ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLVII (1986)

Исследование системы дифференциальных уравнений с тремя пересекающимися линиями разрыва

Р. И. Алидема (Приштина, Югославия)

Investigation of a system of differential equations with three intersecting lines of discontinuity

by R. I. Alidema (Priština, Yugoslavia)

Abstract. In the paper the stability of equilibrium position of a system of two differential equations is investigated. The right-hand sides of the system have discontinuities on three rays originating from the same point. The cases where trajectories make revolutions around the equilibrium position, and where trajectories come onto the lines of discontinuity and remain on them are studied. Research of "rough stability" is performed. The latter is provided by strict inequalities on the coefficients of the system. Three critical cases where some of these inequalities are replaced by an equality are also dealt with. The sufficient conditions of asymptotic stability of equilibrium position and sufficient conditions of instability have been derived (see Theorems 2.1, 3.1, 4.1, 4.2).

1. Введение. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, x_2), \quad k = 1, 2, \quad f = (f_1, f_2), \tag{1.1}$$

где f_k разрывны на трех полупрямых, выходящих из точки $(0, 0)$ и образующие углы, меньшие 180°. С помощью линейного преобразования плоскости x_1, x_2 можно перевести эти полупрямые в полупрямые L_1 $(x_2 = 0, x_1 > 0)$, L_2 $(x_2+\sqrt{3}x_1 = 0, x_2 > 0)$, L_3 $(x_2-\sqrt{3}x_1 = 0, x_2 < 0)$, образующие углы по 120°.

Решением системы (1.1) называется абсолютно непрерывная вектор-функция $x(t) = (x_1, x_2)$ для которой при почти всех t производная $\dot{x}(t)$ принадлежит наименьшему выпуклому замкнутому множеству $F(x)$, содержащему пределные значения вектор-функции $f(x^*) = (f_1(x^*),$

$f_2(x^*)\big)$ при $x^* \to x$. Существование таких решений следует из [2]. Тогда функция $x(t) = 0$ – решение системы (1.1), если $0 \in F(0)$, не решение при $0 \notin F(0)$.

Пусть функция $f(x)$ разрывна на линии L, и f^- и f^+ – пределние значения функции f при приближение к точке $x \in L$ с одной и с другой стороны линии L. Тогда $F(x)$ – отрезок с концами $f^-(x)$ и $f^+(x)$, т.е. $F(x)$ – множество точек $af^+(x)+(1-a)f^-(x)$, $0 \leqslant a \leqslant 1$. Если $x(t) \in \in L$ при $t_1 < t < t_2$ и $\dot{x}(t) \in F\big(x(t)\big)$, то $x(t)$ – решение. В этом случае

$$x = (f_N^- f^+ - f_N^+ f^-)/(f_N^- - f_N^+), \tag{1.2}$$

где f_N^- и f_N^+ – проекции векторов f^- и f^+ на нормаль к L в точке x.

Разложим функции f_k в (1.1) (после линейного преобразования) по формуле Тейлора по x в окрестности начала координат, предполагая что $f_k \in C^2$ в каждой из областей $S_i\,(\frac{2}{3}\,\bar{u}(i-1) < \theta < \frac{2}{3}\,\bar{u}i)$, $i = 1, 2, 3$.

Получим систему

$$\frac{dx_1}{dt} = u_i + x_1 u_{i1} + x_2 u_{i2} + \varphi_i, \qquad \frac{dx^2}{dt} = v_1 + x_1 v_{i1} + x_2 v_{i2} + \psi_i, \tag{1.3}$$

в S_i, где $\varphi_i, \psi_i = O(x_1^2 + x_2^2)$.

Для системы (1.3) первым приближением является система

$$\dot{x}_1(t) = u_i, \qquad \dot{x}_2(t) = v_i, \qquad \text{в } S_i. \tag{1.4}$$

Получим достаточные условия асимптотической устойчивости системы (1.3) в критических случаях, т.е. при таких u_i, v_i, при которых система (1.4) не является асимптотически устойчивой, но может стать асимптотически устойчивой при сколь угодно малых изменения постоянных u_i, v_i.

