COLLOQUIUM MATHEMATICUM

LI DÉDIÉ À M. STANISŁAW HARTMAN 1987

OPÉRATEURS SUR UN ESPACE L^1

PAR

ALAIN COSTÉ (DAKAR-FANN)
ET FRANÇOISE LUST-PIQUARD (ORSAY)

Introduction. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de probabilité. Nous nous intéressons à une nouvelle classe d'opérateurs linéaires continus sur $L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, à valeurs dans un espace de Banach E: les N-opérateurs. Cette classe est intermédiaire entre celle des opérateurs représentables et celle des opérateurs de Dunford–Pettis. Elle a été définie dans [7], par le premier auteur de ce travail, motivé par un résultat de Mokobodzki [14]:

Un opérateur T: $L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \to L^1(\Omega', \mathscr{A}', \mu')$ est *représentable* si et seulement s'il transforme les suites de $L^\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ bornées en norme L^∞ et convergeant vers 0 pour $\sigma(L^\infty, L^1)$ en suites latticiellement bornées convergeant vers 0 μ'-presque sûrement.

Une telle suite définit exactement un élément de $L^1(\mu', c_0)$ ou encore de $c_0 \hat{\otimes} L^1(\mu')$.

Un N-opérateur T sera donc, par définition, un opérateur de $L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ dans E, transformant les suites $(\varphi_n)_{n \geqslant 1}$ bornées en norme dans $L^\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ et convergeant vers 0 pour $\sigma(L^\infty, L^1)$ en suites $\big(T(\varphi_n)\big)_{n \geqslant 1}$ définissant un élément de $c_0 \hat{\otimes} E$.

Nous étudierons ces N-opérateurs, ainsi que les espaces de Banach pour lesquels la classe des N-opérateurs coïncide avec celle des opérateurs représentables (espaces ayant la propriété (P)) ou avec celle des opérateurs de Dunford–Pettis. Nous considèrerons le cas particulier des N-convoluteurs lorsque Ω est un groupe compact abélien, et μ sa mesure de Haar. Nous présentons les principaux résultats de [7], sous une forme parfois différente, ainsi que des résultats nouveaux. En particulier nous définissons et caractérisons la classe auxiliaire des M-opérateurs: $F' \to E$, dont les N-opérateurs sont des cas particuliers.

Ce travail est divisé en quatre parties:

I. Notations, rappels, définitions.

II. Caractérisation des M-opérateurs, des N-opérateurs, de la propriété (P).

III. N-opérateurs à valeurs dans des espaces particuliers. Espaces ayant la propriété (P).

IV. N-convoluteurs: (A) Convoluteurs dans un espace de la classe $\mathscr{B}(\Lambda)$. (B) Le cas $E = L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}$. (C) N-convoluteurs et enveloppes inconditionnelles.

Les principaux résultats sont les suivants:

COROLLAIRE 1 DU THÉORÈME 1. *Soit* T: $L^1(\mu) \to E$. *Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) T *est un* N*-opérateur*;

(ii) ${}^tT$ *est limite en norme* $\pi_1(E', L^1(\mu))$ *d'opérateurs de rang fini*;

(iii) ${}^tT$ *se factorise en un opérateur* 1*-sommant*: $E' \to L$ *et un opérateur compact*: $L \to L^1(\mu)$;

(iv) T *se factorise en un opérateur compact*: $L^\infty(\mu) \to J$ *continu pour* $\sigma(L^\infty, L^1)$ *et la norme de* J, *et un opérateur*: $J \to E$ *semi-intégral à gauche.*

THÉORÈME 3. *Si* E' *a la propriété de Grothendieck* (*c'est-à-dire* $\mathscr{L}(E', L^2) = \pi_1(E', L^2)$), *tout opérateur de Dunford–Pettis*: $L^1(\mu) \to E$ *est un* N*-opérateur. Alors* E *a la propriété* (P) *si et seulement s'il a la propriété de Radon–Nikodym.*

THÉORÈME 4. *Si* E *a la propriété* (P), $L^1(\mu)\hat{\otimes}E$ *l'a aussi.*

THÉORÈME 5. $L^1(\boldsymbol{T})/\overline{H^1_0}$ *n'a pas la propriété* (P). *Plus précisément, il existe un* N*-convoluteur*: $L^1(\boldsymbol{T}) \to L^1(\boldsymbol{T})/\overline{H^1_0}$ *qui n'est pas représentable.*

1. Notations, rappels et définitions. Soit E un espace de Banach; notons $B_1(E)$ sa boule unité, E' son dual. Si $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace de probabilité, $L^1(\mu, E)$ est l'espace des classes de fonctions fortement mesurables à valeurs dans E, de norme μ-intégrable. $L^\infty(\mu, E)$ est l'espace des classes de fonctions fortement mesurables à valeurs dans E, μ-presque sûrement bornées.

Si K est un espace localement compact, $c_0(K)$ est l'espace des fonctions continues sur K tendant vers 0 à l'infini, $M(K)$ est son dual.

Si $K = \boldsymbol{N}$ nous notons $c_0 = c_0(\boldsymbol{N})$ et l^1 son dual.

Si K est fini de cardinal p, nous notons $l^\infty_p = c_0(K)$ et l^1_p son dual.

Si G est un groupe compact abélien muni de sa mesure de Haar dg, si Λ est une partie du groupe dual Γ, C_Λ, L^∞_Λ, L^1_Λ, M_Λ désignent respectivement les sous-espaces fermés de $C(G)$, $L^\infty(G)$, $L^1(G)$, $M(G)$ engendrés par les éléments à spectre dans Λ. La dualité entre $L^1(G)$ et $L^\infty(G)$ est définie par

$$f \in L^1(G), \qquad h \in L^\infty(G) \rightsquigarrow \int_G f(g)\, h(-g)\, dg.$$

Nous notons $\boldsymbol{T}$ le groupe $\boldsymbol{R}/2\pi\boldsymbol{Z}$.

Si E et F sont deux espaces de Banach, $\mathscr{L}(E, F)$ est l'espace des opérateurs linéaires continus de E dans F. Si T est un tel opérateur, nous notons ${}^tT$ son transposé.

Nous notons $E\hat{\otimes}F$ le produit tensoriel projectif de E et F, $E\hat{\hat{\otimes}}F$ le produit injectif. Pour leurs définitions et pour la démonstration des résultats rappelés ci-dessous nous renvoyons au livre de Diestel et Uhl: "Vector Measures" [8].

Un espace de Banach E a la *propriété d'approximation bornée* s'il existe une constante M et une famille filtrante $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ d'endomorphismes de E de rang fini telle que $\|U_\alpha\| \leqslant M$ et pour tout $e\in E$, $\|U_\alpha(e)-e\| \to 0$ suivant A.

Lorsque E est séparable on peut supposer que cette famille est une suite.

Un espace de Banach E est *WCG* s'il est engendré par une partie $\sigma(E, E')$ compacte de E. Un espace séparable est évidemment WCG. Un espace E qui est WCG conserve certaines propriétés des espaces séparables [1]: la boule unité de E' est séquentiellement compacte pour $\sigma(E', E)$; tout sous-espace séparable de E est inclus dans un sous-espace séparable et complémenté de E. Un espace qui possède cette dernière propriété est dit *CSP*.

Si E est WCG et possède la propriété d'approximation bornée, tout sous-espace E_1 séparable et complémenté de E la possède aussi: en effet, soit P une projection de E sur E_1. Il existe une suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ extraite de $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ telle que $\|V_n(e)-e\|_E \to 0$ si $n\to +\infty$ pour tout $e\in E_1$. Alors $\|P\circ V_n(e)-e\|_{E_1} \to 0$ si $n\to +\infty$, pour tout $e\in E_1$, et $\|P\circ V_n\| \leqslant M\|P\|$. De plus si $U_n = P\circ V_n\circ P$, $\|U_n(e)-P(e)\|_E \to 0$ si $n\to +\infty$ pour tout $e\in E$, ce dont nous aurons besoin par la suite.

Nous rappelons maintenant la définition de quelques idéaux d'opérateurs d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F.

Opérateurs intégraux. Un opérateur T: $E\to F$ est *intégral* si la forme bilinéaire définie sur $E\times F'$ par $(e,f')\leadsto\langle T(e),f'\rangle$ se prolonge en forme linéaire continue sur $E\hat{\hat{\otimes}}F'$. On note $I(E, F)$ l'espace de ces opérateurs, il est muni de la norme de cette forme linéaire. Si T: $E\to F$ est intégral, ${}^tT$: $E'\leftarrow F'$ l'est aussi.

Si μ est une mesure de probabilité, l'injection canonique $L^\infty(\mu)\to L^1(\mu)$ est intégrale.

Opérateurs nucléaires. Un opérateur T: $E\to F$ est *nucléaire* s'il existe $u\in E'\hat{\otimes}F$ tel que $\langle T(e),f'\rangle = \langle u, e\otimes f'\rangle$ pour $e\in E$, $f'\in F'$. (Alors ${}^tT$: $F'\to E'$ est aussi nucléaire.) L'espace $N(E, F)$ des opérateurs nucléaires de E dans F est muni de la norme quotient. Tout opérateur nucléaire est intégral. Si E' ou F a la propriété d'approximation bornée, $E'\hat{\otimes}F$ coïncide avec $N(E, F)$, ou encore avec le sous-espace fermé de $I(E, F)$ engendré par les opérateurs de rang fini.

Suites nucléairement convergentes vers 0. Une suite (e_n) dans un espace de Banach E converge en norme vers 0 si et seulement si elle est dans

$c_0(N, E)$, qui s'identifie à $c_0 \hat{\hat{\otimes}} E$ par l'application

$$(e_n)_{n \geq 1} \rightsquigarrow \sum_{n \geq 1} 1_n \otimes e_n$$

où $(1_n)_{n \geq 1}$ désigne la base canonique de c_0.

La suite $(e_n)_{n \geq 1}$ converge nucléairement vers 0 si elle définit un opérateur nucléaire de E' dans c_0 et de l^1 dans E, ou encore un élément de $c_0 \hat{\otimes} E$, c'est-à-dire si la norme de $\sum_{n \geq 1} 1_n \otimes e_n$ dans $c_0 \hat{\otimes} E$ est finie. Nous dirons abusivement que $(e_n)_{n \geq 1}$ est dans $c_0 \hat{\otimes} E$ et nous noterons $\|(e_n)_{n \geq 1}\|_{c_0 \hat{\otimes} E}$ au lieu de $\|\sum_{n \geq 1} 1_n \otimes e_n\|_{c_0 \hat{\otimes} E}$.

L'espace $c_0 \hat{\otimes} E$ est fermé dans $l^\infty \hat{\otimes} E$ (puisque l^∞ est le bidual de c_0), lui-même fermé dans $I(l^1, E)$. $c_0 \hat{\otimes} E$ est donc le sous-espace fermé de $l^\infty \hat{\otimes} E$ engendré par les suites finies. Une suite $(e_n)_{n \geq 1}$ est dans $c_0 \hat{\otimes} E$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que

$$\forall p \geq 1 \qquad \|(e_n)_{n=N+1}^{n=N+p}\|_{l_p^\infty \hat{\otimes} E} < \varepsilon.$$

La norme de $(e_n)_{n=N+1}^{n=N+p}$ dans $l_p^\infty \hat{\otimes} E$ ou dans $l_p^\infty \hat{\otimes} E''$ est la même, donc une suite $(e_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de E est dans $c_0 \hat{\otimes} E$ dès qu'elle est dans $c_0 \hat{\otimes} E''$.

