COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XLVI 1982 FASC. 2

TOPOLOGIES DE CORPS A-LINÉAIRES

PAR

DRISS ABOUABDILLAH (RABAT)

0. Introduction. Soit A un anneau commutatif unitaire d'intégrité et K son corps des fractions. On suppose que $A \neq K$. Les sous-A-modules non nuls de K forment un système fondamental de voisinages de zéro pour une topologie A-linéaire sur K, notée T_A, compatible avec la structure d'anneau de K, séparée et non discrète. De plus, T_A est compatible avec la structure de corps de K si et seulement si $\mathrm{Rad}(A) \neq (0)$ ([1], chapitre 6, exercice 1, § 5).

Soit X_0 l'ensemble des idéaux premiers non nuls de A. Pour tout $p \in X_0$, la topologie T_{A_p} sera notée abusivement T_p et appelée *topologie* p-*adique*.

On désigne par $\mathscr{T}(A)$ l'ensemble des topologies A-linéaires sur K, compatibles avec sa structure de corps, séparées et non discrètes, et on dit que A possède la *propriété de la borne supérieure*, si toute topologie de $\mathscr{T}(A)$ est la borne supérieure d'une famille de topologies p-adiques.

E. Correl a démontré [3] qu'un anneau principal possède la propriété de la borne supérieure.

A. Jebli a montré [6] qu'un anneau de Dedekind possède la propriété de la borne supérieure.

W. Więsław a démontré (thèse de doctorat) le même résultat indépendamment de A. Jebli et a posé un problème en disant qu'il serait intéressant de trouver une autre classe d'anneaux possédant la propriété de la borne supérieure. A. Jebli a caracterisé ensuite les anneaux noethériens possédant cette propriété et a posé le problème analogue suivant: quels sont les anneaux de Prüfer de dimension 1 qui possèdent la propriété de la borne supérieure?

Nous donnons, dans ce travail, une solution à ces deux problèmes.

Nous introduisons en outre la condition suivante:

Pour tout $p \in X_0$ et tout $x \in p$ on a

$$\bigcap_n x^n A_p = (0),$$

ce qui permet d'avoir des renseignements sur les topologies p-adiques.

Nous introduisons également la notion d'anneaux topologiquement prüfériens dont nous donnons quelques propriétés.

1. Anneaux topologiquement prüfériens. On dit qu'une topologie $T \in \mathscr{T}(A)$ est une *topologie de valuation*, s'il existe un anneau de valuation V pour K tel que $T = T_V$.

Rappelons la définition suivante:

On dit que A est un *anneau prüférien* si, pour tout $p \in X_0$, A_p est un anneau de valuation.

Introduisons par analogie la définition suivante:

1.1. Définition. On dit que A est *topologiquement prüférien* si toute topologie p-adique est une topologie de valuation.

1.2. Lemme. *Soit $T \in \mathscr{T}(A)$. S'il existe un sous-A-module M de K ouvert pour T et un $p \in X_0$ tels que*

(1) *T_p soit une topologie de valuation,*

(2) *$M_p \neq K$,*

alors T_p est moins fine que T.

Preuve. Soit V un anneau de valuation (pour K) tel que $T_p = T_V$. Il existe $y \in K^*$ tel que $yV \subset A_p$ donc $yVM_p \subset M_p$.

Soit $x \in K - M_p$. Alors $xV \not\subset yVM_p$ donc $yVM_p \subset xV$, car les sous-V-modules de K sont totalement ordonnés. Par conséquent $yM \subset xV$, ce qui montre que T_V est moins fine que T.

Rappelons qu'un anneau A est dit *h-semi-local* si tout idéal $\neq (0)$ est contenu seulement dans un nombre fini d'idéaux maximaux.