Как в работе [1], рассмотрим три критических случая: 1° Особая точка (0, 0) – центр; 2° Для системы (1.4) одна из линий разрыва заполнена положениями равновесия; 3° В одной из областей S_i вектор (u_i, v_i) параллелен линии разрыва.

2. Особая точка типа центр. Сначала выясним, при каких условиях на u_i, v_i траектория системы (1.4) выходящая из точки $(\delta, 0)$ $(\delta > 0)$, попадает на линии разрыва L.

Для того, чтобы эта траектория пересекала полупрямую L_2, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: $0 < v_1 < -\sqrt{3}u_1$. При этих условиях траектория пересекает полупрямую L_2 в точке

$$x_{01} = \delta\frac{v_1}{\gamma_1}, \qquad x_{02} = -\sqrt{3}x_{01} \qquad (x_{02} > 0). \tag{2.1}$$

Здесь и далее используются обозначения:

$$
\begin{aligned}
&\gamma_i = v_i+\sqrt{3}\,u_i, \qquad &\bar\gamma_i = v_i-\sqrt{3}\,u_i,\\
(2.2)\qquad &\gamma_{i1} = v_{i1}+\sqrt{3}\,u_{i1}, \qquad &\bar\gamma_{i1} = v_{i1}-\sqrt{3}\,u_{i1}, \qquad i=1,2,3,\\
&\gamma_{i2} = v_{i2}+\sqrt{3}\,u_{i2}, \qquad &\bar\gamma_{i2} = v_{i2}-\sqrt{3}\,u_{i2}.
\end{aligned}
$$

Траектория из точки (2.1) в случае $v_2 < -|u_2|\sqrt{3}$ идет в S_2 и пересекает полупрямую L_3 в точке

$$x'_{01} = \frac{1}{\bar\gamma_2}(x_{01}v_2 - x_{02}u_2), \qquad x'_{02} = \sqrt{3}\,x'_{01} \qquad (x'_{02} < 0).$$

Подставляя сюда выражение для x_{01}, x_{02} из (2.1), найдем

$$x'_{01} = \delta\,\frac{v_1\gamma_2}{\gamma_1\bar\gamma_2}, \qquad x'_{02} = \sqrt{3}\,x'_{01}.$$

Затем, если $0 < v_3 < u_3\sqrt{3}$, траектория идет в S_3 и пересекает L_1 в точке $(x''_{01}, 0)$,

$$x''_{01} = M_1 S, \qquad M_1 = \frac{\gamma_1\gamma_2\bar\gamma_3}{\gamma_1\bar\gamma_2\gamma_3}.$$

Если $M_1 > 1$, то $x''_{01} > \delta$ и особая точка будет неустойчивый фокус. Если $M_1 < 1$, то $x''_{01} < \delta$ и особая точка — устойчивый фокус. Если же $M_1 = 1$, то $x''_{01} = \delta$ и особая точка типа центр для системы (1.4), а для системы (1.3) будет критический случай, который надо исследовать.

Рассмотрим выходящую из точки $(\delta, 0)$ траекторию системы (1.3). После интегрирования (1.3), при $i = 1$, в пределах от 0 до t с начальными условиями $x_1(0) = \delta$, $x_2(0) = 0$, методом последовательных приближений, получаем

$$
(2.3)\qquad
\begin{aligned}
x_1(t) &= \delta + (u_1 + \delta u_{11})t + n_1 t^2 + O(t^3 + t\delta^2),\\
x_2(t) &= (v_1 + \delta v_{11})t + u_1 t^2 + O(t^3 + t\delta^2),
\end{aligned}
$$

где

$$(2.4)\qquad 2n_i = u_i u_{i1} + v_i u_{i2}, \qquad 2w_i = u_i v_{i1} + v_i v_{i2} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Найдем точку пересечения траектории (2.3) с полупрямой L_2. Она существует, если $0 < v_1 < -u_1\sqrt{3}$, а δ мало. Подставляя (2.3) в уравнение полупрямой L_2, находим

$$\sqrt{3}\,\delta + (\gamma_1 + \gamma_{11}\delta)t + (w_1 + \sqrt{3}\,n_1)t^2 + O(t^3 + t\delta^2) = 0.$$

