ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XL (1983)

Sur le prolongement de la solution de l'équation de translation

par ZENON MOSZNER (Cracovie)

Résumé. On donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution de l'équation de translation (1) sur un demi-groupe des éléments non négatifs d'un groupe archimédien soit prolongeable sur ce groupe tout entier.

Le but de cette note est de démontrer le

THÉORÈME. *Soit $\mathscr{G}$ un groupe archimédien, $\mathscr{G}^+$ le demi-groupe ses éléments non négatifs et Γ un ensemble arbitraire. Utilisons dans $\mathscr{G}$ la notation additive et remarquons que $\mathscr{G}$, étant archimédien, est abélien. Une solution $F^+\colon \Gamma\times\mathscr{G}^+\to\Gamma$ de l'équation de translation*

$$F^+(F^+(\alpha, x), y) = F^+(\alpha, x+y) \tag{1}$$

est prolongeable à la solution $F\colon \Gamma\times\mathscr{G}\to\Gamma$ de cette équation si et seulement si

(A) *pour α arbitrairement fixé dans Γ l'ensemble*

$$E_\alpha(\beta) = \{x\in\mathscr{G}^+\colon F^+(\alpha, x) = \beta\}$$

a une puissance qui ne dépend pas de β de $F^+(\alpha, \mathscr{G}^+)$;

(B) *la relation R définie comme suit sur $F^+(\Gamma, \mathscr{G}^+)$:*

$$\alpha_1 R\alpha_2 \overset{\mathrm{df}}{=} \bigvee_{x\in\mathscr{G}^+} [F^+(\alpha_1, x) = \alpha_2 \text{ ou } F^+(\alpha_2, x) = \alpha_1] \tag{2}$$

est transitive et, de plus;

$$\bigwedge_{x\in\mathscr{G}^+} F^+(C, 0)\subset F^+(C, x), \tag{C}$$

où C désigne une classe d'équivalence arbitraire de la relation R sur l'ensemble Γ_0 de tous les α: tels que $\overline{\overline{E_\alpha(\beta)}} = 1$ (c'est-à-dire tels que $F(\alpha,\cdot)$ est une injection).

Ce prolongement est unique.

Remarquons que la relation R définie par (2) est une relation réfléxive sur $F^+(\Gamma, \mathscr{G}^+)$ tout entier. En effet pour β de $F^+(\Gamma, \mathscr{G}^+)$ on a $\beta = F^+(\alpha, x)$ et de là

$$\beta = F^+(\alpha, x) = F^+(\alpha, x+0) = F^+\big(F^+(\alpha, x), 0\big) = F^+(\beta, 0)$$

d'ou $\beta R \beta$. La relation R est évidemment symétrique.

Démonstration du théorème. Supposons que F^+ soit prolongeable à la solution F. Nous savons (voir par exemple [3]) que pour chaque α de Γ il doit exister un sous-groupe $\mathscr{G}_\alpha$ du groupe $\mathscr{G}$ tel que $F(\alpha, \cdot)$ est stable sur chaque classe d'équivalence C de l'ensemble $\mathscr{G}/\mathscr{G}_\alpha$ et que les valeurs de $F(\alpha, \cdot)$ sont différentes pour différentes classes. Puisque

$$\{x \in \mathscr{G}^+ \colon F^+(\alpha, x) = F(\alpha, x) = \beta\} = \mathscr{G}^+ \cap C \quad \text{pour } F(\alpha, C) = \beta,$$

nous obtenons ainsi la premiere partie de la conclusion.

Puisque $F^+(\alpha, x) = \beta \Leftrightarrow F(\beta, -x) = \alpha$, nous avons (B).

Passons a la démonstration de la condition (C). Cette condition a aussi la forme

$$F(C, 0) \subset F\big(F(C, 0), x\big). \tag{3}$$

On sait ([3]) que F, comme solution de l'équation de translation sur $\Gamma \times \mathscr{G}$, est de la forme

$$F(\alpha, x) = g_k^{-1}\big(g_k(F(\alpha, 0)) + x\big) \quad \text{pour } F(\alpha, 0) \in \Gamma_k, \tag{4}$$

où

1° $F(\Gamma, 0) = \bigcup_{k \in K} \Gamma_k$ est une décomposition de l'énsemble $F(\Gamma, 0)$ telle que $\bar{\Gamma}_k = \overline{\overline{\mathscr{G}/\mathscr{G}_k}}$ pour un sous-groupe $\mathscr{G}_k$ du groupe $\mathscr{G}$,

2° g_k est une bijection de Γ_k sur $\mathscr{G}/\mathscr{G}_k$.

