z + \mathfrak{P}(1/z)$ mit komplexem $\lambda \neq 0$ normiert sind. Nach bekannten Verzerrungssätzen (vgl. z.B. [3], Lemma 13) sind dann $j_0^{(R)*}$ und $j_{\pi/2}^{(R)*}$ für $R \rightarrow \infty$ auf jeder beschränkten Teilmenge von \mathfrak{G} gleichmäßig beschränkt, so daß nach bekannten Konvergenzsätzen (vgl. z.B. [22]) für Folgen $R = R_n \rightarrow \infty$ gleichmäßige Konvergenz auf jeder beschränkten Teilmenge von \mathfrak{G} gegen Grenzfunktionen j_0^* und $j_{\pi/2}^*$ stattfindet (die Randkonvergenz ergibt sich daraus, daß man alle Abbildungen nach einer konformen Hilfsabbildung der Randlinien in Kreise über dieselben hinweg in einen Randstreifen durch Spiegelung quasikonform fortsetzen kann). Diese sind wegen $j_0^*(0) = j_{\pi/2}^*(0) = 0$, $j_0^*(1) = 1$, $i \cdot j_{\pi/2}^*(1) = i$ sicher nicht konstant, also schlicht. Ferner besitzen j_0^* und $i \cdot j_{\pi/2}^*$ auf jeder Randkomponente konstanten Imaginärteil und erfüllen (2) in ganz \mathfrak{G} nach bekannten Konvergenzsätzen für pseudoanalytische Funktionen. In $z = \infty$ müssen diese Funktionen wegen $\infty \rightarrow \infty$ einfache Pole im Sinne von [25] haben (bei höherer Ordnung ergäbe sich wegen Satz 5 in Teil 1, § 9 von [25] zur Schlichtheit ein Widerspruch) und deshalb dort nach Teil 1, § 10 von [25] Entwicklungen der Form

$$j_0^* = A_0(e^{i\delta} z + \nu(\infty)e^{-i\delta}\bar{z})(1 + \varepsilon(z)),$$

$$i \cdot j_{\pi/2}^* = A_{\pi/2}(e^{i\zeta} z + \nu(\infty)e^{-i\zeta}\bar{z})(1 + \varepsilon(z))$$

mit positivem $A_0, A_{\pi/2}$. Hierbei ist sicher $e^{i\delta} \neq e^{i\zeta}$. Sonst besäße nämlich eine mit reellen Koeffizienten $\neq 0$ gebildete Linearkombination von j_0^* und $i \cdot j_{\pi/2}^*$ in $z = \infty$ eine Entwicklung der Form $A \cdot (e^{i\delta} z + \nu(\infty)e^{-i\delta}\bar{z}) \cdot \varepsilon(z)$ mit reellem A , nach Teil 1, § 9 in [25] also als eine Lösung von (2) eine hebbare Unstetigkeit in $z = \infty$, was nach dem Argumentprinzip nicht

angeht, da diese Funktion wieder auf den Randkomponenten konstanten Imaginärteil besitzt und in $z = 0$ eine Nullstelle, also $\equiv 0$ sein müßte, was wegen des Verhaltens in $z = 1$ nicht möglich ist.

Also gibt es eine reelle Linearkombination $e^{-i\theta} \cdot j_0$ von j_0^* und $i \cdot j_{\pi/2}^*$, für die j_0 in $z = \infty$ die Entwicklung (1) besitzt. Damit ist die behauptete Existenz von $j_0(z)$ gezeigt. Die unter a behauptete Differenzierbarkeitseigenschaft von j_0 liegt nach [25] für Lösungen von (2) vor. Die Positivität der Funktionaldeterminante ergibt sich z. B. daraus, daß in jeder kleinen Kreisscheibe $e^{-i\theta} j_0$ mit einer (2) erfüllenden verallgemeinerten Riemannschen Abbildungsfunktion, die ja nach bekannten Resultaten von Gergen und Dressel diese Eigenschaft besitzt, übereinstimmen muß. Die Teilbehauptung e ergibt sich dann schließlich durch Betrachtung der Differenz von rechter und linker Seite, die in $z = \infty$ nach Teil 1, § 9 in [25] eine hebbare Unstetigkeit besitzt, also nach dem Argumentprinzip $\equiv 0$ sein muß. Diese Schlußweise liefert auch in bekannter Weise die Unität von $j_0(z)$ zu festem θ .

§ 3. Beweis von Satz 2. Durch Anwendung des Gaußschen Satzes auf das Teilstück $\mathfrak{G}_R = \mathfrak{G} - \{|z| > R\}$ von \mathfrak{G} erhält man zunächst für j_0 und eine beliebige Vergleichsabbildung $w(z) \in \mathfrak{A}$, wenn bei \iint über \mathfrak{G}_R , bei \oint über den vollen Rand von \mathfrak{G}_R integriert wird (überall so, daß das Gebiet \mathfrak{G}_R zur Linken liegt) und \mathfrak{L} die Gesamtheit der Randkomponenten von \mathfrak{G} bezeichnet (auch hier \mathfrak{G} zur Linken liegend):