1.3. Théorème. *Soit A un anneau topologiquement prüférien. Si A est h-semi-local, alors il possède la propriété de la borne supérieure.*

Preuve. Soit $T \in \mathscr{T}(A)$ et $M \neq K$ un sous-A-module de K ouvert pour T. L'application $K \times K^* \to K$: $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ est continue en $(0, 1)$, donc il existe un sous-A-module N de K, ouvert pour T tel que $N(I+N)^{-1} \subset M$. On peut supposer $\mathscr{A}_N = N \cap A \neq A$. Soit $(m_i)_{i\in I}$ la famille non vide des idéaux maximaux contenant $\mathscr{A}_N$. Montrons que $\bigcap_{i\in I} N_{m_i} \subset M$.

Soit $y \in \bigcap_{i\in I} N_{m_i}$. Pour tout $i \in I$ il existe $x_i \in N$, $s_i \in A - m_i$ tels que $y = x_i/s_i$. L'idéal $\mathscr{A}_N + \sum_{i\in I} As_i$ n'est contenu dans aucun idéal maximal, donc il est égal à A, donc il existe

$$a \in \mathscr{A}_N, \qquad s = \sum_{i\in I'} a_i s_i \in \sum_{i\in I'} As_i$$

(I' étant une partie finie de I) tels que $1 = a + s$. Nous avons

$$y = \sum_{i\in I'} a_i x_i / \sum_{i\in I'} a_i s_i = \sum_{i\in I'} a_i x_i/(1-a) \in N(1+N)^{-1} \subset M.$$

Donc il existe $i \in I$ tel que $N_{m_i} \neq K$. Par suite, T_{m_i} est moins fine que T (lemme 1.2). Soit $J = \{i \in I / N_{m_i} \neq K\}$. L'ensemble J est non vide et nous avons encore $\bigcap_{i \in J} N_{m_i} \subset M$. Ceci montre que, lorsque I est fini, M est ouvert pour $\sup_{m \in \Delta} T_m$, où Δ est l'ensemble des idéaux maximaux m tels que T_m soit moins fine que T, d'où le théorème.

Remarque. Si A est un anneau de Prüfer, la condition „A est h-semi-local" peut être remplacée par la condition plus faible: „pour toute famille $(m_i)_{i \in I}$ d'idéaux maximaux tels que $\bigcap_{i \in I} m_i \neq (0)$, il existe une famille finie $(p_i)_{i \in I}$ d'idéaux premiers non nuls tels que $p_i \subset m_i$ pour tout $i \in I$" ou, ce qui revient au même, „toute intersection non nulle d'idéaux maximaux contient une intersection finie d'idéaux premiers non nuls".

En voici la preuve. Dans la démonstration du théorème précédent nous avons

$$(0) \neq \mathscr{A}_N \subset \bigcap_{i \in J} m_i .$$

Soit $(p_i)_{i \in J}$ une famille finie d'idéaux premiers non nuls tels que pour tout $i \in J$, $p_i \subset m_i$, on a $p_i A_{p_i} \subset m_i A_{m_i}$ d'où

$$\bigcap_{i \in J} \mathscr{A}_N p_i A_{p_i} \subset \bigcap_{i \in J} \mathscr{A}_N m_i A_{m_i} \subset \bigcap_{i \in J} N_{m_i} \subset M .$$

Or le lemme suivant (un résultat connu) montre que $T_{p_i} = T_{m_i}$ pour tout $i \in J$, et ceci permet de conclure.

1.4. Lemme. *Si V est un anneau de valuation pour K, T_V est un élément minimal dans l'ensemble des topologies linéaires séparées et compatibles avec la structure d'anneau de K.*

Preuve. Soit T une topologie linéaire séparée, compatible avec la structure d'anneau de K, et moins fine que T_V. Si $M \neq K$ est un sous-groupe additif de K ouvert pour T, il existe un sous-groupe additif N de K, ouvert pour T tel que $M \supset NN$ et il existe $x \in K^*$ tel que $N \supset xV$. On a $M \supset xNV$, donc NV est un sous-V-module de K, distinct de K. Soit $y \in K - NV$. On a $NV \subset yV$, car $yV \not\subset NV$, donc $N \subset yV$ et, par suite, la topologie T_V est moins fine que T.