$F(C, 0)$ est l'un des ensemble Γ_k, dons si α varie sur C, $F(\alpha, 0)$ varie sur $F(C, 0)$ et pour x fixé arbitrairement dans $\mathscr{G}$, $F(\alpha, x)$ varie sur $F(C, 0)$ d'apres (4). Il en résulte (3) et de la (C).

Supposons a présent que nos condition soient remplies. Puisque $F^+(C, x) \subset C$ pour chaque classe d'équivalence C de la relation R et pour chaque élément x de $\mathscr{G}^+$, nous pouvons considérer F^+ sur chaque ensemble $C \times \mathscr{G}^+$ séparément. Considérons les deux cas:

$$C \subset \Gamma_0, \tag{a}$$

$$C \cap \Gamma_0 = \emptyset. \tag{b}$$

Remarquons que dans le cas (a) d'aprés (C) l'équation

$$F^+(\alpha, 0) = F^+(\beta, x) \tag{5}$$

a une solution par rapport à β de $F^+(C, 0)$ pour chaque α de C et chaque x de $\mathscr{G}^+$. Cette solution est unique. En effet supposons que

$$F^+(\beta_1, x) = F^+(\beta_2, x) \quad \text{et} \quad \beta_1 \neq \beta_2.$$

Puisque $\beta_1, \beta_2 \in F^+(C, 0) \subset C$ nous avons $\beta_2 = F^+(\beta_1, y)$ ou $\beta_1 = F^+(\beta_2, y)$ pour un y de $\mathscr{G}^+$. Le cas $y = 0$ est impossible, puisque $\beta_1 = F^+(\alpha_1, 0)$ pour un α_1 de C et, par exemple,

$$\beta_2 = F^+(\beta_1, 0) = F^+\big(F^+(\alpha_1, 0), 0\big) = F^+(\alpha_1, 0) = \beta_1.$$

On a donc $y \neq 0$ et de la, comme $\beta_2 = F(\beta_1, y)$, on tire

$$F^+(\beta_1, x) = F^+(\beta_2, x) = F^+\big(F^+(\beta_1, y), x\big) = F^+(\beta_1, y+x)$$

ce qui est impossible puisque $F^+(\beta_1, \cdot)$ est une injection. Le raisonnement dans les cas $\beta_1 = F^+(\beta_2, y)$ est analogue. Nous avons ainsi démontré que $F^+(\cdot, x)$ est une injection sur $F^+(C, 0)$ pour chaque x de $\mathscr{G}^+$.

On peut donc definir la fonction F sur $C \times \mathscr{G}$ comme suit:

$$(6)\quad F(\alpha, x) = \begin{cases} F^+(\alpha, x) & \text{pour } \alpha \text{ de } C \text{ et } x \text{ de } \mathscr{G}^+, \\ \beta & \text{tel que } F^+(\beta, -x) = F^+(\alpha, 0), \beta \in F^+(C, 0), \\ & \qquad \text{pour } \alpha \text{ de } C \text{ et } x \text{ de } \mathscr{G}\backslash\mathscr{G}^+. \end{cases}$$

Nous allons démontrer que F satisfait a l'équation de translation sur $C \times \mathscr{G}$ en considérant les cas suivants (dans les autres cas F se confond avec F^+):

1° $x \in \mathscr{G}\backslash\mathscr{G}^+$, $y + x \in \mathscr{G}^+$;

2° $x \in \mathscr{G}\backslash\mathscr{G}^+$, $y \in \mathscr{G}^+$, $x + y \in \mathscr{G}\backslash\mathscr{G}^+$;

3° $x \in \mathscr{G}\backslash\mathscr{G}^+$, $y \in \mathscr{G}\backslash\mathscr{G}^+$;

4° $y \in \mathscr{G}\backslash\mathscr{G}^+$, $x + y \in \mathscr{G}^+$;

5° $y \in \mathscr{G}\backslash\mathscr{G}^+$, $x \in \mathscr{G}^+$, $x + y \in \mathscr{G}\backslash\mathscr{G}^+$.