Находим t используя метод последовательных приближений:

$$t = a_1\delta + a_2\delta^2 + O(\delta^3) = t_1,$$

$$a_1 = -\sqrt{3}/\gamma_1, \qquad a_2 = \frac{\sqrt{3}}{\gamma_1^3}[\gamma_1\gamma_{11} - \sqrt{3}(w_1 + \sqrt{3}n_1)].$$

Тогда равенства (2.3) дают искомую точку, с точностью $O(\delta^3)$

$$x_1(t_1) = \alpha_1\delta + \alpha_2\delta^2 + O(\delta^3), \qquad x_2(t_1) = \beta_1\delta + \beta_2\delta^2 + O(\delta^3),$$

где

$$\alpha_1 = v_1/\gamma_1, \qquad \alpha_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2\gamma_1^3}[(v_1 + \gamma_1)D_{11}^1 + \sqrt{3}v_1 D_{12}^1],$$

$$\beta_1 = -\alpha_1\sqrt{3}, \qquad \beta_2 = -\alpha_2\sqrt{3},$$

$$D_{jk}^i = \begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_{jk} & v_{jk} \end{vmatrix}, \qquad k = 1, 2;\ i,\ j = 1, 2, 3. \tag{2.5}$$

Рассмотрим продолжение этой траектории в S_2. Изложенным методом найдем ее точку пересечения с линией L_3 при условии $v_2 < -|u_2|\sqrt{3}$:

$$x_1(t_2) = q_1\delta + q_2\delta^2 + O(\delta^3), \qquad x_2(t_2) = r_1\delta + r_2\delta^2 + O(\delta^3),$$

где

$$q_1 = v_1 v_2/\gamma_1\gamma_2,$$

$$q_2 = \frac{\sqrt{3}}{2\gamma_1^3\bar{\gamma}_2^3}\{4v_1^2\gamma_1(\gamma_2 D_{21}^2 - 3u_2 D_{22}^2) - \gamma_2\bar{\gamma}_2^2[(v_1 + \gamma_1)D_{11}^1 + \sqrt{3}v_1 D_{12}^1]\},$$

$$r_1 = \sqrt{3}q_1, \quad r_2 = \sqrt{3}q_2.$$

При условии $0 < v_3 < \sqrt{3}u_3$ найдем точку пересечения продолжения (в S_3) этой траектории с осью Ox_1,

$$x_1(t_3) = M_1\delta + M_2\delta^2 + O(\delta^3), \qquad x_2(t_3) = 0,$$

$$M_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2v_3^3\gamma_1^2\bar{\gamma}_2^2}\{2v_3^2\bar{\gamma}_2\bar{\gamma}_3[(v_1 + \gamma_1)w_1 + \sqrt{3}v_1 n_1] - {}$$
$$- v_1^2\gamma_2^2[(v_3 + \bar{\gamma}_3)D_{31}^3 - \sqrt{3}u_{32}v_3^2]\}.$$

Подытожим сказанное в виде теоремы:

Теорема 2.1. *Пусть для коэффициентов системы* (1.3) *выполнены условия* $M_1 < 1$ *или* $M_1 = 1$, $M_2 < 0$; *тогда решение* $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = 0$ *данной системы асимптотически устойчиво, а при* $M_1 > 1$ *или* $M_1 = 1$, $M_2 > 0$ — *неустойчиво.*

3. На одной из линий разрыва имеются положения равновесия. Будем считать, что на полупрямой $x_2 = 0$, $x_1 > 0$ для системы (1.1) имеем состояния равновесия, т.е. $\dot{x}_1 = 0$ $\dot{x}_2 = 0$. Движение по ней может существовать в случае $f_2^-(x_1, 0)$, $f_2^+(x_1, 0) \leqslant 0$.