$$\begin{aligned}
 (20) \quad \iint (|j_{0z} - w_z|^2 - |j_{0\bar{z}} - w_{\bar{z}}|^2) dx dy &= \frac{1}{2i} \oint \overline{(j_0 - w)} d(j_0 - w) \\
 &= \frac{1}{2i} \oint \overline{(j_0 - w)} dj_0 + \frac{1}{2i} \oint \bar{w} dw + \frac{1}{2i} \oint w \overline{dj_0} \\
 &= \frac{1}{2i} \oint \overline{(j_0 - w)} dj_0 + \frac{1}{2i} \oint \bar{w} dw + \frac{1}{2i} \oint \overline{(j_0 - w)} dj_0 - \frac{1}{2i} \oint \bar{j}_0 dj_0 \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i} \oint \overline{(j_0 - w)} dj_0 \right\} + \frac{1}{2i} \oint \bar{w} dw - \frac{1}{2i} \oint \bar{j}_0 dj_0.
 \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}
 (21) \quad \operatorname{Re} \frac{1}{2i} \oint (j_0 - w) dj_0 &= \operatorname{Re} \frac{1}{2i} \oint (j_0 - w) (j_{0\bar{z}} dz + j_{0z} d\bar{z}) \\
 &= \operatorname{Re} \iint \{ [(j_0 - w) j_{0z}]_{\bar{z}} - [(j_0 - w) j_{0\bar{z}}]_z \} dx dy \\
 &= \operatorname{Re} \iint (w_z j_{0\bar{z}} - w_{\bar{z}} j_{0z}) dx dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \Re \iint \left(w_z \nu \bar{j}_{0z} - w_{\bar{z}} \frac{1}{\nu} \bar{j}_{0\bar{z}} \right) dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \iint \left(\nu |w|^2 - \frac{1}{\nu} |w_{\bar{z}}|^2 \right) dx dy - \frac{1}{2} \iint \left(\nu |w_z - j_{0z}|^2 - \frac{1}{\nu} |w_{\bar{z}} - j_{0\bar{z}}|^2 \right) dx dy.
 \end{aligned}$$

Wegen $dj_0 = \bar{d}\bar{j}_0$ auf \mathfrak{L} ist noch

$$\begin{aligned}
 (22) \quad \Re \frac{1}{i} \int_{|z|=R} (j_0 - w) dj_0 + \Re \frac{1}{i} \int_{|z|=R} \overline{(j_0 - w)} d\bar{j}_0 \\
 = \Re \frac{1}{i} \oint (j_0 - w) dj_0 + \Re \frac{1}{i} \oint \overline{(j_0 - w)} d\bar{j}_0.
 \end{aligned}$$

Ersetzt man hier rechts die sich aus (20) und (21) ergebenden Werte für diese Integrale, entsteht aus der rechten Seite von (22) wegen $I_w = -\frac{1}{2i} \int_{\mathfrak{L}} \bar{w} dw$, $-\frac{1}{2i} \int_{\mathfrak{L}} \bar{j}_0 dj_0 = 0$ (= Inhalt des Komplementes eines Schlitzgebietes), $\int_{|z|=R} \bar{j}_0 dj_0 = -\int_{|z|=R} j_0 \bar{d}\bar{j}_0$

$$\begin{aligned}
 (23) \quad I_w - \frac{1}{2i} \int_{|z|=R} \bar{w} dw + \frac{1}{2i} \int_{|z|=R} \bar{j}_0 dj_0 + \iint \left(\nu |w_z|^2 - \frac{1}{\nu} |w_{\bar{z}}|^2 \right) dx dy + \\
 + \iint \left[(1 - \nu) |w_z - j_{0z}|^2 + \left(\frac{1}{\nu} - 1 \right) |w_{\bar{z}} - j_{0\bar{z}}|^2 \right] dx dy.
 \end{aligned}$$

Die linke Seite von (22) läßt sich noch nach einer partiellen Integration umschreiben als

$$\begin{aligned}
 (24) \quad \Re \frac{1}{i} \int_{|z|=R} (j_0 - w) dj_0 + \Re \frac{1}{2i} \int_{|z|=R} \overline{(j_0 - w)} d(j_0 - w) - \frac{1}{2i} \int_{|z|=R} \bar{w} dw + \\
 + \frac{1}{2i} \int_{|z|=R} \bar{j}_0 dj_0.
 \end{aligned}$$

Im ersten Summanden kann man hier noch umformen gemäß

$$\begin{aligned}
 \int_{|z|=R} (j_0 - w) dj_0 &= - \int_{|z|=R} j_0 d(j_0 - w) \\
 &= - \int_{|z|=R} [z + \nu(\infty)\bar{z}] [(j_0 - w)_z dz + (j_0 - w)_{\bar{z}} \bar{d}z] + \\
 &\quad + \int_{|z|=R} [z + \nu(\infty)\bar{z} - j_0] [(j_0 - w)_z dz + (j_0 - w)_{\bar{z}} \bar{d}z] \\
 &= \int_{|z|=R} (j_0 - w) (dz + \nu(\infty)\bar{d}z) + \int_{|z|=R} [z + \nu(\infty)\bar{z} - j_0] [(j_0 - w)_z dz + (j_0 - w)_{\bar{z}} \bar{d}z].
 \end{aligned}$$

Damit entsteht durch Zusammenfassung von (23) und (24) endgültig

$$\begin{aligned}
 (25) \quad \Re \frac{1}{i} \int_{|z|=R} (w-j_0) (dz + \nu(\infty) \bar{d}z) + I_w + \iint \left(\nu |w_z|^2 - \frac{1}{\nu} |w_{\bar{z}}|^2 \right) dx dy \\
 = - \iint \left[(1-\nu) |w_z - j_{0z}|^2 + \left(\frac{1}{\nu} - 1 \right) |w_{\bar{z}} - j_{0\bar{z}}|^2 \right] dx dy + \\
 + \Re \frac{1}{2i} \int_{|z|=R} \overline{(w-j_0)} \cdot [(w-j_0)_z dz + (w-j_0)_{\bar{z}} \bar{d}z] - \\
 - \Re \frac{1}{i} \int_{|z|=R} [z + \nu(\infty) \bar{z} - j_0] [(w-j_0)_z dz + (w-j_0)_{\bar{z}} \bar{d}z].
 \end{aligned}$$