Opérateurs 1-sommant et semi-intégraux à gauche. Notons $\pi_1(E, F)$ l'espace des opérateurs 1-sommant de E dans F. Si S est un tel opérateur, sa norme 1-sommante est la plus petite constante C telle que, pour tout entier p et toute suite $(e_n)_{n=1}^{n=p}$ dans E

$$\sum_{n=1}^{p} \|S(e_n)\| \leq C \sup_{\|e'\|_{E'} \leq 1} \sum_{n=1}^{p} |\langle e_n, e' \rangle|.$$

En d'autres termes, pour tout p, S se prolonge en un opérateur de norme C

$$\mathrm{Id} \otimes S \colon l_p^1 \hat{\hat{\otimes}} E \to l_p^1 \hat{\otimes} F$$

donc S se prolonge en un opérateur de norme C

$$\mathrm{Id} \otimes S \colon l^1 \hat{\hat{\otimes}} E \to l^1 \hat{\otimes} F$$

c'est-à-dire S transforme les séries inconditionnellement convergentes de E en séries normalement convergentes de F.

Par dualité ${}^tS\colon E' \leftarrow F'$ se prolonge en un opérateur de norme C

$$\mathrm{Id} \otimes {}^tS \colon l_p^\infty \hat{\otimes} E' \leftarrow l_p^\infty \hat{\hat{\otimes}} F',$$
$$c_0 \hat{\otimes} E' \leftarrow c_0 \hat{\hat{\otimes}} F'.$$

Notons $\mathrm{SIG}(E, F)$ l'espace des opérateurs semi-intégraux à gauche de E dans F. Un opérateur T de E dans F est *semi-intégral à gauche* s'il transforme les suites de E convergentes en norme vers 0 en suites de F nucléairement convergentes vers 0. La norme semi-intégrale de T est C si T

se prolonge en un opérateur de norme C

$$\mathrm{Id}\otimes T\colon\ c_0\hat{\hat{\otimes}}E \to c_0\hat{\otimes}F$$

ou encore si, pour tout p, T se prolonge en un opérateur de norme C

$$\mathrm{Id}\otimes T\colon\ l_p^\infty\hat{\hat{\otimes}}E \to l_p^\infty\hat{\otimes}F.$$

Si $S\in\pi_1(E', F)$ et si ${}^tS$ envoie F' dans E, ${}^tS$ est semi-intégral à gauche de F' dans E, et $\|{}^tS\|_{\mathrm{SIG}(F',E)} = \|S\|_{\pi_1(E',F)}$: en effet ${}^tS$ transforme les suites de F' convergentes en norme vers 0 en suites de E convergeant nucléairement vers 0 dans E'', donc dans E.

Réciproquement si T est semi-intégral à gauche de F' dans E, ${}^tT$ se prolonge en opérateur

$$\mathrm{Id}\otimes{}^tT\colon\ l^1\hat{\otimes}F'' \leftarrow l^1\hat{\hat{\otimes}}E'.$$

Si en outre ${}^tT$ envoie E' dans F, ${}^tT$ est 1-sommant de E' dans F.

Rappelons le théorème de factorisation de Pietsch pour les opérateurs 1-sommant: $T\in\pi_1(E, F)$ si et seulement s'il existe une mesure de probabilité μ sur $B_1(E')$ telle que T se factorise

$$E \xrightarrow{i} E_\mu \xrightarrow{j} E^\mu \xrightarrow{T} F$$

où E_μ est l'adhérence de E dans $L^\infty(\mu)$, E^μ son adhérence dans $L^1(\mu)$, i et j les applications canoniques, avec $\|T\|_{\mathscr{L}(E^\mu,F)} = \|T\|_{\pi_1(E,F)}$. Enfin un opérateur intégral est 1-sommant et semi-intégral à gauche, et un opérateur 1-sommant défini sur un espace $C(K)$ est intégral.

Définition 1. Soient E, F des espaces de Banach. Un opérateur $T\colon F'\to E$ est un *M-opérateur* si

(i) ${}^tT\colon E'\to F$,

(ii) T transforme les suites bornées de F' convergeant vers 0 pour $\sigma(F', F)$ en suites nucléairement convergentes vers 0 dans E.

Un M-opérateur est évidemment semi-intégral à gauche de F' dans E; il est compact si F est séparable ou WCG.

Une partie des difficultés viendra du fait que même s'il prend ses valeurs dans un sous-espace fermé $E_1\subset E$, ce n'est plus en général un M-opérateur dans E_1.

Définition 2. Un opérateur $T\colon L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu)\to E$ est un *N-opérateur* si sa restriction à $L^\infty(\mu)$ est un M-opérateur de $L^\infty(\mu)$ dans E.

Un N-opérateur est intégral de $L^\infty(\mu)$ dans E. Réciproquement nous verrons qu'à tout M-opérateur intégral de $L^\infty(\mu)$ dans E est associé un N-opérateur de $L^1(h\mu)$ dans E où $h\in L^1(\mu)$ (proposition 2).

Il résulte immédiatement des définitions que tout N-opérateur est un opérateur de Dunford–Pettis:

Opérateurs de Dunford–Pettis. Un opérateur T: $L^1(\mu) \to E$ est de *Dunford–Pettis* s'il transforme les suites bornées de $L^\infty(\mu)$ convergeant vers 0 pour $\sigma(L^\infty, L^1)$ en suites convergeant vers 0 en norme dans E.

Un opérateur T: $L^1(\mu) \to E$ est donc de Dunford–Pettis si et seulement si sa restriction à $L^\infty(\mu)$ est compacte, ou encore si et seulement si ${}^tT$ est limite d'opérateurs de rang fini pour la norme d'opérateur $\mathscr{L}(E', L^1)$. Nous obtiendrons une caractérisation analogue pour les N-opérateurs (corollaire 1 du théorème 1). Il est bien connu que T: $L^1(\mu) \to E$ est de Dunford–Pettis si et seulement si T transforme les suites de $L^1(\mu)$ convergeant vers 0 pour $\sigma(L^1, L^\infty)$ en suites convergeant vers 0 en norme dans E. Nous obtiendrons une caractérisation analogue pour les N-opérateurs (théorème 2).

Opérateurs représentables. Un opérateur T: $L^1(\mu) \to E$ est *représentable* (dans E) s'il existe $F \in L^\infty(\mu, E)$ tel que

$$\forall \varphi^1 \in L^1(\mu) \qquad T(\varphi) = \int \varphi F \, d\mu.$$

Pour que T: $L^1(\mu) \to E$ soit représentable, il suffit même qu'il existe $F \in L^1(\mu, E)$ tel que

$$\forall \varphi \in L^\infty(\mu) \qquad T(\varphi) = \int \varphi F \, d\mu.$$

Comme $L^1(\mu, E) = L^1(\mu) \hat{\otimes} E$, un opérateur T: $L^1(\mu) \to E$ est représentable si et seulement si ${}^tT$: $E' \to L^\infty(\mu)$ est limite en norme $I(E', L^1(\mu))$ d'opérateurs de rang fini.

Si E_1 est un sous-espace fermé de E, si T: $L^1(\mu) \to E_1$ est représentable dans E, il est aussi représentable dans E_1.

L'espace E a, par définition, *la propriété de Radon–Nikodym* si tout opérateur de $L^1(\mu)$ dans E est représentable.

Définition 3 [7]. Un espace de Banach E a *la propriété* (P) si tout N-opérateur: $L^1(\mu) \to E$ est représentable.

Si E a la propriété de Radon–Nikodym, il a évidemment la propriété (P). Si E a la propriété (P), ses sous-espaces fermés l'ont aussi: en effet, si $E_1 \subset E$, tout N-opérateur $L^1(\mu) \to E_1$ est un N-opérateur: $L^1(\mu) \to E$, donc est représentable dans E, donc est représentable dans E_1.

N-convoluteurs. Lorsque $(\Omega, \mathscr{A}, \mu) = (G, \mathscr{B}, dg)$ où G est un groupe compact abélien muni de la tribu $\mathscr{B}$ de ses boréliens et de la mesure de Haar dg, lorsque E est un espace de Banach sur lequel G opère isométriquement par translation, un *convoluteur* de $L^1(G)$ dans E est un opérateur continu qui commute à la translation par G. Si c'est en outre un N-opérateur, nous parlerons de *N-convoluteur*.

2. Caractérisation des M-opérateurs et des N-opérateurs.

Proposition 1. *Soient E, F des espaces de Banach. Tout élément de $F \hat{\otimes} E$ définit un M-opérateur de F' dans E.*

Démonstration. Un élément de $F\hat{\otimes}E$ définit un opérateur T: $F' \to E$ tel que ${}^tT$: $E' \to F$ est nucléaire. Une suite $(f_n')_{n\geqslant 1}$ dans $B_1(F')$ telle que $f_n' \to 0$ pour $\sigma(F', F)$ définit un opérateur U: $F \to c_0$ par

$$f \rightsquigarrow (\langle f, f_n'\rangle)_{n\geqslant 1}.$$

Alors $U \circ {}^tT = E' \to c_0$ est nucléaire et définit un élément de $c_0\hat{\otimes}E''$. Donc $T\circ{}^tU = \big(T(f_n')\big)_{n\geqslant 1}$ définit un élément de $c_0\hat{\otimes}E$.

Appliquant cette proposition à $F = L^1(\mu)$ nous avons:

COROLLAIRE. *Tout opérateur représentable* $T = L^1(\mu) \to E$ *est un* N-*opérateur.*

Pour démontrer le théorème 1, qui caractérise les M-opérateurs, nous avons besoin du résultat suivant, qui est connu, mais pour lequel nous n'avons pas trouvé de référence. Il s'agit d'une factorisation à la Pietsch:

LEMME 1. *Soit* S: $E \to F$ *un opérateur, limite dans* $\pi_1(E, F)$ *d'opérateurs de rang fini* $(S_n)_{n\geqslant 1}$. *Alors il existe une mesure de probabilité* ν *sur* $B_1(E')$ *telle que* S *se factorise en* $S = \tilde{S}\circ i$ *où* i: $E \to E^\nu$ *est l'application canonique de* E *dans le sous-espace fermé* E^ν *de* $L^1(\nu)$ *engendré par* $i(E)$, $\tilde{S}$: $E^\nu \to F$ *est compact et* $\|\tilde{S}\| \leqslant \|S\|_{\pi_1(E,F)}$.