1.5. Proposition. *Si A est topologiquement prüférien, tout sur-anneau de A contenu dans K est topologiquement prüférien.*

Preuve. Soit B un sur-anneau de A contenu dans K. Si p' est un idéal premier non nul de B, $p = p' \cap A \in X_0$ et $T_{B_{p'}} = T_p$ en vertu du lemme 1.4.

1.6. Théorème. *Soit A un anneau topologiquement prüférien. Si A possède la propriété de la borne supérieure, alors tout sur-anneau de A contenu dans K la possède.*

Preuve. Si $T \in \mathcal{T}(B)$, alors $T \in \mathcal{T}(A)$, donc il existe une famille $(p_i)_{i \in I}$ d'éléments de X_0 telle que

$$T = \sup_{i \in I} T_{p_i}.$$

Pour tout $i \in I$ posons $S_i = A - p_i$. On a d'une part, $A_{p_i} \subset S_i^{-1}B$, d'autre part, A_{p_i} est ouvert pour T, donc il existe un sous-B-module M_i de K ouvert pour T tel que $A_{p_i} \supset M_i$.

Si $x_i \in M_i - (0)$, $A_{p_i} \supset x_i B$, donc $A_{p_i} \supset x_i S_i^{-1}B$ et, par suite, il existe un idéal premier non nul p'_i de B tel que $S_i^{-1}B \subset B_{p'_i}$, donc $A_{p_i} \subset B_{p'_i}$ et, par suite, $T_{B_{p'_i}}$ est moins fine que T_{p_i}, donc $T_{B_{p'_i}} = T_{p_i}$ (lemme 1.4), d'où

$$T = \sup_{i \in I} T_{B_{p'_i}}.$$

Désignons par X_1 l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de A, et par $\mathscr{V}_1$ l'ensemble des anneaux de valuation de hauteur 1 contenant A. Pour tout anneau de valuation V on désigne par m_V l'idéal maximal de V.

1.7. PROPOSITION. *Si A est topologiquement prüférien, alors l'application $V \to m_V \cap A$ est une bijection de $\mathscr{V}_1$ sur X_1.*

Preuve. Si $V \in \mathscr{V}_1$, montrons que $p = m_V \cap A \in X_1$. Si q est un idéal premier non nul de A contenu dans p, on a $A_p \subset A_q$. Soit W un anneau de valuation contenant A_q. On a $T_W = T_V$, V et W sont alors dépendants donc $W \subset V$, par suite $A_q \subset V$. Donc il existe un idéal premier non nul q' de A contenu dans q tel que $m_V \cap A_q = q'A_q$. On en déduit que $m_V \cap A = q'$, d'où $q' = q = p$, donc p est de hauteur 1.

Réciproquement, si $p \in X_1$, A_p est local de dimension 1, donc il est dominé par un anneau de valuation V de hauteur 1. Comme T_p est une topologie de valuation, V est l'unique anneau de valuation de hauteur 1 contenant A_p. Ceci permet de conclure.

Pour tout anneau A, posons

$$A' = \begin{cases} \bigcap_{V \in \mathscr{V}_1} V & \text{si } \mathscr{V}_1 \neq \emptyset, \\ K & \text{si } \mathscr{V}_1 = \emptyset \end{cases}$$

et notons que, lorsque A est topologiquement prüférien, $A' \neq K$ si et seulement si $X_1 \neq \emptyset$.

1.8. THÉORÈME. *Si A est topologiquement prüférien h-semi-local, et $X_1 \neq \emptyset$, alors:*

(i) *A' est un anneau de Prüfer h-semi-local de dimension* 1.