Hier streben auf der rechten Seite die beiden Kurvenintegrale nach 0 für $R \rightarrow \infty$ wegen (1) und weil die Ableitungen von $w-j_0$ in $z = \infty$ von zweiter Ordnung abklingen müssen. Aus gleichem Grunde konvergiert das rechts stehende Gebietsintegral für $R \rightarrow \infty$. Daher konvergiert in (25) auch das Gebietsintegral der linken Seite für $R \rightarrow \infty$, wie bei der Definition (4) behauptet. Aus (25) ergibt sich die Behauptung von Satz 2, da die rechte Seite einem reellen nicht positiven Grenzwert zustrebt.

Die Folgerung zu Satz 2' ergibt sich noch aus der bei $w(z) \in \Sigma(Q)$ wegen (8) für alle q^* mit $q \leq q^* \leq 1$ gültigen Ungleichung

$$\begin{aligned}
 \Re a_1 + \frac{1}{2\pi} \iint_{|z|<1} \frac{q^{*2} - q^2}{q^* \cdot (1 - q^2)} \cdot (|w_z|^2 - |w_{\bar{z}}|^2) dx dy \\
 \leq \Re a_1 - \frac{1}{2\pi} \iint_{|z|<1} \left(q^* |w_z|^2 - \frac{1}{q^*} |w_{\bar{z}}|^2 \right) dx dy \leq q^*,
 \end{aligned}$$

da aus $w(z) \in \Sigma(Q)$ folgt $w(z) \in \Sigma(Q^*)$ mit $Q^* \geq Q$. Das zieht zunächst

$$(26) \quad \Re a_1 \leq q^* - \frac{1}{2\pi} \frac{q^{*2} - q^2}{q^* (1 - q^2)} \cdot I$$

nach sich und dann (10), wenn man $q^{*2} = q^2 I / [2\pi(1 - q^2) - I]$ (es ist unter den angegebenen Einschränkungen ersichtlich $q \leq q^* \leq 1$) wählt — das liefert in (26) die kleinste rechte Seite.

Zusatzbemerkung. Der Gleichung (25) kann man auch gewisse Extremalaussagen im Falle, es wird nicht durchgängig $\nu < 1$ vorausgesetzt, entnehmen. Man kann dies ersichtlich dann nach (25) tun, wenn man dort, wo $\nu \geq 1$ ist, $w \equiv j_0 + \text{const}$ voraussetzt. Zwecks Zerstörung eventueller Illusionen vgl. man jedoch [18] (dort die Bemerkungen).

§ 4. Ergänzung: Verallgemeinerung eines Satzes von Komatu und Ozawa [12]. Unter sinngemäß analogen Glattheitsvoraussetzungen über auftretende Ränder und Funktionen ergibt sich folgende Verallgemei-

nerung von Satz 2. Das Gebiet \mathfrak{G} zerfalle in die beschränkte und evtl. nicht vorhandene Teilmenge \mathfrak{B}_2 und die Teilmenge \mathfrak{B}_1 (nebst Rändern). Die Randkomponentenmenge \mathfrak{L} zerfalle in die Randkomponentenmengen \mathfrak{L}_1 und \mathfrak{L}_2 (von denen eine evtl. leer ist). In \mathfrak{G} sei wieder eine beschränkte Funktion $p_0(z) \geq 1$ erklärt. Seien $w_1(z)$ und $w_2(z)$ Abbildungen aus \mathfrak{A} mit folgenden Eigenschaften.

Es gelte $w_{1\bar{z}} = \nu w_{1z}$ in \mathfrak{B}_1 , $w_{2\bar{z}} = -\nu w_{2z}$ in \mathfrak{B}_2 , und die Randkomponenten von \mathfrak{L}_1 mögen bei w_1 in Strecken parallel zur reellen Achse, die Randkomponenten von \mathfrak{L}_2 bei w_2 in Strecken parallel zur imaginären Achse übergehen.

Satz 2*. *Es ist $K_{w_2} + \mathfrak{F}_{w_2} \leq K_{w_1} - \mathfrak{F}_{w_1}$, insbesondere bei der zusätzlichen Voraussetzung von $|w_{1\bar{z}}| \leq \nu |w_{1z}|$ in \mathfrak{B}_2 , $|w_{2\bar{z}}| \leq \nu |w_{2z}|$ in \mathfrak{B}_1 und der Schlichtheit beider Abbildungen auch $K_{w_2} \leq K_{w_1}$, mit Gleichheit jeweils genau bei $w_2 = w_1 + \text{const.}$*

Denn die Formel (25) gilt unverändert, wenn dort w durch w_2 , j_0 durch w_1 ersetzt wird und auf der linken Seite

$$I_{w_1} + \iint \left(\nu |w_{1z}|^2 - \frac{1}{\nu} |w_{1\bar{z}}|^2 \right) dx dy$$

hinzugefügt wird. Bei der Herleitung ist dann lediglich bei (21) in \mathfrak{B}_1 die Differentialgleichung für w_1 , in \mathfrak{B}_2 die Differentialgleichung für w_2 zu verwenden, in der (22) entsprechenden Gleichung $\overline{dw_1} = dw_1$ auf \mathfrak{L}_1 , $\overline{dw_2} = -dw_2$ auf \mathfrak{L}_2 .