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$ posons $C = \|S\|_{\pi_1} + \varepsilon$ et $S_0 = 0$. Nous pouvons supposer $\sum\limits_{n\geqslant 0} \|S - S_n\|_{\pi_1} < C$. Posons $K = B_1(E')$, munie de la topologie $\sigma(E', E)$; soit $\mathscr{C}$ le cône engendré dans $C(K)$ par les fonctions φ de la forme

$$(1)\quad \varphi(e') = C \sup_{n\leqslant N} \sum_{i=1}^{i_n} |\langle e_{n,i}, e'\rangle| - \sum_{n=0}^{N}\sum_{i=1}^{i_n} \|(S-S_n)(e_{n,i})\|, \qquad N \in N,\ e_{n,i} \in E.$$

Vérifions que $\mathscr{C}$ est disjoint du cône des fonctions négatives de $C(K)$: si φ_1 et φ_2 ont la forme (1) et sont associées respectivement à $(e_{n,i})_{i\leqslant i_n, n\leqslant N}$ et $(f_{n,j})_{j\leqslant j_n, n\leqslant N}$. Soit φ_3 de la forme (1), associée à la réunion $(g_{n,i})_{i\leqslant i_n+j_n, n\leqslant N}$ où $g_{n,i} = e_{n,i}$ si $i \leqslant i_n$, $g_{n,i} = f_{n,j}$ si $i = i_n + j$. Alors $\varphi_1(e') + \varphi_2(e') \geqslant \varphi_3(e')$ si $e' \in K$ et $\varphi_3(e')$ atteint sur K une valeur strictement positive par définition de C et de la norme $\pi_1(E, F)$.

Par le théorème de Hahn–Banach, il existe une mesure positive ν sur K, qu'on peut supposer de probabilité, telle que $\langle \mu, \varphi\rangle \geqslant 0$ pour $\varphi \in \mathscr{C}$. Donc

$$C \sup_{n\in N} \int_K |\langle e_n, e'\rangle|\, d\nu \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|(S - S_n)(e_n)\|$$

pour toute suite $(e_n)_{n\geqslant 0}$ de E d'où

$$C \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|\tilde{S} - \tilde{S}_n\|_{\mathscr{L}(E^\nu, F)}$$

où $\tilde{S}$, $\tilde{S}_n$ désignent les prolongements à E^ν de S et S_n. Donc $\|\tilde{S}\| \leqslant \|S\|_{\pi_1}+\varepsilon$ et $\|\tilde{S}-\tilde{S}_n\| \to 0$, $\tilde{S}$ est compact.

THÉORÈME 1. *Soit F un espace de Banach* WCG *ayant la propriété d'approximation bornée. Pour un opérateur T: $F' \to E$ les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *T est un M-opérateur*;

(ii) *il existe une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ d'endomorphismes de rang fini de F telle que $\|{}^tT-U_n \circ {}^tT\|_{\pi_1(E',F)} \to 0$ si $n \to +\infty$*;

(iii) *${}^tT$ est limite d'opérateurs de rang fini pour la norme $\pi_1(E', F)$*;

(iv) *${}^tT$ admet la factorisation de Pietsch*

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "{}^tT"] \arrow[d, "i"'] & F \\
E'^\nu \arrow[ur, "S"'] &
\end{tikzcd}$$

ν est une mesure de probabilité sur $B_1(E'')$, i est l'application canonique de E' dans le sous-espace fermé E'^ν de $L^1(\nu)$ engendré par E', S est compact;

(v) *${}^tT$ admet une factorisation ${}^tT = S \circ W$ où W: $E' \to L$ est 1-sommant, S: $L \to F$ est compact*;

(vi) *T admet une factorisation $T = W' \circ S'$ où S': $F' \to J$ est compact, continu pour $\sigma(F', F)$ et la norme de J, W': $J \to E$ est semi-intégral à gauche.*

Démonstration. (i)$\Rightarrow$(ii). Le M-opérateur T est compact puisque F est WCG. Son adjoint ${}^tT$ est compact, il envoie E' dans un sous-espace séparable de F, donc dans un sous-espace F_1 séparable et complémenté de F. Soit P une projection de F sur F_1. Comme nous l'avons vu dans les rappels, il existe une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ d'endomorphismes de rang fini de F telle que, pour tout $f \in F$, $\|U_n(f)-P(f)\| \to 0$ si $n \to +\infty$, et il existe une constante $M>0$ telle que $\|P\| \leqslant M$ et $\|U_n\| \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 1$.

Nous raisonnons ensuite par l'absurde. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\delta \leqslant \|{}^tT-U_n \circ {}^tT\|_{\pi_1(E',F)} = \|{}^tT-U_n \circ {}^tT\|_{\pi_1(E',F_1)} = \|T \circ {}^tP - T \circ {}^tU_n\|_{\mathrm{SIG}(F'_1,E)}.$$

Il existe donc $\varepsilon_n = (\varepsilon_{n,p})_{p=1}^{p=p_n}$ dans la boule unité de $l^\infty_{p_n}\hat{\hat{\otimes}}F'$, tel que $\|(\mathrm{Id}\otimes T \circ ({}^tP-{}^tU_n))(\varepsilon_n)\|_{l^\infty_{p_n}\check{\otimes}E} \geqslant \delta$.

Posons $\varepsilon'_n = (\mathrm{Id}\otimes({}^tP-{}^tU_n))(\varepsilon_n) = (\varepsilon'_{n,p})_{p=1}^{p=p_n}$. Alors

(α) $$\|\varepsilon'_n\|_{l^\infty_{p_n}\hat{\hat{\otimes}}F'} \leqslant 2M,$$

(β) $$\|(\mathrm{Id}\otimes T)(\varepsilon'_n)\|_{l^\infty_{p_n}\check{\otimes}E} \geqslant \delta.$$

La suite $(\varepsilon'_{n,p})_{n\geqslant 1, 1\leqslant p\leqslant p_n}$ est uniformément bornée dans F' et converge vers 0 pour $\sigma(F', F)$. Par (β) son image par T ne définit pas un élément de $c_0\hat{\otimes}E$, donc T n'est pas un M-opérateur.

(ii) ⇒ (iii) est évident.

(iii) ⇒ (iv) découle du lemme 1.

(iv) ⇒ (v) est évident.

(v) ⇒ (vi) Si ${}^tT$: $E' \to F$, si T: $F' \to E$ et si ${}^tT = S \circ W$, avec $W \in \pi_1(E', L)$ et S compact: $L \to F$, alors $T = {}^tW \circ {}^tS$ avec ${}^tS$: $F' \to L'$ compact et continu pour $\sigma(F', F)$ et la norme de L', ${}^tW$: $L' \to E''$ et ${}^tW$ est dans $\mathrm{SIG}(L', E'')$; soit J le sous-espace fermé de L' engendré par l'image de ${}^tS$, soit W' la restriction à J de ${}^tW$, alors W': $J \to E$ est dans $\mathrm{SIG}(J, E)$; notons S': $F' \to J$ l'opérateur qui coïncide avec ${}^tS$, il a les propriétés voulues.

(vi) ⇒ (i) est évident.

Remarques. On peut montrer directement et facilement que (iii) ⇒ (i) sans utiliser la factorisation de Pietsch. L'implication (v) ⇒ (iii) est évidente puisque F a la propriété d'approximation bornée. On peut obtenir (i) ⇒ (vi) directement comme dans [7]. Les principales conséquences de ce théorème proviendront de l'équivalence de (i), (ii) et (iv).

Le théorème 1 s'applique en particulier lorsque $F = L^1(\mu)$, qui est bien un espace WCG; d'où le corollaire 1 énoncé au début de ce travail.

COROLLAIRE 2. a) *Soit* T: $C(K) \to E$ *un opérateur intégral, se factorisant en* $T = W' \circ S'$ *où* S': $C(K) \to J$ *est compact et* W': $J \to E$ *est semi-intégral à gauche. Alors il existe une mesure de probabilité* μ *sur* K *tel que* T *se prolonge en un* N*-opérateur*: $L^1(\mu) \to E$.

b) *Un espace* E *a la propriété* (P) *si et seulement si tout opérateur* T *comme ci-dessus est nucléaire.*

Démonstration. a) Comme T est intégral, il existe une mesure μ de probabilité sur K telle que T se prolonge en opérateur: $L^1(\mu) \to E$, notons $\tilde{T}$ le prolongement de T à $L^\infty(\mu)$. Alors $\tilde{T} = {}''T \circ {}^tP$ où P: $M(K) \to L^1(\mu)$ est la projection canonique qui, à une mesure sur K, associe par le théorème de Radon–Nikodym sa composante absolument continue par rapport à μ. Puisque S' est compact, ${}''T \circ {}^tP = W' \circ {}''S' \circ {}^tP$. Comme ${}''S' \circ {}^tP = L^\infty(\mu) \to J$ est compact continu pour $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$ et la norme de J, $\tilde{T}$ est un M-opérateur, d'après l'implication facile (vi) ⇒ (i) du théorème 1.

b) Si E a la propriété (P), le N-opérateur défini comme dans (a) est représentable, par un élément de $L^1(\mu)\hat{\otimes}E$, donc est nucléaire de $C(K)$ dans E.

Réciproquement soit T: $L^1(\mu) \to E$ un N-opérateur. Sa restriction à $L^\infty(\mu)$ (qui est un espace $C(K)$) est un M-opérateur intégral. D'après l'implication (i) ⇒ (vi) du théorème 1, elle se factorise suivant un opérateur compact et un opérateur semi-intégral à gauche. Par hypothèse elle est nucléaire de $L^\infty(\mu)$ dans E et envoie E' dans $L^1(\mu)$, donc elle est dans $L^1(\mu)\hat{\otimes}E$, T est représentable. Donc E a la propriété (P).

Voici une autre caractérisation des N-opérateurs.

THÉORÈME 2. *Un opérateur* T: $L^1(\mu) \to E$ *est un* N*-opérateur si et seulement si* T *transforme les suites de* $L^1(\mu)$ *latticiellement bornées convergeant vers* 0 *pour* $\sigma(L^1, L^\infty)$ *en suites nucléairement convergentes vers* 0 *dans* E.

Démonstration. La condition est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Soit $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans $L^1(\mu)$ telle que $\varphi = \sup_n |\varphi_n|$ soit dans $L^1(\mu)$. Alors (φ_n) définit un élément de $L^1(\mu, l^\infty(N)) = l^\infty \hat{\otimes} L^1(\mu)$.

Si T: $L^1(\mu) \to E$ est continu, $\mathrm{Id} \otimes T$: $l^\infty \hat{\otimes} L^1(\mu) \to l^\infty \hat{\otimes} E$ l'est aussi.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M > 0$ tel que $\int_{\{|\varphi| > M\}} \varphi \, d\mu \leqslant \varepsilon/(2\|T\|)$. Posons $\varphi_n' = \varphi_n 1_{\{|\varphi| < M\}}$. Comme $\int \sup_n |\varphi_n - \varphi_n'| \, d\mu \leqslant \int_{\{|\varphi| > M\}} \varphi \, d\mu$, nous avons

(α) $$\|\varphi_n'\|_\infty \leqslant M,$$

(β) $$\varphi_n' \to 0 \quad \text{pour } \sigma(L^1, L^\infty),$$

(γ) $$\|(\varphi_n - \varphi_n')_{n\geqslant 1}\|_{l^\infty \hat{\otimes} L^1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2\|T\|}$$

donc $\|(T(\varphi_n) - T(\varphi_n'))_{n\geqslant 1}\|_{l^\infty \hat{\otimes} E} \leqslant \varepsilon/2$.