(ii) *L'application $m \to m \cap A$ est une bijection de* $\operatorname{Spect}(A') - (0)$ *sur X_1.*

(iii) *Si en plus tout idéal maximal contient un idéal premier de hauteur* 1, *alors A' coïncide avec la quasi-clôture intégrale de A.*

Preuve. Remarquons d'abord que, pour tout $x \in K^*$, il n'existe qu'un nombre fini d'anneaux de valuation $V \in \mathscr{V}_1$ tels que $x \notin V$. En effet, il existe $a, b \in A$ tels que $x = a/b$. Soient $m_1, \ldots, m_n$ les idéaux maximaux de A contenant b. Si $V \in \mathscr{V}_1$ est tel que $T_V \neq T_{m_i}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, posons $p = m_V \cap A$. On a $p \not\subset m_i$ pour tout i; sinon on aurait $T_V = T_{m_i}$. Soit m un idéal maximal contenant p. On a $m \neq m_i$ pour tout i, donc $b \notin m$, donc $b \notin p$ et, par suite, $a/b \in A_p$, d'où $x \in V$, ce qui permet de conclure.

(i) Soit p' un idéal premier non nul de A' d'après (1.5) et (1.7); il existe un unique anneau de valuation $V \in \mathscr{V}_1$ tel que $A'_{p'} \subset V$. Montrons que $A'_{p'} = V$. Soit $x \in V$ et $V_1, \ldots, V_n$ l'ensemble des anneaux de valuation de hauteur 1 ne contenant pas x. Pour tout i on a $(A'-p')^{-1} \not\subset V_i$; sinon on aurait $A'_{p'} \subset V_i$, ce qui est faux. Il existe donc $s_i \in A'-p'$ tel que $s_i^{-1} \notin V_i$; comme V_i est complètement intégralement clôs, on a

$$\bigcap_n s_i^n V_i = (0),$$

il existe donc un entier k_i tel que $x^{-1} \notin s_i^{k_i} V_i$. Posons $s = s_1^{k_1} \ldots s_n^{k_n}$. On a $sx \in V_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, par conséquent $sx \in V$ pour $V \in \mathscr{V}_1$, donc $sx \in A'$, donc $x \in A'_{p'}$. On conclut que A' est un anneau de Prüfer de dimension 1.

Montrons que A' est h-semi-local. Soit $x \in A'-(0)$. Si m' est un idéal maximal de A', $A'_{m'} \in \mathscr{V}_1$, donc $x \in m'$ équivaut à $x^{-1} \notin A'_{m'}$, et la remarque précédente permet de conclure.

(ii) résulte immédiatement de la proposition (1.7).

(iii) On voit immédiatement que la quasi-clôture intégrale de A est contenue dans A'.

Réciproquement, si $x \in A'-(0)$, il existe $a, b \in A-(0)$ tels que $x = a/b$. Soient $m_1, \ldots, m_n$ les idéaux maximaux de A contenant b et $V_1, \ldots, V_n$ les anneaux de valuation de $\mathscr{V}_1$ tels que $T_{V_i} = T_{m_i}$. Il existe $c_i \in A-(0)$ tels que $c_i V_i \subset A_{m_i}$.

Soit $c = c_1 \ldots c_n$. On a, pour tout $i = 1, \ldots, n$ et pour tout entier k, $cx^k \in A_{m_i}$. Si m est un idéal maximal de A distinct des m_i, alors $b \notin m$, donc $x = a/b \in A_m$ et, par suite, $cx^k \in A_m$ pour tout idéal maximal m, donc $cx^k \in A$, donc x est quasi-entier sur A.

2. La condition (*).

2.1. THÉORÈME. *Soient $p, q \in X_0$. Pour que T_p soit moins fine que T_q il faut et il suffit que*

$$\bigcap_{x \in p-q} xA_p \neq (0).$$

Preuve. Nécessité. Si $T_p \subset T_q$, il existe $a \in A-(0)$ tel que $A_p \supset aA_q$, donc $a/x \in A_p$ pour tout $x \in p-q$, donc $a \in \bigcap_{x \in p-q} xA_p$.

Suffisance. Soit

$$a \in \bigcap_{x \in p-q} xA_p.$$

Alors $A_p \supset aA_q$. En effet, si $y = aa/s \in aA_q$ avec $a \in A$, $s \in A-q$, on a

$$\bigcap_{x \in p-q} xA_p \subset sA_p,$$

donc il existe $\beta \in A_p$ tel que $a = \beta s$, d'où $y = a\beta \in A_p$.