Für $\nu = 0$ in \mathfrak{G} ergibt sich ein Satz von Y. Komatu und M. Ozawa [12] (vgl. hierzu auch [11]), der auch wie in [5, II] durch die Grötzschsche Technik verhefteter Streifen bewiesen werden kann.

§ 5. Beweis von Satz 3. Zunächst ergeben sich (12), (13) und (14) unmittelbar aus Satz 1. Da nach Voraussetzung B^* die Funktionen j_θ in Umgebung der Randkomponenten nach einer dem jeweils dort vorliegenden konstanten Wert von $p_0(z)$ entsprechenden Affinität in der Bildebene analytisch sind, ist auf den Rändern selbst — wie im klassischen konformen Falle — bei diesen Funktionen die Funktionaldeterminante $\neq 0$ außer in den Urbildern der Schlitzenden (dort sind diese Funktionen jedoch noch beliebig oft differenzierbar). Auf dem Rande gilt nun wegen (2)

$$\begin{aligned} dj_0 &= j_{0z} dz + \nu \overline{j_{0z}} dz, & dj_{\pi/2} &= j_{\pi/2z} dz - \nu \overline{j_{\pi/2z}} dz, \\ (1 - \nu^2) j_{0z} dz &= dj_0 - \nu \overline{dj_0}, & (1 - \nu^2) j_{\pi/2z} dz &= dj_{\pi/2} + \nu \overline{dj_{\pi/2}}. \end{aligned}$$

Also ist $\sigma = j_{0z}/j_{\pi/2z}$ dort imaginär (bzw. 0 oder ∞). In \mathfrak{G} ist nirgends σ imaginär, da sonst in dem betreffenden Punkte die Gleichung $j_{0z} = e^{i\theta} (\cos \theta \cdot j_{0z} - i \cdot \sin \theta \cdot j_{\pi/2z}) = 0$ nach θ auflösbar wäre, was nicht sein kann. Dort wäre dann nämlich bei j_0 die Funktionaldeterminante $|j_{0z}|^2 - |j_{0\bar{z}}|^2$

$= (1 - \nu^2) \cdot |j_{0z}|^2 = 0$, im Widerspruch zu Satz 1. Demnach ist in jedem von den Ausnahmelinien berandeten Teilgebiet von \mathfrak{G} entweder durchweg $\operatorname{Re} \sigma > 0$ oder durchweg $\operatorname{Re} \sigma < 0$. Aus Stetigkeitsgründen (stetige Überführung in den Fall $p_0(z) \equiv 1$) muß in \mathfrak{G} demnach stets $\operatorname{Re} \sigma > 0$ sein.

Für j_0 und $j_{\pi/2}$ sind die Urbilder der Schlitzenden, die durch das Verschwinden von $\partial/\partial z$ charakterisiert sind, verschieden, da sonst wegen Satz 1, e bei allen j_0 ein gewisser Randpunkt P^* stets in ein Schlitzende übergehen würde, was nicht angeht, da durch geeignetes θ nach Satz 1, c auch jeder Nachbarrandpunkt von P^* als Schlitzendenurbild auftreten kann, weil σ imaginär ist auf dem Rande (Widerspruch zu allgemeinen Verzerrungssätzen).

Da nie $\sigma = -1$ sein kann, ist in $\overline{\mathfrak{G}}$ stets $N_z \neq 0$. Ferner gilt wegen $|\sigma - 1|/|\sigma + 1| \leq 1$ in \mathfrak{G}

$$|N_z| = \frac{1}{2} |j_{0z} + j_{\pi/2z}| = \frac{1}{2} \nu |j_{0z} - j_{\pi/2z}| \leq \frac{1}{2} \nu |j_{0z} + j_{\pi/2z}| = \nu |N_z|.$$

Für die Randpunkte steht dabei das Gleichheitszeichen. Daher sind dort auch N_z , M_z und $M_z \neq 0$. Der Rest der Behauptung (Schlichtheit von N , Bildrandkomponenten = geschlossene analytische konvexe Jordankurven) ergibt sich wie im konformen Falle (vgl. z.B. [30], S. 136-137), wenn man berücksichtigt, daß auf N als quasikonforme Abbildung vermöge des sog. Darstellungstheorems das Argumentprinzip anwendbar ist.

§ 6. Ein Hilfssatz.

HILFSSATZ. *Es sei F, G Lösung von (15) in einer Umgebung von z_0 mit Ausnahme von z_0 selbst, wobei $p_0(z)$ in einer Umgebung des (endlichen) Punktes z_0 mit Einschluß von z_0 selbst hölderstetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzt. Ist dann $F \cdot (z - z_0)^\beta$ mit einem β , $0 < \beta < 1$, beschränkt für $z \rightarrow z_0$, dann sind F und G in z_0 noch zweimal stetig partiell differenzierbar.*

