ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
VI (1963)

J. WOJTOWICZ (Warszawa)

O SPROWADZANIU RÓWNANIA $g(v) = F(u, w)$ DO POSTACI KANONICZNEJ CAUCHY'EGO

Zagadnienie to zostało już rozstrzygnięte przez autora [1]. W niniejszej pracy podaje inny dowód i nowe warunki, wygodniejsze w zastosowaniu.

Problem ten jest równoważny zbudowaniu dla tego równania nomogramu siatkowego o rodzinach linii:

Rodzina linii u: $x = f(u)$,

Rodzina linii v: $y = \Phi[g(v)]$,

Rodzina linii w: $x = f(u)$, $y = \Phi[F(u, w)]$,

przy czym rodzina linii w powinna być także rodziną linii prostych. Łatwo zauważyć, że jeżeli rodzina linii w jest pękiem prostych (o środku właściwym lub niewłaściwym), to równanie nie jest równaniem Cauchy'ego w ścisłym sensie, lecz jedną z postaci równania trzeciego rzędu. Oczywiście w takim przypadku równanie rzędu trzeciego będziemy uważać za zdegenerowaną postać równania Cauchy'ego, z równania Cauchy'ego $p(v) = r(u)g(w)+s(w)$ wynika bowiem, że jeżeli $g(w) = \text{const}$, to rodzina linii w może być przedstawiona jako rodzina prostych równoległych, a jeżeli $s(w) = \text{const}$, to może być przedstawiona jako pęk prostych.

Zauważmy dalej, że na to, by rodzina linii była rodziną prostych potrzeba i wystarcza, żeby w każdym punkcie krzywizna była równa zero, a zatem żeby spełniona była tożsamość

$$x_u y_{uu} - x_{uu} y_u \equiv 0. \tag{1}$$

Udowodnimy teraz

TWIERDZENIE. *Jeżeli:*

1° *funkcja* $F \equiv F(u, w)$ *jest określona i ciągła w prostokącie* D *określonym nierównościami* $u_0 \leqslant u \leqslant u_1$, $w_0 \leqslant w \leqslant w_1$,

2° *funkcja* F *ma w tym prostokącie ciągłe pochodne cząstkowe aż do rzędu piątego włącznie,* 3° *w prostokącie spełnione są nierówności*

$$F_u = 0, \quad F_w \neq 0 \quad i \quad A_w \neq 0, \qquad gdzie \quad A = \frac{\partial}{\partial u}\left|\frac{F_w}{F_u}\right|,$$

to na to, żeby istniały funkcje:

1. $f(u)$ — *określona i ciągła w przedziale* $u_0 \leqslant u \leqslant u_1$ *mająca tam ciągłe pochodne aż do rzędu trzeciego włącznie, przy czym* $f'(u) \neq 0$,

2. $\Phi(t)$ — *określona i ciągła w przedziale* I, *który wypełniają wartości funkcji* $F(u, w)$ *w prostokącie* D, *mająca ciągłe pochodne aż do rzędu drugiego włącznie, przy czym* $\Phi'(t) \neq 0$, *takie, że rodzina linii* $x = f(u)$, $y = \Phi[F(u, w)]$ *jest rodziną prostych*,

potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były tożsamości:

$$A_{uww}A_w + 2A_w^3 - A_{uw}A_{ww} \equiv 0, \tag{2a}$$

$$A_{uuw}A_w - A_uA_w^2 + A_{uw}^2 - A^2A_w^2 \equiv 0. \tag{2b}$$

Dowód. Tożsamość (1) napisana dla rodziny linii w ma postać

$$\frac{\Phi''}{\Phi'} \equiv \frac{hF_u - F_{uu}}{F_u^2}, \quad \text{gdzie} \quad h \equiv \frac{f''}{f'}. \tag{3}$$

Zakładamy, że tożsamość (3) jest spełniona. Ponieważ lewa strona tożsamości (3) jest funkcją F, to także prawa strona jest funkcją F, a zatem spełniona jest tożsamość

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u}\left[\dfrac{hF_u - F_{uu}}{F_u^2}\right] & \dfrac{\partial}{\partial w}\left[\dfrac{hF_u - F_{uu}}{F_u^2}\right] \\ F_u & F_w \end{vmatrix} \equiv 0. \tag{4}$$

Tożsamość ta po uporządkowaniu przyjmuje postać

$$h' + Ah + A_u + A^2 \equiv 0. \tag{5}$$

Różniczkując tożsamość (5) względem zmiennej w i obliczając h otrzymuje się

$$h \equiv -\frac{A_{uw} + 2AA_w}{A_w}. \tag{6}$$

Lewa strona tej tożsamości nie zależy od zmiennej w, a zatem spełniona jest tożsamość

$$\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{A_{uw} + 2AA_w}{A_w}\right] \equiv 0. \tag{7}$$

Tożsamość ta jest równoważna tożsamości (2a).