В частности, подобно тому, как из системы (1.1) получена скорость (1.2), из системы (1.4) следует

$$\dot{x}_1 = D_3^1/(v_3 - v_1), \qquad \dot{x}_2 = 0, \tag{3.1}$$

где

$$D_l^k = \begin{vmatrix} u_k & v_k \\ u_l & v_l \end{vmatrix}, \qquad k = 1, 2;\ l = 2, 3. \tag{3.2}$$

Условие $\dot{x}_1 = 0$ равносильно $u_1 v_3 = u_3 v_1$. При $v_1 > 0$, $v_3 < 0$, нулевое решение системы неустойчиво, — не критический случай. При $v_1 = 0$ или $v_3 = 0$ — это уже второе равенство, критический случай второго порядка. Поэтому, рассмотрим только случай

$$v_1 < 0, \qquad v_3 > 0, \qquad u_1 v_3 = u_3 v_1. \tag{3.3}$$

Рассмотрим случаи, когда траектории системы (1.3) попадают в одну из линий разрыва.

Лемма 3.1. *Предположим, что на границе L_1 областей S_1 и S_3, для системы* (1.4), *выполнены условия* (3.3). *Тогда движение по L_1 для системы* (1.3) *при малых x_1 направлено к точке* 0, *если $D_{31}^1 < D_{11}^3$, а от этой точки, если $D_{31}^1 > D_{11}^3$* (D_{31}^1, D_{11}^3, см. в (2.5)).

Доказательство. Скорость движения по L_1 для (1.3) будет

$$\dot{x}_1 = [D_3^1 + (D_{31}^1 - D_{11}^3)x_1]/(v_3 - v_1) + O(x_1^2). \tag{3.4}$$

Так как выполнено (3.2), то $v_3 - v_1 > 0$. При малых x_1 и при $D_{31}^1 < D_{11}^3$ в (3.4) получаем $\dot{x}_1 < 0$, а при $D_{31}^1 > D_{11}^3$ имеем $\dot{x}_1 > 0$. Лемма доказана.

Случаи, когда на L_2 или L_3 имеем положения равновесия для системы (1.4) не будем исследовать, так как поворотом можно свести их к случаю с L_1.

Рассмотрим теперь, какие случаи при условиях (3.3) возможны в S_2. Следовательно, рассмотрим в каких случаях имеется движение по L_2 и L_3 для системы (1.4).

В данном случае важны не знаки u_i, v_i, u_{i1}, v_{i1}, $\dots$, а приближается ли решения к L_2 или к L_3.

В области S_1 расстояние до полупрямой L_2 равно $\frac{1}{2}(x_1\sqrt{3} + x_2)$, поэтому это расстоние убывает, если в S_1: $\frac{d}{dt}(x_1\sqrt{3} + x_2) = u_1\sqrt{3} + v_1 = \gamma_1 < 0$, а возрастает если $\gamma_1 > 0$.

В S_2 расстояние до L_2 равно $-\frac{1}{2}(x_1\sqrt{3}+x_2)$ и это расстояние убывает, если $v_2+u_2\sqrt{3} = \gamma_2 > 0$, а возрастает, если $\gamma_2 < 0$.

В случае $\gamma_1\gamma_2 \leqslant 0$ скорость движения по L_2 для системы (1.4) определяется формулами

$$\dot{x}_2 = \sqrt{3}\,D_2^1/(\gamma_1-\gamma_2), \qquad \dot{x}_1 = -\dot{x}_2/\sqrt{3}. \tag{3.5}$$

В (3.5) $\dot{x}_2 = 0$, если $D_2^1 = 0$, а неравенство $\gamma_1\gamma_2 \leqslant 0$ сводится к равенству при $\gamma_1 = 0$ или $\gamma_2 = 0$. Это критический случай второго или высшего порядка – не рассматривается.