Beweis. Bei $f = F + G$, $g = F - G$ sind f und ig Lösung von (2) (so daß f, g, F, G zunächst zweimal stetig partiell differenzierbar sind im Umgebung von z_0 mit eventueller Ausnahme von z_0 selbst), und man erhält nach [25], Teil I, § 9, $f = e^{S_1} \cdot \omega_1 - \nu \cdot \overline{e^{S_1} \cdot \omega_1}$, $ig = e^{S_2} \cdot \omega_2 - \nu \overline{e^{S_2} \cdot \omega_2}$, wobei $\omega_1(z)$, $\omega_2(z)$ in Umgebung von z_0 mit evtl. Ausnahme von z_0 analytisch, $S_1(z)$ und $S_2(z)$ in z_0 stetig sind. Dies liefert wegen $f + g = 2F$

$$(27) \quad e^{S_1} \omega_1 - \nu \overline{e^{S_1} \omega_1} = (ie^{S_2} \omega_2) + \nu \overline{(ie^{S_2} \omega_2)} + 2F.$$

Hier erkennt man nun zunächst, daß f und ig in z_0 notwendig beide stetig sind, oder beide einen Pol gleicher Ordnung oder beide eine wesentliche Singularität im Sinne von [25] besitzen, da sonst ein Widerspruch für $z \rightarrow z_0$ entsteht. Weiter erkennt man, daß der Fall eines Poles oder

einer wesentlichen Singularität nicht möglich ist, da in (27) mit $e^{S_1}\omega_1$ bzw. $ie^{S_2}\omega_2$ Affinitäten mit zueinander orthogonalen Hauptverzerrungsrichtungen vorgenommen werden. Dies liefert nach [25] die Behauptung.

§ 7. Beweis von Satz 4. Ähnlich wie in § 3 mit gleichen Bezeichnungen ergibt sich zunächst nach (14)

$$(28) \quad \iint (|N_z - w_z|^2 - |N_{\bar{z}} - w_{\bar{z}}|^2) dx dy \\ = \frac{1}{2i} \int_{|z|=R} \overline{(N-w)} d(N-w) - \Re \left\{ \frac{1}{i} \int_{\mathfrak{A}} (N-w) dM \right\} + I_N - I_w.$$

Hier ist nun weiter wegen (12)

$$(29) \quad \Re \frac{1}{i} \int_{\mathfrak{A}} (N-w) dM \\ = 2\Re \iint \{ [(N-w)M_z]_{\bar{z}} - [(N-w)M_{\bar{z}}]_z \} dx dy - \Re \frac{1}{i} \int_{|z|=R} (N-w) dM \\ = \iint \left(\nu |w_z|^2 - \frac{1}{\nu} |w_{\bar{z}}|^2 \right) dx dy - \iint \left(\nu |N_z|^2 - \frac{1}{\nu} |N_{\bar{z}}|^2 \right) dx dy - \\ - \iint \left(\nu |N_z - w_z|^2 - \frac{1}{\nu} |N_{\bar{z}} - w_{\bar{z}}|^2 \right) dx dy - \Re \frac{1}{i} \int_{|z|=R} (N-w) dM, \\ (30) \quad \left\{ I_N + \iint \left(\nu |N_z|^2 - \frac{1}{\nu} |N_{\bar{z}}|^2 \right) dx dy \right\} - \left\{ I_w + \iint \left(\nu |w_z|^2 - \frac{1}{\nu} |w_{\bar{z}}|^2 \right) dx dy \right\} \\ = \iint \left[(1-\nu) |N_z - w_z|^2 + \left(\frac{1}{\nu} - 1 \right) |N_{\bar{z}} - w_{\bar{z}}|^2 \right] dx dy - \\ - \frac{1}{2i} \int_{|z|=R} \overline{(N-w)} d(N-w) + \Re \frac{1}{i} \int_{|z|=R} M d(N-w).$$

Da hier die rechte Seite für $R \rightarrow \infty$ konvergiert, tut dies auch die linke Seite.

Wendet man die gleiche Überlegung wie bei (29) mit $w \equiv N^*$ im Gebiet $R > |z| > K$ an, so ergibt sich

$$(31) \quad \iint_{K < |z| < R} \left[\left(\nu |N_z|^2 - \frac{1}{\nu} |N_{\bar{z}}|^2 \right) - \left(\nu |N_z^*|^2 - \frac{1}{\nu} |N_{\bar{z}}^*|^2 \right) \right] dx dy \\ = - \iint_{K < |z| < R} \left[\nu |N_z - N_z^*|^2 - \frac{1}{\nu} |N_{\bar{z}} - N_{\bar{z}}^*|^2 \right] dx dy - \\ - \Re \frac{1}{i} \int_{|z|=K} (N - N^*) dM - \Re \frac{1}{i} \int_{|z|=R} (N - N^*) dM.$$

Hier ist das letzte Integral noch gleich

$$\Re \frac{1}{i} \int_{|z|=R} M d(N - N^*),$$

so daß in (31) die rechte und die linke Seite für $R \rightarrow \infty$ konvergiert wegen der Voraussetzungen in $z = \infty$. Also konvergiert auch in (17) das Doppelintegral, da in (30) die linke Seite wie die rechte Seite konvergieren muß. Der Rest der Behauptung ergibt sich aus der Tatsache, daß der Grenzwert der rechten Seite von (30)

$$\geq \lim_{R \rightarrow \infty} \Re \frac{1}{i} \int_{|z|=R} M d(N - w) = \nu(\infty) \Re \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \int_{|z|=R} (w - N) d\bar{z} \quad \text{ist.}$$

Zusatzbemerkung. Die Formel (30) nebst Herleitung bleibt richtig, wenn N durch M ersetzt wird. Nur wird man dann die Größen I_M und I_w mit dem anderen Vorzeichen definieren wegen (14). So entsteht also auch eine Extremaleigenschaft von M in Verallgemeinerung eines klassischen Sachverhaltes für $\nu \equiv 0$.