2.2. COROLLAIRE. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *L'application* π: $X_0 \to \mathscr{T}(A)$ $(p \mapsto T_p)$ *est injective.*

(b) *Pour tout* p, $q \in X_0$, $p \neq q$, *on a*

$$\bigcap_{x \in p-q} xA_p = (0) \quad \textit{ou} \quad \bigcap_{x \in q-p} xA_q = (0).$$

2.3. COROLLAIRE. *On suppose que* A *vérifie la condition suivante:*

$(*)$ *Pour tout* $p \in X_0$ *et tout* $x \in p$,

$$\bigcap_n x^n A_p = (0).$$

Alors, pour tout $p, q \in X_0$ *tels que* $T_p \subset T_q$, *on a* $p \subset q$. *En particulier, l'application* π *est injective.*

2.4. Exemples d'anneaux vérifiant la condition $(*)$:

(1) Les anneaux noethériens et, plus généralement, les anneaux localement noethériens et les anneaux fortement laskériens ([1], chapitre 4, exercices 28 et 29).

(2) Les anneaux A tels que A_p soit complètement intégralement clos pour tout $p \in X_0$ (tels sont les anneaux de Krull et, plus généralement, les anneaux de caractère fini et de type réel).

(3) Les anneaux de dimension 1 (en effet, si A est de dimension 1, alors, pour tout $p \in X_0$, A_p est dominé par un anneau de valuation de hauteur 1, ce dernier étant complètement intégralement clos).

Remarque. Si S est une partie multiplicative de A et si A vérifie la condition $(*)$, alors $S^{-1}A$ la vérifie aussi.

Rappelons que pour toute partie multiplicative S de A il existe une partie multiplicative saturée S^* de A telle que $S^{-1}A = S^{*-1}A$ ([1], chapitre 2, § 2, exercice 1).

La topologie $T_{S^{-1}A}$ (resp. $T^{S^{-1}A}$ ([6], proposition 0.6)) sera notée T_S (resp. T^S).

Notons que si $S = \bigcap_{i=1}^{n} (A-p_i)$ $(p_i \in X_0)$, alors

$$T_S = \sup_i T_{p_i}.$$

2.5. THÉORÈME. *On suppose que A vérifie la condition $(*)$. Soient S et S' deux parties multiplicatives de A. Si $T_S \subset T_{S'}$ ou $T^S \subset T^{S'}$, alors $S'^* \subset S^*$.*

Preuve. Montrons que si $T^S \subset T^{S'}$, alors $S'^* \subset S^*$. On se ramène aussitôt au cas où S et S' sont saturées.

Supposons que $S' \not\subset S$ et $s' \in S' - S$. Si

$$S = \bigcap_{i \in I} (A - p_i) \qquad (p_i \in X_0);$$

il existe $i \in I$ tel que $s' \in p_i$. Comme $S^{-1}A/(1 + s'S^{-1}A)$ est ouvert pour T^S, il est aussi ouvert pour $T^{S'}$ et, a fortiori, pour $T_{S'}$. Donc il existe $x \in A - (0)$ tel que

$$S^{-1}A/(1 + s'S^{-1}A) \supset xS'^{-1}A,$$

ainsi $x/s'^n \in S^{-1}A/(1 + s'S^{-1}A) \subset A_{p_i}$, donc

$$x \in \bigcap_n s'^n A_{p_i}$$

contrairement au fait que A vérifie la condition $(*)$.

La deuxième partie de l'assertion se démontre d'une manière analogue.

2.6. COROLLAIRE. *On suppose que A vérifie la condition $(*)$. Soient $(p_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de X_0 et $S = \bigcap_{i \in I} (A - p_i)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $T_S = \sup_i T_{p_i}$.