Z tożsamości (6) obliczamy h'. Funkcje h' i h obliczone z tożsamości (6) wstawiamy w tożsamość (5). Stąd, po przekształceniach, otrzymuje się tożsamość (2b). Widać więc, że warunki (2a) i (2b) są konieczne.

Udowodnimy teraz dostateczność warunków (2a) i (2b). Ze spełnienia tożsamości (2a) wynika tożsamość (7), a następnie istnienie funkcji $h(u)$ spełniającej tożsamość (6). Z tożsamości (2b) wynika, że funkcja $h(u)$, spełniająca (6), spełnia tożsamość (5). Z tożsamości (5) wynika tożsamość (4). Z tożsamości (4) wynika istnienie funkcji Φ spełniającej tożsamość (3). Widać więc, że istnieją funkcje $\Phi(t)$ i $f(u)$, dla których rodzina linii: $x = f(u)$, $y = \Phi[F(u, w)]$ ma zerową krzywiznę.

Z tożsamości (2a) i definicji funkcji h wynika, że

$$f(u) \equiv c_1 B(u) + c_2,$$

gdzie

$$B(u) \equiv \int \exp\left[-\int \frac{A_{uw} + 2AA_w}{A_w} du\right] du,$$

a c_1 i c_2 są liczbami.

Z tożsamości (2a), (2b) i (3) wynika tożsamość dla funkcji $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) \equiv c_3 G(t) + c_4,$$

gdzie

$$G(t) \equiv \int \exp\left[-\int P(t) dt\right] dt,$$

$$P(t) \equiv \frac{hF_{uu} - F_{uu}}{F_u^2}, \qquad t \equiv F(u, w),$$

a c_3 i c_4 są liczbami. Widać stąd, że można dowolnie wybrać wielkość jednostek na osiach układu (zależnie od wyboru liczb c_1 i c_3) oraz położenie początku układu, co przy ustalonych wielkościach c_1 i c_3 zależy od wielkości c_2 i c_4.

Zauważmy jeszcze, że łatwo możemy znaleźć wszystkie funkcje jednej zmiennej występujące w postaci kanonicznej

$$p(v) \equiv \Phi[g(v)],$$

$$r(u) \equiv f(u),$$

$$g(w) \equiv \frac{\Phi'[F(u, w)]F_u(u, w)}{f'(u)},$$

$$s(w) \equiv \Phi[F(u, w)] - \frac{f(u)}{f'(u)} \Phi'[F(u, w)]F_u(u, w).$$

Praca cytowana

[1] J. Wojtowicz, *Metody sprowadzania równań czwartego i piątego rzędu nomograficznego do postaci kanonicznej*, Zastosowania Matematyki 5 (1960), str. 1-20.

Praca wpłynęła 12. 4. 1961

Я. ВОЙТОВИЧ (Варшава)

О ПРИВЕДЕНИИ УРАВНЕНИЯ $g(v) = F(u, w)$ К КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ КОШИ

РЕЗЮМЕ

В работе представлены необходимые и достаточные условия приведения уравнения $g(v) = F(u, w)$ к канонической форме Коши.

Исходным моментом для этого является возможность построения для этого уравнения сетчатых номограмм, состоящих из трех семейств прямых, два из которых состоят из параллельных, а третье из произвольных прямых.

Найден также эффективный метод исчисления всех функций одной переменной, входящих в состав уравнения.

J. WOJTOWICZ (Warszawa)

ON REDUCING THE EQUATION $g(v) = F(u, w)$ TO THE CANONICAL CAUCHY FORM

SUMMARY

This paper gives the conditions, necessary and sufficient, that the equation $g(v) = F(u, w)$ could be expressed in the canonical Cauchy form.

The starting point is the possibility of constructing for this equation a set nomogram composed of three families of straight lines, two of which are composed of parallel straight lines, and the third — of any straight lines.

An effective method of computing all one variable functions that are found in the equation is also given.