Лемма 3.2. *Пусть*

$$\gamma_1 < 0, \qquad \gamma_2 > 0. \tag{3.6}$$

Тогда для системы (1.3) *при* $D_2^1 > 0$ *движение по* L_2 *направлено к точке* 0, *а при* $D_2^1 < 0$ *от этой точки.*

Доказательство. Скорость движения для системы (1.3) по L_2 будет

$$\dot{x}_2 = \sqrt{3}\,D_2^1/(\gamma_1-\gamma_2)+O(|x_1|+|x_2|), \qquad \dot{x}_1 = -\dot{x}_2/\sqrt{3}. \tag{3.7}$$

При условиях (3.6) и $D_2^1 > 0$, из (3.7) при малых x_1, x_2, получаем $\dot{x}_2 < 0$, $\dot{x}_1 > 0$. В случаях (3.6) и $D_2^1 < 0$, получаем $\dot{x}_2 > 0$, $\dot{x}_1 < 0$. Лемма доказана.

Аналогично тому как приведено рассуждение на L_2 при условии (3.3), получаем, что в областях S_2 и S_3 расстояние до полупрямой L_3 убывает, если

$$v_2-\sqrt{3}\,u_2 = \bar{\gamma}_2 < 0, \qquad v_3-\sqrt{3}\,u_3 = \bar{\gamma}_3 > 0, \tag{3.8}$$

и возрастает, если

$$\bar{\gamma}_2 > 0, \qquad \bar{\gamma}_3 < 0. \tag{3.9}$$

В случае $\bar{\gamma}_2\bar{\gamma}_3 \leqslant 0$ для системы (1.3) имеются возможные движения идущие по L_3 со скоростью

$$\dot{x}_2 = -\sqrt{3}\,D_3^2/(\bar{\gamma}_2-\bar{\gamma}_3)+O(|x_1|+|x_2|), \qquad \dot{x}_1 = \dot{x}_2/\sqrt{3}. \tag{3.10}$$

Подобно (3.5), случаи $D_3^2 = 0$, или $\bar{\gamma}_2 = 0$ или $\bar{\gamma}_3 = 0$ не рассматриваются

Лемма 3.3. *Если для системы* (1.4) *выполнено* (3.8), *то при* $D_3^2 > 0$ *в окрестности начала координат движение по* L_3 *для системы* (1.3) *направлено к точке* 0, *а при* $D_3^2 < 0$ *от этой точки.*

Доказательство. Доказывается аналогично лемме 3.2.

В дальнейшем, для рассматриваемой системы, перечисление всех возможных направлений вектора $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ в S_i, когда на L_1: $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$, будет приведено в несколько этапов.

Замечание. Случаи: (i) В S_1, $\gamma_1 > 0$, $v_1 > 0$; (ii) В S_2, $\gamma_2 < 0$, $\bar{\gamma}_2 > 0$; (iii) В S_3, $\bar{\gamma}_3 < 0$, $v_3 < 0$, явно неустойчивые и в леммах 3.4–3.8 не исследуются.

Остается рассмотреть случаи, когда на L_1 выполнено (3.3).

1° Если система (1.4) удовлетворяет условям (3.3), (3.8) и

$$\gamma_1 < 0, \quad \gamma_2 < 0, \tag{3.11}$$

то траектории переходят из S_1 в S_2; в силу (3.8) они попадают на L_3 и, следовательно, имеется движение по L_3.

Лемма 3.4. *Пусть для системы* (1.4) *выполнены условия* (3.3), (3.8), (3.11). *Тогда нулевое решение* (1.3) *асимптотически устойчиво, если* $D^1_{31} < D^3_{11}$, $D^2_3 > 0$, *и неустойчиво, если* $D^1_{31} > D^3_{11}$ *или* $D^2_3 < 0$.

Доказательство этой леммы сразу получается из лемм 3.1 и 3.3.

2° При условиях (3.3), (3.6), (3.8), решения из всех областей S_i попадают на линии L_i и, значит, имеются движения по этим линиям.