Si T est un N-opérateur, la suite $(T(\varphi_n'))_{n\geqslant 1}$ est dans $c_0 \hat{\otimes} E$. Alors il existe N tel que, pour tout $p \geqslant 1$, $\|(T(\varphi_n'))_{n=N+1}^{n=N+p}\|_{l_p^\infty \hat{\otimes} E} \leqslant \varepsilon/2$ donc $\|(T(\varphi_n))_{n=N+1}^{n=N+p}\|_{l_p^\infty \hat{\otimes} E} \leqslant \varepsilon$.

Cela entraîne que $(T(\varphi_n))_{n\geqslant 1}$ est dans $c_0 \hat{\otimes} E$.

Tout N-opérateur $L^1(\mu) \to E$ est évidemment un M-opérateur intégral $L^\infty(\mu) \to E$. Inversement un M-opérateur intégral: $L^\infty(\mu) \to E$ définit-il un N-opérateur sur un espace $L^1(\sigma)$?

Nous avons besoin du lemme suivant, qui est connu, et nous resservira dans la troisième partie.

LEMME 2. *Soit* T: $L^\infty(\mu) \to E$ *un opérateur intégral tel que* ${}^tT$: $E' \to L^1(\mu)$. *Alors il existe* $h \geqslant 0$ *dans* $L^1(\mu)$ *et un opérateur* $\tilde{T}$: $L^1(h\mu) \to E$ *tel que*

$$\|\tilde{T}\| = \|T\|_{I(L^\infty(\mu), E)},$$
$$\forall \varphi \in L^\infty(\mu) \qquad T(\varphi) = T(1_{\{h \neq 0\}} \varphi) = \tilde{T}(\varphi).$$

Démonstration. $L^\infty(\mu)$ s'identifie par la transformation de Gelfand à un espace $C(K)$, $L^1(\mu)$ s'identifie à un sous-espace $L^1(\tilde{\mu})$ de $M(K)$, T s'identifie à un opérateur: $C(K) \to E$ que nous notons encore T. Si T est intégral il existe une mesure de probabilité σ sur K telle que le diagramme (I), et par dualité le diagramme (II), soient commutatifs:

$$
\text{(I)}\quad
\begin{tikzcd}
C(K) \arrow[r, "T"] \arrow[d] & E \\
L^\infty(\sigma) \arrow[r] & L^1(\sigma) \arrow[u, "\tilde{T}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\text{(II)}\quad
\begin{tikzcd}
M(K) & E' \arrow[l, "{}^tT"'] \arrow[d, "{}^t\tilde{T}"] \\
L^1(\sigma) \arrow[u] & L^\infty(\sigma) \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

où les applications non précisées sont les applications canoniques.

Par le théorème de Radon–Nikodym, $\sigma = \tilde{h}\tilde{\mu}+\sigma_s$ où $\tilde{h}\in L^1(\tilde{\mu})$, $\tilde{h}\geqslant 0$ et $\sigma_s\in M(K)$ est singulière par rapport à $\tilde{\mu}$. Alors $L^1(\sigma) = L^1(\tilde{h}\tilde{\mu})\oplus L^1(\sigma_s)$. L'image de ${}^tT$ dans $M(K)$ est à la fois dans $L^1(\sigma)$ et $L^1(\tilde{\mu})$, donc dans $L^1(\tilde{h}\tilde{\mu})$, et même dans $L^\infty(\tilde{h}\tilde{\mu})$. Alors

$$\|\tilde{T}\|_{\mathscr{L}(L^1(\tilde{h}\tilde{\mu}),E)} = \|\tilde{T}\|_{\mathscr{L}(L^1(\sigma),E)} = \|T\|_{I(C(K),E)}.$$

Il existe $h\geqslant 0\in L^1(\mu)$ telle que $L^1(h\mu)$ s'identifie à $L^1(\tilde{h}\tilde{\mu})$, d'où le lemme 2.

Proposition 2. *Soit T: $L^\infty(\mu)\to E$ un M-opérateur intégral. Alors il existe $h\geqslant 0$ dans $L^1(\mu)$ telle que T se prolonge en un N-opérateur $\tilde{T}$: $L^1(h\mu)$ $\to E$ avec* $\|\tilde{T}\| = \|T\|_{I(L^\infty(\mu),E)}$.

Démonstration. Puisque T est intégral, appliquons le lemme 2 et vérifions que $\tilde{T}$ est encore un M-opérateur de $L^\infty(h\mu)$ dans E. D'une part ${}^t\tilde{T}$: $E'\to L^1(h\mu)$, d'autre part, soit $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans $B_1(L^\infty(h\mu))$ convergeant vers 0 pour $\sigma(L^\infty(h\mu), L^1(h\mu))$. Alors $(1_{\{h\neq 0\}}\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ est dans $B_1(L^\infty(\mu))$ et pour toute $\psi\in L^1(\mu)$, $\int_{\{h\neq 0\}}\varphi_n\psi\,d\mu = \int_{\{h\neq 0\}}\varphi_n\frac{\psi}{h}h\,d\mu\to 0$ si $n\to +\infty$ car $\frac{\psi}{h}1_{\{h\neq 0\}}\in L^1(h\mu)$. Donc

$$\big(\tilde{T}(\varphi_n)\big)_{n\geqslant 1} = \big(T(1_{\{h\neq 0\}}\varphi_n)\big)_{n\geqslant 1} \quad \text{est dans } c_0\hat{\otimes}E.$$

Corollaire. *Un espace E a la propriété* (P) *si et seulement si tout M-opérateur intégral $L^\infty(\mu)\to E$ est nucléaire.*

La condition est évidemment suffisante, elle est nécessaire d'après la proposition 2.

3. *N*-opérateurs à valeurs dans des espaces particuliers. Espaces ayant la propriété (P). Nous allons étudier des conditions sur E qui permettent d'identifier la classe des N-opérateurs à la classe des opérateurs de Dunford–Pettis ou à la classe des opérateurs représentables.

Rappelons que E a *la propriété de Grothendieck* si $\mathscr{L}(E', L^2(\mu))$ coïncide avec $\pi_1(E', L^2(\mu))$.

Le théorème 1 entraîne le résultat suivant:

THÉORÈME 3. *Soit E un espace de Banach tel que E' a la propriété de Grothendieck. Alors*

a) *un opérateur T: $L^1(\mu) \to E$ est un N-opérateur si et seulement si c'est un opérateur de Dunford–Pettis.*

b) *E a la propriété* (P) *si et seulement s'il a la propriété de Radon–Nikodym.*

Démonstration. a) Nous avons déjà remarqué que tout N-opérateur est de Dunford–Pettis. Soit maintenant T: $L^1(\mu) \to E$, de Dunford–Pettis. Alors T: $L^2(\mu) \to E$ est compact, ${}^tT$: $E' \to L^2(\mu)$ est compact. Donc ${}^tT$ est limite d'opérateurs de rang fini dans $\mathscr{L}(E', L^2(\mu))$ ou encore dans $\pi_1(E', L^2(\mu))$, a fortiori dans $\pi_1(E', L^1(\mu))$. D'après le théorème 1, T est un N-opérateur.

b) D'après [2] un espace E a la propriété de Radon–Nikodym dès que les opérateurs de Dunford–Pettis sont représentables.

COROLLAIRE 1. *La classe des N-opérateurs $L^1(\mu) \to E$ coïncide avec celle des opérateurs de Dunford–Pettis si*

a) *$E = c_0(K)$ où K est localement compact (en particulier c_0 et $C(G)$ où G est un groupe compact abélien);*

b) *plus généralement si E est un espace de type $\mathscr{L}^\infty$;*

c) *$E = A(D) = C_{\mathbf{Z}^+}(T)$ l'algèbre du disque;*

d) *$E = C_\Lambda(G)$ où G est un groupe compact abélien et Λ une partie de son dual telle que $L^1_{\Lambda^c}(G)$ soit réflexif.*

En effet, E' a la propriété de Grothendieck dans les cas (a) et (b) d'après [12], dans le cas (c) d'après [3], dans le cas (d) d'après [15].

COROLLAIRE 2. a) *Un espace de Banach E qui contient un sous-espace fermé isomorphe à c_0 n'a pas la propriété* (P).

b) *Il existe un espace de type $\mathscr{L}^\infty$ qui ne contient pas c_0 et qui n'a pas la propriété* (P).

En effet, si E a la propriété (P) ses sous-espaces fermés l'ont aussi. L'espace c_0 n'a pas la propriété de Radon–Nikodym, donc n'a pas (P). L'espace de type $\mathscr{L}^\infty$ construit dans [5] n'a pas la propriété de Radon–Nikodym.

Le théorème 1 permet de retrouver le résultat de Mokobodzki:

PROPOSITION 3. a) *Si ν est une mesure de probabilité, $L^1(\nu)$ a la propriété* (P) ([14]).

b) *Tout M-opérateur $L^\infty(\mu) \to L^1(\nu)$ est dans $L^1(\mu)\hat{\otimes}L^1(\nu)$.*

Démonstration. Si $E = L^1(\nu)$, $E' = L^\infty(\nu)$, donc pour tout espace F les espaces $I(L^\infty(\nu), F)$ et $\pi_1(L^\infty(\nu), F)$ coïncident. D'après le théorème 1, si T: $L^\infty(\mu) \to L^1(\nu)$ est un M-opérateur, ${}^tT$: $L^\infty(\nu) \to L^1(\mu)$ est limite en norme π_1, donc en norme intégrale, d'opérateurs de rang fini. Donc T est dans $L^1(\mu)\hat{\otimes} L^1(\nu)$.

A l'aide des résultats de [9] il est facile d'obtenir toute une classe d'espaces ayant la propriété (P):

Rappelons qu'un espace de Banach E est *semi-plongeable* dans un espace de Banach F s'il existe une injection continue i: $E \to F$ telle que l'image par i de la boule unité de E soit fermée dans F.

PROPOSITION 4. *Soit E un espace de Banach séparable semi-plongeable dans un espace F ayant la propriété* (P). *Alors E a la propriété* (P).

Démonstration. Un N-opérateur $L^1(\mu) \to E$ est aussi un N-opérateur $L^1(\mu) \to F$, il est donc représentable dans F. Il est aussi représentable dans E d'après [9].

En outre si E a la propriété CSP et si tous ses sous-espaces séparables ont la propriété (P), E a la propriété (P): en effet, tout N-opérateur $L^1(\mu)$ a une image séparable. C'est aussi un N-opérateur: $L^1(\mu) \to E_1$ où E_1 est séparable, complémenté dans E et contient l'image de $L^1(\mu)$.