§ 8. Beweis von Satz 5. Indem man ähnlich wie in § 2 zunächst die Funktion ν durch 0 ersetzt für $|z| \geq R$, erhält man nach einer Ähnlichkeitstransformation aus schon in [15], § 5, [16], Satz 1, benutzten, in der Existenz auf Sätze von S. V. Parter zurückgehenden (in [28] über das zugehörige Extremalproblem direkt als existent nachgewiesenen) Funktionen gewisse Abbildungen $s_\theta^{(R)}(z)$ von \mathfrak{G} , die stetig und schlicht sind und folgende Eigenschaften haben. Es gilt $z_0 \rightarrow 0$, $z^* \rightarrow 1$ mit einem von z_0 verschiedenen in \mathfrak{G} fest markierten Punkte z^* , und $s_\theta^{(R)}$ besitzt die Eigenschaften c (mit dem abgeänderten ν) und d von Satz 5. Wie in § 2 folgt die Existenz einer schlichten Grenzfunktion s_θ^* für $R \rightarrow \infty$, die die Eigenschaft c mit dem ursprünglichen ν und Eigenschaft d besitzt und $z_0 \rightarrow 0$, $\infty \rightarrow \infty$ erfüllt. Demnach ist in Umgebung von $z = \infty$ die nach [25], Teil 1, § 3, gebildete „ p_0 -Ableitung“ von $ie^{-i\theta} \log s_\theta^* = u + iv = f$,

$$\frac{d_{p_0} f}{dz} = \frac{1}{2} [(p_0 u_x + v_y) + i(v_x - p_0 u_y)] / \sqrt{p_0(z)}$$

eindeutig und erfüllt

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{d_{p_0} f}{dz} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \ln p_0}{\partial z} \cdot \left(\frac{d_{p_0} f}{dz} \right).$$

Nach dem Darstellungstheorem [25], Teil 1, § 9, [34], S. 21, [35], III, § 4, gilt also

$$\frac{d_{p_0} f}{dz} = e^{S(z)} \cdot \omega(z),$$

wobei $e^{S(z)}$ im bekannten Sinne in $z = \infty$ hölderstetig ist, $\omega(z)$ in Umgebung von $z = \infty$ analytisch. Wegen

$$(32) \quad ie^{-i\theta} \log s_\theta^* = f = \int \frac{d_{p_0} f}{dz} d_{p_0} z + \text{const} \\ = \Re \int \left(\frac{1}{\sqrt{p_0}} \frac{d_{p_0} f}{dz} \right) dz + i \Im \int \left(\sqrt{p_0} \frac{d_{p_0} f}{dz} \right) dz + \text{const}$$

(vgl. [25], Teil 1, § 3, Satz 3) erkennt man, daß $\omega(z)$ in $z = \infty$ nur eine einfache Nullstelle haben kann, da jedwede gegenteilige Annahme einen Widerspruch dazu liefert, daß durch s_θ^* der Punkt ∞ in ∞ transformiert wird, wobei die Abbildung in Umgebung von ∞ quasikonform ist.

Damit folgt

$$\frac{d_{p_0} f}{dz} = \frac{C + \varepsilon(z)}{z} \quad \text{mit } C \neq 0,$$

$$ie^{-i\theta} \log s_\theta^* = \Re \int \frac{C + \varepsilon(z)}{\sqrt{p_0(\infty)} \cdot z} dz + i \Im \int \sqrt{p_0(\infty)} \frac{C + \varepsilon(z)}{z} dz \\ = \Re \left(\frac{C}{\sqrt{p_0(\infty)}} \cdot \log z \right) + i \Im (\sqrt{p_0(\infty)} \cdot C \log z) + \varepsilon(z) + \text{const} \\ = C^* \log z - \nu(\infty) \overline{C^* \log z} + \varepsilon(z) + \text{const}$$

$$\text{mit } C^* = \frac{1}{2} \frac{p_0(\infty) + 1}{\sqrt{p_0(\infty)}} C \neq 0,$$

$$\log s_\theta^* = -i \cdot e^{i\theta} C^* \log z + e^{2i\theta} \cdot \nu(\infty) \overline{(-ie^{i\theta} C^* \log z)} + \varepsilon(z) + \text{const}.$$

Durch Betrachtung eines einmaligen Umlaufes auf einem großen Kreis erkennt man hier, daß

$$2\pi i = -ie^{i\theta} C^* 2\pi i + e^{2i\theta} \cdot \nu(\infty) \overline{(-ie^{i\theta} C^*)} 2\pi i$$

sein muß, womit endgültig folgt

$$\log s_\theta^* = \frac{1}{1 - \nu^2(\infty)} [(1 + e^{2i\theta} \nu(\infty)) \log z + \nu(\infty) (e^{2i\theta} + \nu(\infty)) \overline{\log z}] + \text{const}.$$

Durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor ergibt sich aus s_θ^* also eine Funktion $j_\theta(z, z_0, \infty)$ mit allen in Satz 5 angegebenen Eigenschaften. Abschließend ergibt sich noch die eindeutige Bestimmtheit von $j_\theta(z, z_0, \infty)$ durch die übliche Differenzbildung nach dem Argumentprinzip wie im konformen Falle.