Лемма 3.5. *Если для системы* (1.4) *выполнены условия* (3.3), (3.6), (3.8). *тогда нулевое решение системы* (1.3) *асимптотически устойчиво, если* $D^1_{31} < D^3_{11}$, $D^1_2 > 0$, $D^2_3 > 0$, *и неустойчиво, если* $D^1_{31} > D^3_{11}$, *либо* $D^1_2 < 0$, *либо* $D^2_3 < 0$.

Доказательство. Лемма является следствием лемм 3.1, 3.2 и 3.3.

3° Случай, когда (3.3), (3.6), (3.9) выполнены, решения из областей S_i попадают на линии L_1, L_2. Имеются движения по этим линиям.

Лемма 3.6. *При условиях* (3.3), (3.6), (3.9), *решения системы* (1.3) *неустойчивы.*

Доказательство. В условиях леммы нам надо показать лишь, что $D^1_2 < 0$ (D^1_2 см. (3.2)). В самом деле, из (3.3) и (3.9) вытекает, что $u_3 > 0$, $u_1 < 0$, а из (3.6) и (3.9), $v_2 > 0$, $|u_2| < v_2/\sqrt{3}$. Умножим последнее неравенство на $-v_1$. Мы получим тогда $|u_2 v_1| < -v_1 v_2/\sqrt{3}$. Нам остается оценить $u_1 v_2$. Умножая первое неравенство (3.6) на v_2, мы найдем $u_1 v_2 < -v_1 v_2/\sqrt{3}$. Тем самым $D^1_2 < 0$.

4° При выполнении условий (3.3), (3.6) и

$$\bar{\gamma}_2 < 0, \quad \bar{\gamma}_3 < 0, \tag{3.12}$$

здесь, все решения попадают на L_1 и L_2.

Лемма 3.7. *Пусть выполнены условия* (3.3), (3.6), (3.12). *Тогда нулевое решение системы* (1.3) *асимптотически устойчиво, если* $D_{31}^1 < D_{11}^3$, $D_2^1 > 0$. *При любом из следующих двух условий* $D_{31}^1 > D_{11}^3$ *или* $D_2^1 < 0$, *функция* $x(t) = 0$ *не может быть устойчивым решением.*

Доказательство следует из лемм 3.1 и 3.2.

5° При условиях (3.3), (3.11), (3.12), траектории системы (1.4) переходят из S_1 в S_2 и из S_2 в S_3. Все решения попадают на L_1.

Лемма 3.8. *Если выполнены условия* (3.3), (3.11), (3.12), *то нулевое решение системы* (1.3) *асимптотически устойчиво, если* $D_{31}^1 < D_{11}^3$, *а неустойчиво, если* $D_{31}^1 > D_{11}^3$.

Доказательство следует из леммы 3.1.

Следующие случаи сводятся поворотом, т.е. заменой x_2 на $-x_2$, к случаям рассмотренным в леммах 3.4–3.8: (i) (3.3), (3.6), $\bar\gamma_2 > 0$, $\bar\gamma_3 > 0$; (ii) (3.3), (3.8), $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 < 0$; (iii) (3.3), (3.8), $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$; (iv) (3.3), $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $\bar\gamma_2 > 0$, $\bar\gamma_3 > 0$.

Теперь мы можем доказать основной результат этого параграфа.

Теорема 3.1. *Предположим, что для системы* (1.4) *выполнены условия* (3.3). *Для асимптотической устойчивости нулевого решения системы* (1.3) *достаточно, чтобы* $D_{31}^1 < D_{11}^3$, $u_2\sqrt{3} > -|v_2|$, *и кроме того, если выполнены условия* (3.6), *то* $D_2^1 > 0$, *и если выполнено* (3.8), *то* $D_3^2 > 0$. *Нулевое решение неустойчиво, если выполнено хотя бы одно из условий*: (1) $D_{31}^1 > D_{11}^3$; (2) $u_2\sqrt{3} < -|v_2|$; (3) (3.6), $D_2^1 < 0$; (4) (3.8), $D_3^2 < 0$.