Soit $\mathscr{S}$ la plus petite classe des espaces de Banach séparables contenant L^1 et stable par semi-plongements. Tout espace ayant CSP, dont les sous-espaces séparables sont dans $\mathscr{S}$, a la propriété (P), d'après ce qui précède. Par exemple [9]:

a) les espaces de Banach réticulés ne contenant pas de copie de c_0,

b) les espaces de Banach à structure locale inconditionnelle ne contenant pas de l_n^∞ uniformément.

Voici une autre conséquence du théorème 1 et de la proposition 3 (a):

THÉORÈME 4. *Soit E un espace de Banach ayant la propriété* (P). *Alors l'espace $L^1(\nu)\hat{\otimes} E$, où ν est une mesure de probabilité, a la propriété* (P).

Nous démontrons ce résultat en plusieurs étapes.

Si E, F, H sont des espaces de Banach, tout opérateur T: $F' \to H \hat{\hat{\otimes}} E$ définit canoniquement une forme linéaire sur $F' \hat{\otimes} H' \hat{\otimes} E'$, et donc un opérateur P: $F' \hat{\otimes} H' \to E$. Nous posons $H = L^1(\nu)$.

LEMME 3. *Soit T: $F' \to L^1(\nu)\hat{\otimes} E$; supposons ${}^tT$: $L^\infty(\nu)\hat{\hat{\otimes}} E' \to F$, et ${}^tT$ 1-sommant. Soit P associé canoniquement à T comme ci-dessus. Alors ${}^tP$: $E' \to I(L^\infty(\nu), F)$, P: $L^\infty(\nu)\hat{\hat{\otimes}} F' \to E$ et* $\|{}^tP\|_{\pi_1(E', I(L^\infty(\nu), F))} \leqslant \|{}^tT\|_{\pi_1(L^\infty(\nu)\hat{\hat{\otimes}} E', F)}$.

Démonstration. Si $e' \in E'$, $\varphi \in L^\infty(\nu)$, ${}^tP(e')(\varphi) = {}^tT(e' \otimes \varphi)$. Si ${}^tT$: $L^\infty(\nu)\hat{\hat{\otimes}} E' \to F$ est 1-sommant, alors ${}^tP(e')$: $L^\infty(\nu) \to F$ est 1-sommant donc intégral, donc ${}^tP$: $E' \to I(L^\infty(\nu), F)$; par dualité P: $L^\infty(\nu)\hat{\hat{\otimes}} F' \to E$.

Vérifions la dernière assertion: pour tout $\varepsilon > 0$, soit $(e'_n)_{n=1}^{n=p}$ telle que $\|(e'_n)_{n=1}^{n=p}\|_{l_p^1 \hat{\hat{\otimes}} E'} = 1$ et $\|{}^tP\|_{\pi_1} \leqslant \sum_{n=1}^{p} \|{}^tP(e'_n)\|_{I(L^\infty(\nu), F)} + \varepsilon$. Comme $I(L^\infty(\nu), F)$ est normé par les fonctions étagées de $L^\infty(\nu)\hat{\hat{\otimes}} F'$, il existe $(f'_{i,n})_{i \leqslant N, 1 \leqslant n \leqslant p} \in B_1(F')$

et des ensembles ν-mesurables $(A_i)_{i\leqslant N}$ deux à deux disjoints tels que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{p}\|{}^tP(e'_n)\|_{I(L^\infty(\nu),F)}-\varepsilon &\leqslant \sum_{n=1}^{p}\langle {}^tP(e'_n),\sum_{i=1}^{N}1_{A_i}\otimes f'_{i,n}\rangle\\ &=\sum_{n=1}^{p}\sum_{i=1}^{N}\langle {}^tT(1_{A_i}\otimes e'_n),f'_{i,n}\rangle\\ &\leqslant \sum_{n=1}^{p}\sum_{i=1}^{N}\|{}^tT(1_{A_i}\otimes e'_n)\|_F\\ &\leqslant \|{}^tT\|_{\pi_1(L^\infty(\nu)\hat{\hat{\otimes}}E',F)}\end{aligned}$$

car $\|\sum_{n=1}^{p}\sum_{i=1}^{N}1_{A_i}\otimes e'_n\|_{l^1_{p\times N}\hat{\hat{\otimes}}L^\infty(\nu)\hat{\hat{\otimes}}E'}=1$.

PROPOSITION 5. *Soit F un espace de Banach* WCG *ayant la propriété d'approximation bornée. Soit $T\colon F'\to L^1(\nu)\hat{\otimes}E$ un M-opérateur. Soit $P\colon L^\infty(\mu)\hat{\hat{\otimes}}F'\to E$ associé canoniquement à T (comme dans le lemme* 3). *Alors ${}''P\colon \mathscr{L}(L^1(\mu),F')\to E$ est un M-opérateur.*

Démonstration. Par hypothèse ${}'T\colon L^\infty(\nu)\hat{\hat{\otimes}}E'\to F$ et d'après le théorème 1, ${}'T$ est limite en norme 1-sommante d'opérateurs de rang fini $(U_n\circ{}'T)_{n\geqslant 1}=({}'T_n)_{n\geqslant 1}$. Aux opérateurs $(T_n)_{n\geqslant 1}$ associons canoniquement $(P_n)_{n\geqslant 1}$. D'après le lemme 3, $\|{}'P-{}'P_n\|\to 0$ en norme d'opérateur 1-sommant de E' dans $I(L^\infty(\nu),F)$. Mais pour tout $e'\in E'$, ${}'P_n(e')$ est de rang fini donc ${}'P_n\colon E'\to L^1(\nu)\hat{\otimes}F$ et $\|{}'P-{}'P_n\|\to 0$ en norme $\pi_1(E',L^1(\nu)\hat{\otimes}F)$. A chaque T_n, donc à chaque P_n, est associé un élément de $F\hat{\otimes}L^1(\nu)\hat{\otimes}E$. Donc ${}'P_n$ est limite en norme $N(E',L^1(\nu)\hat{\otimes}F)$ d'opérateurs de rang fini, ${}'P$ est limite en norme $\pi_1(E',L^1(\nu)\hat{\otimes}F)$ d'opérateurs de rang fini. En particulier ${}'P$ est compact, donc ${}''P\colon\mathscr{L}(L^1(\nu),F')\to E$, ce qui achève la preuve, d'après le théorème 1.

Démonstration du théorème 4. Soit $T\colon L^1(\mu)\to L^1(\nu)\hat{\otimes}E$ un N-opérateur. Alors $T\colon L^\infty(\mu)\to L^1(\nu)\hat{\otimes}E$ est un M-opérateur. Soit $P\colon L^\infty(\mu)\hat{\hat{\otimes}}L^\infty(\nu)\to E$ associé à T comme ci-dessus, alors ${}''P\colon L^\infty(\mu\otimes\nu)\to E$ est un M-opérateur d'après la proposition 5 appliquée à $F=L^1(\mu)$ et l'identification $L^1(\mu\otimes\nu)=L^1(\mu)\hat{\otimes}L^1(\nu)$. Comme T opère sur $L^1(\mu)\hat{\otimes}(L^\infty(\nu)\hat{\hat{\otimes}}E')$ il définit une forme linéaire sur $L^\infty(\mu)\hat{\hat{\otimes}}L^\infty(\nu)\hat{\hat{\otimes}}E'$, donc P est intégral, ${}''P$ est 1-sommant partant de $L^\infty(\mu\otimes\nu)$, donc intégral. D'après la proposition 2, il existe $h\geqslant 0$ dans $L^1(\mu\otimes\nu)$ tel que ${}''P$ se prolonge en N-opérateur $L^1(h(\mu\otimes\nu))\to E$. Si E a la propriété (P), ${}''P$ est représentable par un élément de $L^1(h(\mu\otimes\nu))\hat{\otimes}E$, et même de $L^\infty(h(\mu\otimes\nu),E)$, donc de $L^\infty(\mu\otimes\nu,E)$. Donc la forme linéaire définie par P (ou T) sur $L^\infty(\mu)\hat{\hat{\otimes}}L^\infty(\nu)\hat{\hat{\otimes}}E'$ est dans $L^1(\mu)\hat{\otimes}L^1(\nu)\hat{\otimes}E$, ce qui montre que T est représentable et achève la démonstration.

Remarque. Les espaces $L^1(\nu)$, ou $L^1(\nu)\hat{\otimes}E$ si E a la propriété de Radon–Nikodym, ont même une propriété plus forte que (P): Soit un opérateur T: $L^1(\mu)\to L^1(\nu)\hat{\otimes}E$ tel que, pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ d'ensembles μ-mesurables telle que $\mu(A_n)\to 0$, $\big(T(1_{A_n})\big)_{n\geqslant 1}$ converge nucléairement vers 0. Alors T est représentable.

Ce résultat est démontré dans [7] en considérant le point de vue des mesures vectorielles, plutôt que le point de vue des opérateurs.

Pour $L^1(\nu)$, ce résultat se trouve déjà dans [6], pour des espaces plus généraux que $L^1(\mu)$ et $L^1(\nu)$. (Il a été retrouvé indépendamment dans [7].)

4. ***N*-convoluteurs.** Dans cette partie, G désigne un groupe abélien compact que nous supposons métrisable pour simplifier, et $\Lambda=(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une partie de son dual Γ. Une partie des résultats concerne le cas où $E = L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}$ (paragraphe B), mais les problèmes ouverts concernent aussi d'autres espaces, en particulier $E=C_\Lambda(G)$. C'est pourquoi nous préférons étudier au paragraphe A l'espace des convoluteurs: $L^1(G)\to E$ dans un cadre plus général.

A. *Convoluteurs dans un espace de la classe $\mathscr{B}(\Lambda)$.* Appelons $\mathscr{E}(\Lambda)$ la classe des espaces de Banach E tels que

a) il existe deux injections: i: $\Lambda\to E$ et i': $\Lambda\to E'$ telles que les suites $\big(i(\lambda_n)\big)_{n\geqslant 1}$ et $\big(i'(\lambda_n)\big)_{n\geqslant 1}$ sont biorthogonales;

b) si $e\in E$ et $\langle e, i'(\lambda_n)\rangle = 0$ pour $n\geqslant 1$, alors $e=0$;

c) le groupe G agit isométriquement par translation sur E (notons $e\leadsto e_g$ cette action) et pour tout $g\in G$

$$\big(i(\lambda_n)\big)_g = \overline{\lambda_n(g)}\, i(\lambda_n).$$

Alors G agit isométriquement sur E' par dualité. Si T: $L^1(G)\to E$ est un convoluteur, $T(\gamma)=0$ lorsque $\gamma\notin\Lambda$, et $T(\lambda_n)=\hat{T}(\gamma)\,i(\lambda_n)$ où $\hat{T}(\gamma) = \langle T(\lambda_n), i'(\lambda_n)\rangle$. En effet

$$\begin{aligned}\langle\big(T(\gamma)\big)_g, i'(\lambda_n)\rangle &= \langle T(\gamma), \big(i'(\lambda_n)\big)_g\rangle = \overline{\lambda_n(g)}\,\langle T(\gamma), i'(\lambda_n)\rangle\\ &= \langle T(\gamma_g), i'(\lambda_n)\rangle = \overline{\gamma(g)}\,\langle T(\gamma), i'(\lambda_n)\rangle\end{aligned}$$

donc $\langle T(\gamma), i'(\lambda_n)\rangle = 0$ si $\gamma\neq\lambda_n$, et $T(\lambda_n)-\hat{T}(\lambda_n)\,i(\lambda_n)=0$, par (b).