(b) $\sup_i T_{p_i}$ *est localement bornée.*

(c) *Il existe des éléments $(q_j)_{j=1,\dots,n}$ maximaux parmi les p_i, tels que chaque p_i soit contenu dans l'un des q_j.*

Preuve. (a) $\Rightarrow$ (b) et (c) $\Rightarrow$ (a) étant évidentes, montrons que (b) $\Rightarrow$ (c). En effet, il existe une partie finie J de I telle que

$$\sup_{i \in J} T_{p_i} = \sup_{i \in I} T_{p_i}$$

([2], exercice 20), donc, si $k \in I - J$,

$$\bigcup_{i \in J} p_i = \Big(\bigcup_{i \in J} p_i\Big) \cup p_k$$

(théorème 2.5), donc p_k est contenu dans l'un des p_i pour $i \in J$, ce qui permet de conclure.

2.7. COROLLAIRE. *Soit A un anneau vérifiant la condition $(*)$. Si A possède la propriété de la borne supérieure, alors, pour toute famille $(p_i)_{i \in I}$ d'idéaux premiers tels que $\bigcap_{i \in I} p_i \neq (0)$, il existe $q_1, \dots, q_n \in X_0$ tels que*

(i)
$$\bigcup_{i \in I} p_i = \bigcup_{j=1}^{n} q_j.$$

En particulier, A est h-semi-local.

Preuve. Posons

$$S = \bigcap_{i \in I} (A - p_i);$$

$T_S \in \mathscr{T}(A)$, car $\mathrm{Rad}(S^{-1}A) \neq (0)$. Comme T_S est localement bornée, il existe $q_1, \dots, q_n \in X_0$ tels que $T_S = \sup(T_{q_1}, \dots, T_{q_n})$ ([2], exercice 20). Or $\sup(T_{q_1}, \dots, T_{q_n})$ coïncide avec $T_{S'}$, où $S' = \bigcap_{i=1}^{n} (A - q_i)$, donc $S = S'$ (théorème 2.5), d'où (i). Ainsi, pour tout $i \in I$, p_i est contenu dans l'un des q_j. Donc, si les p_i étaient tous maximaux, ils seraient en nombre fini.

2.8. LEMME. *Soit A un anneau de dimension 1. On suppose que pour tout $T \in \mathscr{T}(A)$ il existe une topologie p-adique T_p moins fine que T. Alors A est topologiquement prüférien.*

Preuve. Soit $p \in X_0$. Il existe un anneau de valuation V contenant A_p et, par hypothèse, il existe $q \in X_0$ tel que $T_q \subset T_V$. Ainsi, comme A vérifie la condition (*), on a $T_q \subset T_V \subset T_p$, et comme $q \subset p$, donc $q = p$ et par suite $T_p = T_V$.

2.9. THÉORÈME. *Soit A un anneau de dimension 1. Il est équivalent de dire:*

(a) *A possède la propriété de la borne supérieure.*

(b) *A est topologiquement prüférien h-semi-local.*

Preuve. (a) $\Rightarrow$ (b) résulte du lemme précédent et du corollaire 2.7. (b) $\Rightarrow$ (a) résulte du théorème 1.3.

2.10. THÉORÈME. *Soit A un anneau de dimension 1. Si A possède la propriété de la borne supérieure, alors tout sur-anneau de A contenu dans K la possède.*

Le théorème résulte des théorèmes 2.9 et 1.6.

Avec les notations du théorème 1.8, nous avons comme corollaire des théorèmes 2.9 et 1.8 le résultat suivant:

2.11. THÉORÈME. *Soit A un anneau de dimension 1. Si A possède la propriété de la borne supérieure, alors*

(i) *A' est un anneau de Prüfer h-semi-local de dimension 1;*

(ii) *l'application $m' \to m' \cap A$ est une bijection de* $\mathrm{Spect}(A')$ *sur* $\mathrm{Spect}(A)$;

(iii) *A' coïncide avec la quasi-clôture intégrale de A.*

Nous allons maintenant aborder le cas des anneaux noethériens.