§ 9. Eine heuristische Schlußbemerkung. Die Größe $\iint \left(\nu |w_z|^2 - \frac{1}{\nu} |w_{\bar{z}}|^2 \right) dx dy$, die hier mehrfach eine Rolle gespielt hat, geht für $\nu \rightarrow 1$ entsprechend $p_0(z) \rightarrow \infty$ in einen gewöhnlichen Flächeninhalt über. Dadurch entsteht — entsprechend einer Bemerkung in [14], S. 5, aus Satz 2 und Satz 4, wenn dort \mathfrak{G} die ganze z -Ebene ist und Schlichtheit sowie $|w_z| \leq \nu |w_{\bar{z}}|$ von den Abbildungen vorausgesetzt wird, die zugehörige Aussage für die Klasse der konformen Abbildungen eines endlich vielfach zusammenhängenden Gebietes G durch folgenden Grenzübergang. Man setze $p_0(z) \equiv 1$ in G und $p_0(z) \equiv Q$ im Komplement (wobei man die Randkomponenten als geschlossene analytische Jordankurven annehmen kann) und führe anschließend den Grenzübergang $Q \rightarrow \infty$ durch. Zunächst ist dann (bei festem endlichem Q) für eine zulässige Abbildung wegen

$$\iint \left(\nu |w_z|^2 - \frac{1}{\nu} |w_{\bar{z}}|^2 \right) dx dy \leq \iint (|w_z|^2 - |w_{\bar{z}}|^2) dx dy$$

das Funktional \leq dem größten Wert des zugehörigen Funktional bei den konformen Abbildungen. Und diesem größten Wert kommt man andererseits beliebig nahe, da sich jede konforme Abbildung beliebig durch solche quasikonforme Abbildungen der Vollebene (mit hinreichend großem Q) approximieren läßt.

Jedoch auch eine umgekehrte Betrachtung bietet sich an, bei der die zugehörigen Sätze der Theorie der quasikonformen Abbildungen aus den entsprechenden für konforme Abbildungen hervorgehen. Dies sei hier ohne Beweis skizziert, da die genauere Durchführung umfangreiche Zurüstungen erfordert.

Ist irgendeine (glatte) quasikonforme Abbildung gegeben, so ist diese im „Kleinen“ eine Affinität, bei der ein geeignetes „infinitesimales“ Quadrat in ein „infinitesimales“ Rechteck übergeht. Man kann nun eine (eckpunkt-treue) affine Abbildung eines Quadrates auf ein Rechteck beliebig approximieren durch eine (eckpunkt-treue) konforme Abbildung dieses Quadrates, aus dem (etwa kreisförmige) Löcher in gleichmäßiger Verteilung als Randkomponenten ausgestanzt sind, deren Anzahl nur hinreichend groß gewählt werden muß und die in Strecken (Schlitze) parallel zur Richtung des Rechteckes übergehen. Dementsprechend läßt sich eine vorgegebene quasikonforme Abbildung dadurch gewinnen, daß man im betreffenden Gebiet Löcher ausstanzt, deren Anzahl dann über alle Grenzen wächst, wobei die Größe der relativ ausgestanzten Fläche mit der in diesem Punkt vorliegenden Dilatation zusammenhängt. Durch geeignete konforme Schlitzabbildungen des gelöcherten Gebietes läßt sich dann die vorliegende quasikonforme Abbildung beliebig approximieren.

Diese Betrachtungsweise hat mehrere Gesichtspunkte.

1. Hierdurch lassen sich Abbildungssätze für quasikonforme Abbildungen aus solchen für konforme Abbildungen herleiten, z.B. aus dem klassischen Koebeschen Geradenschlitztheoren [10] (Bildrandkomponenten = Strecken, wobei die Neigung für jede Strecke vorgegeben wird). Da dieses wohl am einfachsten mit der Koebeschen Kontinuitätsmethode bewiesen werden kann, bedeutet dies letztlich auch den Beweis von Existenzsätzen bei quasikonformen Abbildungen mit Hilfe der Kontinuitätsmethode, die hierdurch einen neuen Anwendungsbereich erhält. Dies bedeutet damit auch den Beweis der Existenz von Lösungen partieller Differentialgleichungen durch die Kontinuitätsmethode.

2. Durch diese Betrachtungsweise erhält man die Lösung von Extremalproblemen der Theorie der quasikonformen Abbildungen (auch mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung) aus der Lösung eines entsprechenden für konforme Abbildungen (wahrscheinlich zunächst bis auf die Diskussion des Gleichheitszeichens). Insbesondere beleuchtet dies neu das bekannte Phänomen, daß bei einem Extremalproblem vom Grötzsch-Teichmüllerschen Typ für quasikonforme Abbildungen das gleiche quadratische Differential wie im konformen Falle auftritt. Übrigens läßt sich auch so die in [13] offen gebliebene Frage der Existenz eines Extremalkontinuums (vgl. dort § 6) erledigen.

3. In physikalischer Denkweise bedeutet obiger Grenzübergang einfach die Approximation eines beliebigen Dielektrikums (auch mit ortsabhängiger Dielektrizitätskonstante) durch eine „Wolke“ von elektrisch leitenden, jedoch untereinander isolierten Kügelchen, entsprechend einer wohl auf den Physiker R. Clausius zurückgehenden klassischen Vorstellung.

Insgesamt läßt das skizzierte Prinzip erkennen, daß sich die Theorie der quasikonformen Abbildungen im Sinne obiger Betrachtungsweise aus der Theorie der konformen Abbildungen als Grenzfall ergibt, also — etwas zugespitzt formuliert — gar nicht so wesentlich mehr darstellt.