Appelons $\mathscr{B}(\Lambda)$ la classe des espaces E appartenant à $\mathscr{E}(\Lambda)$ pour lesquels $\big(i(\lambda_n)\big)_{n\geqslant 1}$ engendre un espace dense pour la norme dans E.

Si E est dans $\mathscr{B}(\Lambda)$, E' est dans $\mathscr{E}(\Lambda)$.

Ces classes d'espaces ont déjà été considérées dans [13]. Par exemple si $E=C_\Lambda(G)$, i est l'application identité, si $E=L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}$, i est la restriction de l'application quotient.

LEMME 4. *Soit E un espace de la classe $\mathscr{B}(\Lambda)$. Alors*

(i) *le groupe G opère continûment sur E;*

(ii) *tout* $e \in E$ *définit un convoluteur compact*: $L^1(G) \to E$;

(iii) *tout* $e' \in E'$ *définit un convoluteur*: $L^1(G) \to E'_0$, *où* E'_0 *est le sous-espace fermé de* E' *engendré par* $(i'(\lambda_n))_{n \geq 1}$;

(iv) *l'espace* E'_0 *est normant pour E. Soit* $\tilde{E}$ *son dual. E s'identifie au sous-espace fermé de* $\tilde{E}$ *engendré par* $(i(\lambda_n))_{n \geq 1}$.

Par exemple, si $E = C_\Lambda(G)$, $\tilde{E} = L^\infty_\Lambda(G)$; si $E = L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}$, $\tilde{E} = M(G)/M_{\Lambda^c}$; si $E = C(G)/C_{\Lambda^c}$, $\tilde{E} = L^\infty/L^\infty_{\Lambda^c}$.

Démonstration. (i) Par (c) le groupe G opère continûment sur $i(\lambda_n)$ pour tout n donc sur un sous-espace dense de E. Comme G opère isométriquement sur E, il opère continûment sur E.

(ii) Soit $e \in E$. D'après (i) l'orbite de e par G est compacte dans E. Son enveloppe disquée est relativement compacte dans E, donc e définit un convoluteur compact $l^1(G) \to E$: $\sum \alpha_i \delta_{g_i} \rightsquigarrow \sum \alpha_i e_{g_i}$ et par dualité $C(G) \leftarrow E'$: $e' \rightsquigarrow (\langle e_g, e' \rangle)$. Par dualité à nouveau e définit un convoluteur compact: $M(G) \to E$, de norme $\|e\|_E$, continu pour $\sigma(M(G), C(G))$ et la norme de E, en particulier c'est un convoluteur: $L^1(G) \to E$.

L'image de $\varphi \in L^1(G)$ est notée $e * \varphi$, elle est définie par

$$\langle e * \varphi, i'(\lambda_n) \rangle = \langle \varphi, \lambda_n \rangle \langle e, i'(\lambda_n) \rangle$$

car $L^1(G)$ est engendré par les caractères $\gamma \in \Gamma$.

(iii) Si $e' \in E'$ et $\varphi \in L^1(G)$ définissons $e' * \varphi \in E'$ par dualité:

$$\forall e \in E \quad \langle e' * \varphi, e \rangle = \langle e', \varphi * e \rangle.$$

Alors $\|e' * \varphi\| \leqslant \|e'\| \|\varphi\|$.

Si $e' \in E'_0$ cette définition coïncide avec celle qu'on obtiendrait en considérant E'_0 comme un espace de $\mathscr{B}(\Lambda)$.

Si $e' \in E'$, il définit un convoluteur $L^1(G) \to E'_0$ puisque $L^1(G)$ est engendré par les caractères $\gamma \in \Gamma$.

(iv) Rappelons qu'*une approximation de l'identité dans* $L^1(G)$ est une suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ dans $L^1(G)$ telle que, pour tout $n \geqslant 1$:

(i) $\varphi_n \geqslant 0$;

(ii) $\|\varphi_n\| = 1$;

(iii) $\langle \varphi, \gamma \rangle = 0$ sauf pour un nombre fini de $\gamma \in \Gamma$;

(iv) $\forall \varphi \in L^1(G)$ $\|\varphi_n * \varphi - \varphi\| \to 0$ si $n \to +\infty$.

En particulier, si $\gamma \in \Gamma$, $\langle \varphi_n, \gamma \rangle \to 1$ si $n \to +\infty$, donc $\varphi_n \to \delta_0$ pour $\sigma(M(G), C(G))$.

D'après (ii), si $e \in E$, $\|e * \varphi_n - e\| \to 0$ si $n \to +\infty$. Alors soit $e' \in B_1(E')$ tel que

$$\|e\| = \langle e, e' \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle e * \varphi_n, e' \rangle = \lim_n \langle e, \varphi_n * e' \rangle \leqslant \|e\|,$$

car $\|\varphi_n * e'\|_{E'_0} \leqslant 1$.

Donc E'_0 est normant pour E, ou, ce qui est équivalent, E s'identifie isométriquement au sous-espace fermé de $\tilde{E}$ (le dual de E'_0) engendré par $(i(\lambda_n))_{n\geqslant 1}$.

PROPOSITION 6. *Soit E un espace dans $\mathscr{B}(\Lambda)$. E'_0, $\tilde{E}$ sont définis comme dans le lemme 4. Alors*

(i) *L'espace des convoluteurs: $L^1(G)\to E$ ou $L^1(G)\to\tilde{E}$ est le même et s'identifie à $\tilde{E}$.*

(ii) *L'espace des convoluteurs compacts: $L^1(G)\to E$ ou $L^1(G)\to\tilde{E}$ s'identifie à E.*

(iii) *E s'identifie au sous-espace fermé de $\tilde{E}$ sur lequel G opère continûment.*

(iv) *L'espace des convoluteurs représentables: $L^1(G)\to E$ ou $L^1(G)\to\tilde{E}$ s'identifie à E.*

(v) *Une suite dans E converge nucléairement vers 0 dans E si et seulement si elle converge nucléairement vers 0 dans $\tilde{E}$.*

(vi) *Un élément $F\in\tilde{E}$ définit un N-convoluteur: $L^1(G)\to E$ ou $L^1(G)\to\tilde{E}$ si et seulement s'il existe $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ une approximation de l'identité dans $L^1(G)$ telle que*

$$\|F*\varphi_n-F\|_{\pi_1(E'_0,L^1(G))}\to 0 \quad si\ n\to+\infty.$$

Démonstration. (i) Soit T un convoluteur: $L^1(G)\to\tilde{E}$. D'après le lemme 4 (iv), c'est en fait un convoluteur: $L^1(G)\to E$. Si $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ est une approximation de l'identité dans $L^1(G)$,

$$\|T(\varphi_n)\|_E\leqslant\|T\|,\qquad \langle T(\varphi_n), i'(\lambda)\rangle\to\hat{T}(\lambda)\ \text{ si } n\to+\infty,\qquad \lambda\in\Lambda.$$

Donc $(T(\varphi_n))_{n\geqslant 1}$ converge pour $\sigma(\tilde{E}, E'_0)$ vers un élément de $\tilde{E}$ qui s'identifie à T. Réciproquement, par le lemme 4 (iii) appliqué à $\tilde{E}$, dual de E'_0, tout élément de $\tilde{E}$ définit un convoluteur: $L^1(G)\to E$.

(ii) Si T est un convoluteur compact: $L^1(G)\to\tilde{E}$, $(T(\varphi_n))_{n\geqslant 1}$ converge en norme vers T pour $\sigma(\tilde{E}, E'_0)$ par (i), donc T est dans E. Réciproquement, par le lemme 4 (ii), tout élément de E définit un convoluteur compact: $L^1(G)\to E$.

(iii) Par le lemme 4 (i), G opère continûment sur E. Réciproquement si $e\in\tilde{E}$, si G opère continûment sur l'espace engendré par les translatés de e, l'orbite de e par G est compacte; comme dans la démonstration du lemme 4 (ii), e définit un convoluteur compact: $L^1(G)\to\tilde{E}$. Par (ii), il est dans E.

(iv) Si $e\in\tilde{E}$ définit un convoluteur représentable: $L^1(G)\to\tilde{E}$, l'application $G\to\tilde{E}$, $g\rightsquigarrow e_g$, doit être fortement mesurable (au sens de Lusin), à valeurs dans $\tilde{E}$. Elle est donc continue à valeurs dans $\tilde{E}$, et l'orbite de e par G est compacte. Par (iii), e est dans E. Réciproquement si $e\in E$, l'application $g\rightsquigarrow e_g$ est continue par le lemme 4 (i), donc e définit un convoluteur représentable: $L^1(G)\to E$.

(v) Soit $(e_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans E qui converge nucléairement vers 0 dans

$\tilde{E}$; montrons qu'elle converge aussi nucléairement vers 0 dans E. Il suffit de voir que $f = (e_n)_{n=1}^{n=p}$ a même norme dans $l_p^\infty \hat{\otimes} E$ et $l_p^\infty \hat{\otimes} \tilde{E}$ pour tout entier p. Soit $(\varphi_j)_{j\geqslant 1}$ une approximation de l'identité dans $L^1(G)$. Alors $\|e_n * \varphi_j - e_n\|_E \to 0$ si $j \to +\infty$ $(1 \leqslant n \leqslant p)$. Les normes $l_p^\infty \hat{\otimes} E$ et $l_p^\infty \hat{\otimes} E$ étant équivalentes, si T_j: $\tilde{E} \to E$ désigne la convolution par φ_j, $\|f - \mathrm{Id} \otimes T_j(f)\|_{l_p^\infty \hat{\otimes} E} \to 0$ si $j \to +\infty$. Donc

$$\|f\|_{l_p^\infty \hat{\otimes} E} = \lim_j \|\mathrm{Id} \otimes T_j(f)\|_{l_p^\infty \hat{\otimes} E} \leqslant \|f\|_{l_p^\infty \hat{\otimes} \tilde{E}} \leqslant \|f\|_{l_p^\infty \hat{\otimes} E}.$$

(vi) Si $F \in \tilde{E}$, F définit un convoluteur: $L^1(G) \to E$ par (ii). Il est équivalent de dire que F est un N-convoluteur dans E ou $\tilde{E}$, par (v). D'après le corollaire 1 du théorème 1, c'est le cas si et seulement si

$$\|F * \varphi_n - F\|_{\pi_1(E_0', L^1)} \to 0 \quad \text{pour } n \to +\infty$$

lorsque $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ est une approximation de l'identité dans $L^1(G)$.

B. *Le cas* $E = L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}$. Les espaces quotients $E = L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}$ sont des espaces de la classe $\mathscr{B}(\Lambda)$.