Доказательство. Рассмотрим три случая: (1) $\gamma_1 < 0$, $\bar\gamma_3 > 0$; (2) $\gamma_1 < 0$, $\bar\gamma_3 < 0$; (3) $\gamma_1 > 0$, $\bar\gamma_3 > 0$. (Случай $\gamma_1 > 0$, $\bar\gamma_3 < 0$ при выполнении (3.3) невозможен. Это утверждение прямо следует из (3.3) и $\gamma_1 > 0$, $\bar\gamma_3 < 0$.) Каждый из этих случаев разбиваем на три подслучая:

(а) $\gamma_2 < 0$, $\bar\gamma_2 < 0$; (б) $\gamma_2 > 0$, $\bar\gamma_2 < 0$; (в) $\gamma_2 > 0$, $\bar\gamma_2 > 0$.

Каждый (1), (2), (3) с каждым (а), (б), (в) — 9 случаев; 4 случая: (1) с (в) и (3) с (а), (б), (в) сводятся к остальним, а остальные 5 — по леммам 3.4–3.8.

Случай (г) $\gamma_2 < 0$, $\bar\gamma_2 > 0$ по замечанию дает неустойчивость в S_2. Доказательство завершено.

4. Вектор скорости $(\dot x_1, \dot x_2)$ параллелен линии разрыва. Рассмотрим случай когда в одной из областей S_i, вектор скорости для системы (1.4) параллелен линии разрыва, например L_1, причем

$$u_1 > 0, \quad v_1 = 0, \quad v_3 \neq 0 \tag{4.1}$$

(к этому случаю остальные сводятся поворотом).

Лемма 4.1. *При условиях* (4.1) *и* $v_{11} < 0$, *траектория системы* (1.3) *выходящая из точки* $x_1 = -\delta/\sqrt{3}$, $x_2 = \delta$, *на* L_2, *где* $0 < \delta < \delta_1$, δ_1 — *достаточно мало, попадает на* L_1 *в точку*

$$x_1(t_1) = \sqrt{-2\delta u_1/v_{11}} + O(\delta), \quad x_2(t_1) = 0. \tag{4.2}$$

Если выполнено условие (4.1) *и* $v_{11} > 0$, *то* $x_1 = x_2 = 0$ *не может быть устойчивым решением.*

Доказательство. Проводится тем же методом, как доказательство леммы 3.3 в [1].

Лемма 4.2. *Если* $u_1 > 0$, $v_1 = 0$, $v_3 > 0$, *то при малых* x_1 *в тех точках оси* Ox_1, *где имеется движение по оси* Ox_1, *для системы* (1.3) *имеем* $\dot{x}_1 > 0$, *и* $x_1 = x_2 = 0$ *не может быть устойчивым решением.*

Доказательство. Движение по Ox_1 может иметься только в тех точках этой оси, где $f_2^- \cdot f_2^+ \leqslant 0$ в обозначение (1.1).

В случае $f_2^+(x_1, 0) \leqslant 0$ движение по Ox_1 будет происходить со скоростью (1.2). Подставляя в (1.2) $f^+ = (u_1 + O(x_1), O(x_1))$, $f^- = (u_3 + O(x_1), v_3 + O(x_1))$, будем иметь $\dot{x}_1 > 0$. Лемма доказана.

Замечание. В случае (4.1) при $v_3 < 0$, $\bar{\gamma}_3 < 0$, $-x_1 = x_2 = 0$ не может быть устойчивым решением, так как вблизи точки $(0, 0)$ в области S_3 решения удаляются от обеих полупрямых L_1 и L_3 со скоростью $> \mathrm{const} > 0$. Аналогично, если $\gamma_2 < 0$, $\bar{\gamma}_2 > 0$, то $x_1 = x_2 = 0$ не может быть устойчивым решением.

Поэтому остается рассмотреть только случаи, когда выполнены условия (4.1), $v_{11} < 0$, $v_3 < 0$, $\bar{\gamma}_3 > 0$, и, кроме того, или $\gamma_2 > 0$, $\bar{\gamma}_2 > 0$, или $\gamma_2 > 0$, $\bar{\gamma}_2 < 0$, или $\gamma_2 < 0$, $\bar{\gamma}_2 < 0$.