Literatur

- [1] L. V. Ahlfors and A. Beurling, *Conformal invariants and function-theoretic null-sets*, Acta Math. 83 (1950), S. 101–129.
- [2] L. V. Ahlfors and L. Sario, *Riemann surfaces*, Princeton 1960.
- [3] L. Bers, *Univalent solutions of linear elliptic systems*, Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), S. 513–526.
- [4] P. R. Garabedian and M. Schiffer, *Identities in the theory of conformal mapping*, Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949), S. 187–238.
- [5] H. Grötzsch, *Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung*, Berichte d. math.-phys. Kl. d. Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig 80 (1928), S. 367–376.
- [6] — *Über das Parallelschlitztheorem der konformen Abbildung schlichter Bereiche*, Berichte d. math.-phys. Kl. d. Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig 84 (1932), S. 15–36.

- [7] H. Grunsky, *Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche*, Schr. Math. Seminars u. Inst. f. angew. Math. Univ. Berlin 1 (1932), S. 93–140.
- [8] — *Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen*, Math. Z. 45 (1939), S. 29–61.
- [9] J. A. Jenkins, *Univalent functions and conformal mapping*, *Ergebn. d. Math. u. ihrer Grenzgeb., Neue Folge, Heft 18*, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1958.
- [10] P. Koebe, *Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. V. Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche (Fortsetzung)*, Math. Z. 2 (1918), S. 198–236.
- [11] Y. Komatu, *Einige kanonische konforme Abbildungen vielfach zusammenhängender Gebiete*, Proc. Japan. Acad. 29 (1953), S. 1–5.
- [12] — and M. Ozawa, *Conformal mapping of multiply connected domains, I*, Kodai Math. Sem. Rep. (1951), S. 81–95.
- [13] R. Kühnau, *Quasikonforme Abbildungen und Extremalprobleme bei Feldern in inhomogenen Medien*, J. Reine Angew. Math. 231 (1968), S. 101–113.
- [14] — *Wertannahmeprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung*, Math. Nachr. 40 (1969), S. 1–11.
- [15] — *Einige Extremalprobleme bei differentialgeometrischen und quasikonformen Abbildungen, II*, Math. Z. 107 (1968), S. 307–318.
- [16] — *Verzerrungssätze und Koeffizientenbedingungen vom Grunskyschen Typ für quasikonforme Abbildungen*, Math. Nachr. 48 (1971), S. 77–105.
- [17] — *Eine funktionentheoretische Randwertaufgabe in der Theorie der quasikonformen Abbildungen*, Indiana Univ. Math. J. 21 (1971), S. 1–10.
- [18] — *Eine Klasse nichtschlichter konformer Abbildungen mit einer schlichten quasikonformen Fortsetzung*, Math. Nachr. 59 (1974), S. 261–263.
- [19] — *Zur analytischen Darstellung gewisser Extremalfunktionen der quasikonformen Abbildung*, *ibidem* 60 (1974), S. 53–62.
- [20] O. Lehto, *Anwendung orthogonaler Systeme auf gewisse funktionentheoretische Extremal- und Abbildungsprobleme*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I, Math.-Phys. 59 (1949).
- [21] — *Schlicht functions with a quasiconformal extension*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I. Math., Nr. 500 (1971).
- [22] — und K. I. Virtanen, *Quasikonforme Abbildungen*, Berlin–Heidelberg–New York 1965.
- [23] H. Meschkowski, *Hilbertsche Räume mit Kernfunktion*, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1962.
- [24] Z. Nehari, *Conformal mapping*, New York–Toronto–London 1952.
- [25] G. N. Polozij, *Theorie und Anwendung p-analytischer und (p, q)-analytischer Funktionen, Verallgemeinerung der Theorie analytischer Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 2. Auflage*, Kiew 1973 [Russ].
- [26] R. de Possel, *Zum Parallelschlitztheorem unendlich-vielfach zusammenhängender Gebiete*, Nachr. Ges. Göttingen, Math.-phys. Kl. (1931), S. 199–202.
- [27] — *Sur quelques propriétés de la représentation conforme des domaines multiplement connexes, en relation avec le théorème des fentes parallèles*, Math. Ann. 107 (1933), S. 496–504.
- [28] H. Renelt, *Modifizierung und Erweiterung einer Schifferschen Variationsmethode für quasikonforme Abbildungen*, Math. Nachr. 55 (1973), S. 353–379.
- [29] B. Rodin and L. Sario in collaboration with M. Nakai, *Principal functions*, Princeton–Toronto–London 1968.
- [30] L. Sario and K. Oikawa, *Capacity functions*, Berlin–Heidelberg–New York 1969.

- [31] M. Schiffer, *The span of multiply connected domains*, Duke Math. J. 10 (1943), S. 209–216.
- [32] — *An application of orthonormal functions in the theory of conformal mapping*, Amer. J. Math. 70 (1948), S. 147–156.
- [33] — *Some recent developments in the theory of conformal mapping*, Appendix zum Buch von R. Courant, *Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces*, New York–London 1950.
- [34] I. N. Vekua, *Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben mit einer Anwendung in der Theorie der Schalen*, Math. Forschungsberichte II, Berlin 1956 [Übersetzung aus dem Russ.: Mat. Sbornik 31 (1952), S. 217–314].
- [35] — *Verallgemeinerte analytische Funktionen*, Berlin 1963 [Übersetzung aus dem Russ.; engl. Übers.: London–Paris–Frankfurt 1962].

Reçu par la Rédaction le 7. 1. 1974