PROPOSITION 7. *Soient G un groupe compact abélien métrisable, Λ une partie de son dual.*

a) *Tout convoluteur $L^1(G) \to L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}$ est défini par un élément de $M(G)/M_{\Lambda^c}$.*

b) *C'est un N-convoluteur si et seulement si c'est un convoluteur compact $L^1_\Lambda(G) \to L^1_\Lambda(G)$.*

Démonstration. a) résulte de la proposition 6 (i) puisque ici $E_0' = C_\Lambda(G)$.

b) Soit $F \in M(G)/M_{\Lambda^c}$. D'après la proposition 6 (vi), F définit un N-convoluteur $L^1(G) \to L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}$ si et seulement si $\|F * \varphi_n - F\|_{\pi_1(C_\Lambda(G), L^1_\Lambda(G))} \to 0$ si $n \to +\infty$. D'après [11], pour les convoluteurs, la norme $\pi_1(C_\Lambda, L^1_\Lambda)$ coïncide avec la norme d'opérateur $\mathscr{L}(L^1_\Lambda, L^1_\Lambda)$. D'où la proposition.

Voici un exemple d'espace $E = L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}$ pour lequel tout N-convoluteur est représentable. Mais nous ignorons s'il a la propriété (P):

PROPOSITION 8. *Soient G un groupe abélien compact métrisable, Λ une partie de son dual telle que $L^\infty_{\Lambda^c} = C_{\Lambda^c}(G)$. Alors tout N-convoluteur: $L^1(G) \to L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}$ est représentable.*

Démonstration. Soit $\mu \in M(G)$, dont l'image canonique dans $M(G)/M_{\Lambda^c}$ définit un N-convoluteur $L^1(G) \to L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}$. D'après la proposition 7, μ définit un convoluteur compact T: $L^1_\Lambda(G) \to L^1_\Lambda(G)$. Alors, comme les caractères engendrent $C(G)/C_{\Lambda^c}$, ${}^tT$: $C(G)/C_{\Lambda^c} \to C(G)/C_{\Lambda^c}$ est compact, donc ${}^tT = L^\infty(G)/L^\infty_{\Lambda^c} \to C(G)/C_{\Lambda^c}$.

Supposons $L^\infty_{\Lambda^c}(G) = C_{\Lambda^c}(G)$. Comme μ est un convoluteur $C_{\Lambda^c}(G) \to C_{\Lambda^c}(G)$ μ définit alors un convoluteur $L^\infty(G) \to C(G)$. Vérifions que

$\mu \in L^1(G)$: si $F \in L^\infty(G)$, $\mu * F \in C(G)$; $\|\mu * F * \varphi_n - \mu * F\|_{C(G)} \to 0$ si $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ est une approximation de l'identité dans $L^1(G)$; en particulier $\langle \mu * \varphi_n, F \rangle$ converge; $(\mu * \varphi_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy pour $\sigma(L^1, L^\infty)$ donc $\mu \in L^1(G)$.

L'image canonique de μ dans $M(G)/M_{\Lambda^c}$ est donc dans $L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}$. D'après la proposition 6 (iv), elle définit un convoluteur représentable: $L^1(G) \to L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}$.

Notons que la condition $L^\infty_{\Lambda^c} = C_{\Lambda^c}$ entraîne la condition $M_{\Lambda^c} = L^1_{\Lambda^c}$.

Remarque. Le fait que tout convoluteur $L^1(G) \to L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}$ soit représentable n'entraîne pas en général que $L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}$ a la propriété (P). Voici un exemple: soit Λ un ensemble de Sidon. La transformation de Fourier induit les isomorphismes suivants: (par définition) $C_\Lambda(G) \leftrightarrow l^1(\Lambda)$; $L^1(G)/L^1_{\Lambda^c} \leftrightarrow c_0(\Lambda)$; $M(G)/M_{\Lambda^c} \leftrightarrow l^\infty(\Lambda)$; $L^1_\Lambda(G) \leftrightarrow l^2(\Lambda)$ et transforme les convoluteurs en multiplicateurs. L'espace des multiplicateurs compacts de $l^2(\Lambda)$ étant $c_0(\Lambda)$, la proposition 7 entraîne que tout N-convoluteur $L^1(G) \to L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}$ est défini par un élément de $L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}$, donc est représentable. Cependant $L^1(G)/L^1_{\Lambda^c}$ n'a pas la propriété (P) d'après le corollaire 1 du théorème 3.

Lorsque $G = \boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}/2\pi\boldsymbol{Z}$ et $\Lambda = \boldsymbol{Z}^+$, l'espace $L^1(\boldsymbol{T})/L^1_{\Lambda^c}$ est noté $L^1(\boldsymbol{T})/\overline{H^1_0}$. La proposition 7 et une construction due à Bourgain entraînent:

THÉORÈME 5. *L'espace* $L^1(\boldsymbol{T})/\overline{H^1_0}$ *n'a pas la propriété* (P). *Plus précisément, il existe un* N*-convoluteur non représentable* $L^1(\boldsymbol{T}) \to L^1(\boldsymbol{T})/\overline{H^1_0}$.

Démonstration. Lorsque $E = L^1(\boldsymbol{T})/\overline{H^1_0}$, $\tilde{E} = L^1(\boldsymbol{T})/\overline{H^1_0} \oplus M_s(\boldsymbol{T})$, où $M_s(\boldsymbol{T})$ est l'espace des mesures singulières par rapport à la mesure de Haar dt. D'après la proposition 7, il suffit de trouver μ non nulle dans $M_s(\boldsymbol{T})$, définissant un convoluteur compact de $H^1(\boldsymbol{T}) = L^1_{\boldsymbol{Z}^+}(\boldsymbol{T})$. Cette mesure sera un produit de Riesz. L'idée de la construction suivante est due à J. Bourgain [4]:

Soient r un entier positif ≥ 3 et $\mu_n = \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{j}} \cos r^j t\right) dt$. Alors $\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n$ pour $\sigma(M(\boldsymbol{T}), C(\boldsymbol{T}))$ est une mesure positive de norme 1, singulière d'après [17] puisque $\sum (1/\sqrt{j})^2 = +\infty$. Nous allons montrer que

$$\forall f \in H^1(\boldsymbol{T}) \qquad \|(\mu - \mu_n) * f\|_{H^1(\boldsymbol{T})} \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \|f\|_{H^1(\boldsymbol{T})}.$$

L'outil essentiel est un résultat de Stein [16] que nous énonçons sous la forme suivante: Soit T une fonction trapèze continue sur $\boldsymbol{R}$, nulle en dehors de $[a, rb]$ $(0 < a < b < ra)$, égale à 1 sur $[b, ra]$, linéaire sur $[a, b]$ et $[ra, rb]$. Pour $k \in \boldsymbol{Z}$, posons $T_n(k) = T(r^{-n}k)$, d'où $\forall k \geq 1$ $\sum_{n \geq 0} T_n(k) = 1$. Si

$f \in H_1(T)$, soit $f_j = f * \hat{T}_j$, où $\hat{T}_j(t) = \sum_{k \in Z} e^{ikt} T_j(k)$. Alors il existe des constantes C_1, $C_2 > 0$ telles que:

$$C_1 \|f\|_{H_1(T)} \leqslant \int_T \Big(\sum_{j \geqslant 1} |f_j|^2\Big)^{1/2} dt \leqslant C_2 \|f\|_{H^1(T)}.$$

Notons que $\int_T \big(\sum_{j \geqslant 1} |f_j|^2\big)^{1/2} dt$ est la norme de l'application $t \rightsquigarrow (f_j(t))_{j \geqslant 1}$ dans $L^1(T, l^2)$. Supposons a, b, r choisis de façon que

(i) $\hat{T}_n * \mu = \hat{T}_n * \mu_n$;
(ii) $\hat{T}_n * \mu_{n-1} = 0$;
(iii) $\hat{T}_n * e^{i2r^n t} \mu_{n-1} = 0$.

Comme $\mu_j = \mu_{j-1} + \dfrac{1}{\sqrt{j}} \mu_{j-1} \left(\dfrac{e^{ir^j t} + e^{-ir^j t}}{2}\right)$,

$$(\mu - \mu_n) * \hat{T}_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leqslant n \text{ par (i)}, \\ \mu_j * \hat{T}_j & \text{si } j > n \text{ par (i) et (ii)}, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{j}} (e^{ir^j t} \mu_{j-1}) * \hat{T}_j & \text{par (ii)}. \end{cases}$$

Alors si $f \in H^1(T)$,

$$\begin{aligned} \|(\mu - \mu_n) * f\|_{H^1} &= \Big\| \sum_{j \geqslant 0} (\mu - \mu_n) * f * \hat{T}_j \Big\|_{H^1} \\ &\leqslant \frac{1}{C_1} \int_T \Big(\sum_{j \geqslant 1} |f * (\mu - \mu_n) * \hat{T}_j|^2\Big)^{1/2} dt \\ &\leqslant \frac{1}{C_1} \int_T \left(\sum_{j \geqslant n+1} \frac{1}{4j} |f * e^{ir^j t} \mu_{j-1} * \hat{T}_j|^2\right)^{1/2} dt \\ &\leqslant \frac{1}{2C_1\sqrt{n}} \int_T \Big(\sum_{j \geqslant n+1} |f * e^{ir^j t} \mu * \hat{T}_j|^2\Big)^{1/2} dt \end{aligned}$$

grâce à (iii)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2C_1\sqrt{n}} \|((f * \hat{T}_j) e^{-ir^j t} * \mu)_{j \geqslant 1}\|_{L^1(T, l^2)} \\ &\leqslant \frac{1}{2C_1\sqrt{n}} \|(f * \hat{T}_j)_{j \geqslant 1}\|_{L^1(T, l^2)} \\ &\leqslant \frac{C_2}{2C_1\sqrt{n}} \|f\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Pour préciser les conditions (i), (ii), (iii), notons que

$$\text{Support } T_n \subset [r^n a, r^{n+1} b], \quad \text{Support } \mu_n \subset \left[-\frac{r^{n+1}}{r-1}, \frac{r^{n+1}}{r-1}\right].$$

Ces conditions sont donc vérifiées si $0 < a < b < ra$ et

$$r^{n+1} b < r^{n+1} - \frac{r^{n+1}}{r-1} \quad \text{d'où } b < 1 - \frac{1}{r-1},$$

$$\frac{r^n}{r-1} \leqslant r^n a \quad \text{d'où } \frac{1}{r-1} \leqslant a,$$

$$r^{n+1} b \leqslant 2r^n - \frac{r^n}{r-1} \quad \text{d'où } rb \leqslant 2 - \frac{1}{r-1}.$$

Donc $\frac{r}{r-1} \leqslant ra < rb \leqslant 2 - \frac{1}{r-1}$, r doit être > 3. Par exemple $r = 4$, $a = 1/3$, $b = 5/12$ conviennent.

C. *N-convoluteurs et enveloppes inconditionnelles.* Considérons le cas où $E = C_A(G)$ et le problème suivant.

Tout convoluteur $L^1(G) \to C_A(G)$ est-il un N-convoluteur?