2.12. THÉORÈME. *Pour qu'un anneau noethérien A possède la propriété de la borne supérieure il faut et il suffit qu'il soit topologiquement prüférien.*

Preuve. Nécessité. Pour tout $p \in X_0$, il existe un anneau de valuation discrète V qui domine A_p (voir [4]). A possède la propriété de la borne supérieure, donc il existe $q \in X_0$ tel que $T_q \subset T_V$ (nous avons en effet $T_q = T_V$ (lemme 1.4)). Soit W un anneau de valuation discrète dominant A_q. Nous avons $T_W \subset T_q = T_V$, donc $W = V$ ([1], chapitre 6, § 7, proposition 3). V domine à la fois A_p et A_q, donc $p = q$ et $T_p = T_V$, c.q.f.d.

Suffisance. A est de dimension 1 en vertu de la condition (*) et du lemme 1.4. Il en résulte que A est h-semi-local et on conclut à l'aide du théorème 1.3.

2.13. Remarques.

1. *Pour un anneau noethérien A il est équivalent de dire:*

(a) *A est topologiquement prüférien.*

(b) *A est de dimension 1 et, pour tout $p \in X_0$, A_p est de Mori unibranche.*

Preuve. (a) $\Rightarrow$ (b). $\dim A = 1$ en vertu de la condition (*) et du lemme 1.4. Soient $p \in X_0$ et B la clôture intégrale de A_p. Si $q \neq (0)$ est un idéal premier quelconque de B, $T_{B_q} \subset T_p$, donc $T_{B_q} = T_p$. D'une part, il existe $x \in K^*$ tel que $xB_q \subset A_p$ et ceci montre que A_p est de Mori. D'autre part, B est un anneau de Krull, donc il vérifie la condition (*), donc il est local.

(b) $\Rightarrow$ (a) vient du fait que la clôture intégrale B de A_p est un anneau de valuation discrète tel que $T_B = T_p$.

Nous rejoignons ainsi la caractérisation des anneaux noethériens possédant la propriété de la borne supérieure donnée par [6]:

2. *Si un anneau localement noethérien possède la propriété de la borne supérieure, alors il est noethérien* (*topologiquement prüférien*).

Ceci résulte immédiatement du corollaire 2.7 et de [7], Appendice, lemme de l'exemple 1.

2.14. Théorème. *Soient A un anneau noethérien de dimension* 1 *et A' sa clôture intégrale. Si A est de Mori, alors tout $T \in \mathscr{T}(A)$ est borne supérieure d'une famille de topologies p'-adiques, où $p' \in$* Spect(A').

Preuve. Soit $T \in \mathscr{T}(A)$. Les $A'M$, où M parcourt l'ensemble des sous-A-modules ouverts pour T, forment encore un système fondamental de voisinages de zéro pour T. En effet A' est un A-module de type fini, donc il existe $d \in A-(0)$ tel que $dA' \subset A$. Si N est un sous-A-module ouvert pour T, dN est ouvert pour T et nous avons $dN \subset A'dN \subset N$. Donc T est A'-linéaire, or A' est un anneau de Dedekind, donc le théorème 1.3 permet de conclure.

Question. Quels sont les anneaux de Krull qui possèdent la propriété de la borne supérieure? (**P 1259**)

TRAVAUX CITÉS

[1] N. Bourbaki, *Eléments de mathématique*, Livre 2: *Algèbre*, Paris 1959.

[2] — *Eléments de mathématique*, Livre 3: *Topologie générale*, § 6, Paris 1960-1961.

[3] E. Correl, *Topologies on quotient fields*, Duke Mathematical Journal 35 (1968), p. 175-178.

[4] A. Grothendieck et J. A. Dieudonné, *Eléments de géométrie algébrique. I*, Springer Verlag, 1971.

[5] J. Heine and S. Warner, *Ring topologies on the quotient field of a Dedekind domain*, Duke Mathematical Journal 40 (1973), p. 473-486.

[6] A. Jebli, *Corps des fractions et topologies linéaires*, Thèse, Rennes 1975.

[7] M. Nagata, *Local rings*, New York 1962.

[8] W. Więsław, *On topological fields*, Colloquium Mathematicum 29 (1974), p. 119-146.

UNIVERSITÉ MOHAMMED V
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
RABAT

Reçu par la Rédaction le 1. 3. 1979