Лемма 4.3. *При условиях* $v_3 < 0$, $\bar{\gamma}_3 > 0$, *траектория системы* (1.3) *выходящая из точки* (4.2), *попадает на* L_3 *в точку*

$$x_1(t_3) = (v_3/\bar{\gamma}_3)\sqrt{-2\delta u_1/v_{11}} + O(\delta), \quad x_2(t_3) = \sqrt{3}\, x_1(t_3). \tag{4.3}$$

Затем, продолжение этой траектории, в случае $\gamma_2 > 0$, $\bar{\gamma}_2 > 0$, *попадает на* L_2 *в точку*

$$x_1(t_2) = (v_2 v_3/\gamma_2\bar{\gamma}_3)\sqrt{-2\delta u_1/v_{11}} + O(\delta), \quad x_2(t_2) = \sqrt{3}\, x_1(t_2). \tag{4.4}$$

Доказательство проводится как в лемме 4.1.

Теорема 4.1. *Пусть для системы* (1.3) *выполнены условия* (4.1), $v_{11} < 0$, $v_3 < 0$, $\bar{\gamma}_2 < 0$, $\bar{\gamma}_3 > 0$. *Тогда при* $D_3^2 > 0$ *решение* $x_1 = x_2 = 0$ *асимптотически устойчиво, а при* $D_3^2 < 0$ — *неустойчиво.* (D_3^2, см. в (3.2).)

Доказательство. Рассмотрим в областях S_i траектории системы с условиями теоремы. Согласно лемме 4.1 и (4.3), траектория попадает на L_3 и в силу условий $\bar{\gamma}_3 > 0$, $\bar{\gamma}_2 < 0$ остается на L_3. На L_3 по лемме 3.3, при $D_3^2 > 0$ движение направлено к точке $(0, 0)$, а при $D_3^2 < 0$ — от нее. Теорема доказана.

Теорема 4.2. *При условиях* $u_1 > 0$, $v_1 = 0$, $v_{11} < 0$, $v_3 < 0$, $\bar{\gamma}_2 > 0$, $\bar{\gamma}_3 > 0$, *то положение равновесия* $(0, 0)$ *системы* (1.4) *неустойчиво.*

Доказательство. В силу леммы 4.1, (4.3) и условия $\bar{\gamma}_2 > 0$, все решения попадают в S_2. Если в S_2 решения из окрестности точки $(0, 0)$ не попадают на L_2, то они удаляются от точки $(0, 0)$, так как в силу условие $\bar{\gamma}_2 > 0$ решения в S_2 удаляются от полупрямой L_3 со скоростью $>$ const > 0. Тогда решения $(0, 0)$ неустойчиво. Если они попадают на L_2, то возможны два случая.

Случай I. $\gamma_2 > 0$. При этом, в силу леммы 4.3, решения попадают в точку (4.4). Сравнивая (4.4) с координатами предыдущей точки $(-\delta/\sqrt{3}, \delta)$ пересечения траектории с L_2, получаем, при малых δ, $A\delta^{1/2} + O(\delta) > 2\delta$ ($A = \text{const}$), поэтому решения удаляются за каждый оборот от начала координат не менее, чем в 2 раза. Следовательно, имеем неустойчивость.

Случай II. $\gamma_2 = 0$. В рассматриваемом случае, решения попадают на линию L_2 дальше от начала координат, чем при $\gamma_2 > 0$, и тем более неустойчивость.

Доказательство теоремы закончено.

Литература

[1] Р. И. Алидема, Publ. Inst. Math. 26 (40) (1979), 19–25.
[2] Е. А Барбашин, Ю. И. Алимов, Изв. ВУЗ., Мат. 1 (1962), 3–13.

ПРИШТИНА, КОСОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ, ЮГОСЛАВИЯ

Reçu par la Rédaction le 1984. 01. 24