PROPOSITION 9. *Tout convoluteur $L^1(G) \to C_A(G)$ est un N-convoluteur si*

a) $C_A(G) = C(G)$ *et plus généralement si $L^1_{A^c}(G)$ est réflexif*;

b) $C_A(G) = A(D)$ *l'algèbre du disque*;

c) $C_A(G) = L^\infty_A(G)$.

Démonstration. Tout convoluteur $L^1(G) \to C_A(G)$ est défini par un élément de $L^\infty_A(G)$ (donc de $L^2_A(G)$) d'après la proposition 6 (i). C'est donc un opérateur compact: $L^2_A(G) \to C_A(G)$ et un opérateur de Dunford–Pettis. Les cas (a) et (b) de la proposition résultent alors du corollaire 1 du théorème 3. Dans le cas (c), tout convoluteur $L^1(G) \to C_A(G)$ est représentable, donc est un N-convoluteur d'après la proposition 1.

Plus généralement se pose le problème suivant:

Soit E un espace de la classe $\mathscr{B}(\Lambda)$. Tout convoluteur $L^1(G) \to E$ est-il un N-opérateur?

Nous allons établir le lien entre ce problème et une propriété d'un espace canoniquement associé à E.

Définition 4. Soit E un espace de la classe $\mathscr{B}(\Lambda)$. Son *enveloppe inconditionnelle* est le sous-espace diagonal de $c_0 \hat{\otimes} E$, c'est-à-dire le sous-espace fermé de $c_0 \hat{\otimes} E$ engendré par les atomes $1_n \otimes i(\lambda_n)$, $n \geqslant 1$, ou encore par les suites finies $(\alpha_n i(\lambda_n))_{n \geqslant 1}$, $\alpha_n \in \boldsymbol{C}$.

Les atomes $1_n \otimes i(\lambda_n)$, $n \geqslant 1$, forment clairement une base inconditionnelle de l'enveloppe de E.

PROPOSITION 10. *Soit E un espace de la classe $\mathscr{B}(\Lambda)$.*

a) *Un N-convoluteur $L^1(G) \to E$ est défini par un élément $F \in \tilde{\tilde{E}}$ tel que $\sum_{n \geq 1} 1_n \otimes \langle F, i'(\lambda_n) \rangle i(\lambda_n) \in c_0 \hat{\otimes} E$.*

b) *L'application canonique $i(\lambda_n) \leadsto 1_n \otimes i(\lambda_n)$, $n \geq 1$, se prolonge linéairement en une injection continue de E dans son enveloppe.*

c) *Si tout convoluteur $L^1(G) \to E$ est un N-convoluteur, l'enveloppe inconditionnelle de E est un dual.*

Démonstration. a) D'après la proposition 6 (i) tout convoluteur: $L^1(G) \to E$ est défini par un élément $F \in \tilde{\tilde{E}}$. Si c'est un N-convoluteur, il transforme la suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ qui tend vers 0 pour $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$ en la suite $(\langle F, i'(\lambda_n) \rangle i(\lambda_n))_{n \geq 1}$ qui appartient à $c_0 \hat{\otimes} E$.

b) Tout élément de E définit un convoluteur représentable: $L^1(G) \to E$ d'après la proposition 6 (iv), donc un N-convoluteur d'après la proposition 1, (b) découle alors de (a).

c) découle de (a) et du résultat suivant de [13]: Si $\tilde{\tilde{E}}$ s'injecte canoniquement dans l'enveloppe inconditionnelle de E, cette enveloppe est un dual, à condition d'identifier la définition de l'enveloppe donnée ci-dessus à celle de [13], ce que nous ferons ci-après.

Les exemples d'enveloppes d'espaces $C_\Lambda(G)$ cités dans [13] sont bien des espaces duals, mais nous ignorons s'il en est toujours ainsi.

La notion d'enveloppe inconditionnelle tire son intérêt du fait que tout convoluteur de E dans un espace de la classe $\mathscr{B}(\Lambda)$ admettant $(i(\lambda_n))_{n \geq 1}$ pour base inconditionnelle se factorise par l'injection canonique de E dans son enveloppe [13].

L'enveloppe de E était définie dans [13] comme l'image de $c_0 \hat{\otimes} E$ dans l'espace $\mathscr{S}$ des suites de nombres complexes, par l'application

$$P: h = \sum_{k \geq 1} \varepsilon_k \otimes e_k \leadsto \Big(\sum_{k \geq 1} \varepsilon_k(n) \langle e_k, i(\lambda_n) \rangle \Big)_{n \geq 1} = (\alpha_n)_{n \geq 1}$$

munie de la norme

$$\|(\alpha_n)_{n \geq 1}\| = \inf \{ \|h\|_{c_0 \hat{\otimes} E} \mid P(h) = (\alpha_n)_{n \geq 1} \}.$$

En d'autres termes, $P: \sum_{n \geq 1} 1_n \otimes e_n \leadsto (\langle e_n, i'(\lambda_n) \rangle)_{n \geq 1}$, ou encore

$$P: 1_n \otimes i(\lambda_m) \leadsto 0 \quad \text{si } m \neq n,$$
$$1_n \otimes i(\lambda_n) \leadsto 1_n.$$

Pour vérifier que l'application

$$m = 1_n \leadsto 1_n \otimes i(\lambda_n)$$

identifie $P(c_0 \hat{\otimes} E)$ à l'espace diagonal de $c_0 \hat{\otimes} E$, considérons l'application: $1_n \leadsto \lambda_n$: elle identifie c_0 à un espace F_0 de la classe $\mathscr{B}(\Lambda)$ et elle identifie l'espace des suites complexes $\mathscr{S}$ à un espace que nous notons $\mathscr{S}(\Lambda)$. Nous appliquons alors le lemme suivant:

LEMME 5. *Soient E, F des espaces de la classe $\mathscr{B}(\Lambda)$. Le sous-espace diagonal de $E\hat{\otimes}F$ engendré par les atomes $i(\lambda_n)\otimes j(\lambda_n)$ est complémenté dans $E\hat{\otimes}F$, la projection étant définie par*

$$i(\lambda_n)\otimes j(\lambda_m) \rightsquigarrow \begin{cases} 0 & si\ \lambda_n \neq \lambda_m, \\ i(\lambda_n)\otimes j(\lambda_n) & si\ \lambda_n = \lambda_m. \end{cases}$$

Démonstration. Elle suit celle de [10], qui correspond au cas $E = L^p(G)$, $F = L^q(G)$. Les injections canoniques:

$$\Lambda \times \Lambda \to E\hat{\otimes}F, \quad (\lambda, \lambda') \rightsquigarrow i(\lambda)\otimes j(\lambda'),$$
$$\Lambda \to E\hat{\otimes}F, \quad \lambda \rightsquigarrow i(\lambda)\otimes j(\lambda),$$

se prolongent linéairement en applications: $i\otimes j$: $\mathscr{P}(\Lambda)\times\mathscr{P}(\Lambda) \to E\hat{\otimes}F$ et M: $\mathscr{P}(\Lambda) \to E\hat{\otimes}F$, où $\mathscr{P}(\Lambda)$ est l'espace des combinaisons linéaires finies d'éléments de Λ.

Soit P: $E\hat{\otimes}F \to \mathscr{S}(\Lambda)$ définie linéairement par

$$i(\lambda_n)\otimes j(\lambda_m) \rightsquigarrow \lambda_n * \lambda_m = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_n \neq \lambda_m, \\ \lambda_n & \text{si } \lambda_n = \lambda_m. \end{cases}$$

Si $f, h \in \mathscr{P}(\Lambda)$,

$$f * h(x+y) = \int_G f(x+g)\,h(y-g)\,dh = \int_G f_{-g}(x)\,h_g(y)\,dg.$$

Donc

$$M \circ P \circ (i\otimes j)(f, h) = (i\otimes j)(f * h) = \int_G i(f_{-g})\otimes j(h_g)\,dg.$$

La norme dans $E\hat{\otimes}F$ de cet élément est majorée par $\|i(f)\otimes j(h)\|_{E\hat{\otimes}F}$, puisque G opère isométriquement et continûment sur $E\hat{\otimes}F$ d'après le lemme 4. Alors $M\circ P$ se prolonge en une projection continue de $E\hat{\otimes}F$ sur son espace diagonal. Donc l'image par P de $E\hat{\otimes}F$ s'identifie canoniquement à cet espace diagonal.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Amir and J. Lindenstrauss, *The structure of weakly compact sets in Banach spaces*, Annals of Mathematics 88 (1968), p. 35–46.

[2] J. Bourgain, *Dunford–Pettis operators on L^1 and the RNP property*, Israel Journal of Mathematics 37 (1980), p. 34–37.

[3] –, *New Banach space property of the disc algebra and H^∞*, Acta Mathematica 157 (1983).

[4] –, Communication orale.

[5] — and G. Pisier, *A construction of $\mathscr{L}^\infty$ spaces and related Banach spaces*, Boletim da Sociedade de Matématica de São Paulo (to appear).

[6] A. V. Buckhvalov, *Integral representation of linear operators*, Journal of Soviet Mathematics 9 (1978), p. 129–136.

[7] A. Costé, *Sur les opérateurs représentables*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Paris (1984), à paraître. Prépubl. no. 15, Univ. Caen (1983).
Une propriété remarquable de l'espace L^1_E. Prépubl. Univ. Caen no. 20 (1983).

[8] J. Diestel and J. J. Uhl, *Vector measures*, Mathematical Surveys 15 (1977).

[9] N. Choussoub and H. P. Rosenthal, *Martingales, G_δ embeddings and quotients of L^1*, Mathematische Annalen 264 (1983), p. 321–332.

[10] C. Herz, *Remarque sur la note précédente de N. Th. Varopoulos*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Paris 260 (1965), p. 6001–6004.

[11] S. Kwapień and A. Pełczyński, *Absolutely summing operators and translation invariant subspaces of functions on compact abelian groups*, Mathematische Nachrichten 94 (1980), p. 303–340.

[12] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in $\mathscr{L}_p$ spaces and their applications*, Studia Mathematica 29 (1968), p. 275–326.

[13] F. Lust-Piquard, *Enveloppe inconditionnelle d'un espace de Banach et factorisation de multiplicateurs*, Publ. Math. d'Orsay no. 8 (1981), exp. 6.

[14] G. Mokobodzki, *Noyaux absolument mesurables et opérateurs nucléaires*, Séminaire Goulaouic–Schwartz (1971–1972), éxpose 6, Ecole Polytechnique.

[15] G. Pisier, *Une nouvelle classe d'espaces de Banach vérifiant le théorème de Grothendieck*, Annales de l'Institut Fourier 28 (1978), p. 69–90.

[16] E. Stein, *Classes H^p, multiplicateurs et fonctions de Littlewood–Paley. Applications de résultats antérieurs*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. Paris 263 (1966), p. 780–781.

[17] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Volume I, p. 208–209.

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE DAKAR
DAKAR-FANN (SÉNÉGAL)

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
ÉQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIÉE AU CNRS (296)
ANALYSE HARMONIQUE
MATHÉMATIQUE (BÂT. 425)
91405 ORSAY CEDEX

Reçu par la Rédaction le 23. 02. 1984