Ad 1° ([1]). Dans ce cas il s'agit de prouver que

$$F(\beta, y) = F(\alpha, y+y).$$

Puisque $y \in \mathscr{G}^+$, cette relation est équivalente à la suivante

$$(7)\qquad F^+(\beta, y) = F^+(\alpha, x+y).$$

Puisque $\beta \in C$, on a $F^+(\beta, y) \in C$ et de là

$$F^+(\beta, y) = F^+\big(F^+(\beta, y), 0\big) \in F^+(C, 0).$$

D'après (7) $F^+(\alpha, x+y) \in F^+(C, 0)$. La fonction $F^+(\cdot, -x)$ étant une injection, (7) est donc équivalente à la relation

$$F^+\big(F^+(\beta, y), -x\big) = F^+\big(F^+(\alpha, x+y), -x\big).$$

([1]) Dans les cas 1° et 3° les raisonnements sont analogues a ceux de [2].

Mais nous avons

$$F^+(F^+(\beta, y), -x) = F^+(F^+(\beta, -x), y) = F^+(F^+(\alpha, 0), y) = F^+(\alpha, y)$$
$$= F^+(F^+(\alpha, x+y), -x),$$

donc (1) a lieu.

Ad 3°. Soit

$$F(\alpha, x) = \beta_1, \quad F(F(\alpha, x), y) = \beta_2, \quad F(\alpha, x+y) = \beta_3.$$

Il en résulte que

$$F^+(\beta_1, -x) = F^+(\alpha, 0), \quad F^+(\beta_2, -y) = F^+(\beta_1, 0),$$
$$F^+(\beta_3, -x-y) = F^+(\alpha, 0).$$

De là

$$\begin{aligned} F^+[F[F(\alpha, x), y], -x-y] &= F^+(\beta_2, -x-y) = F^+(F^+(\beta_2, -y), -x) \\ &= F^+(F^+(\beta_1, 0), -x) = F^+(\beta_1, -x) \\ &= F^+(\alpha, 0) = F^+(\beta_3, -x-y) \\ &= F^+(F(\alpha, x+y), -x-y) \end{aligned}$$

et puisque $F^+(\cdot, u)$ est une injection sur $F^+(C, 0)$ nous avons (1).

Dans les cas 2°, 4°, 5° les raisonnements sont analogues.

Remarquons que pour $x \in \mathscr{G} \setminus \mathscr{G}^+$ et α arbitraire de Γ nous avons

$$F(F(\alpha, x), -x) = F(\alpha, 0),$$

donc $F(\alpha, -x)$ doit être définie par (6). Puisque l'équation (5) a une solution unique le prolongement de F^+ à l'ensemble $C \times \mathscr{G}$ tout entier est unique.

Passons au cas (b). Remarquons que pour un α de C les ensembles $E_\alpha(\beta)$ forment, pour β variant dans $F^+(C, 0)$ et tel que $E_\alpha(\beta) \neq \emptyset$, une décomposition invariante de $\mathscr{G}^+$, c'est-à-dire:

$$\mathscr{G}^+ = \bigcup_{\beta \in F^+(C,0)} E_\alpha(\beta), \quad E_\alpha(\beta) \neq \emptyset, \quad E_\alpha(\beta_1) \cap E_\alpha(\beta_2) = \emptyset$$
$$\text{pour } \beta_1 \neq \beta_2,$$

$$\bigwedge_{\beta_1 \in F^+(C,0)} \bigwedge_{y \in \mathscr{G}^+} \bigvee_{\beta_2 \in F^+(C,0)} [E_\alpha(\beta_1) + y \subset E_\alpha(\beta_2)].$$

En effet il suffit de poser $\beta_2 = F^+(\beta_1, y)$ pour avoir la condition plus haut.

On sait ([5]) que la décomposition invariante du demi-groupe $\mathscr{G}^+$ est de la forme suivante:

(a) il existe un intervalle $[0, x_0\}$, fermé ou non à droite, qui peut être aussi vide, dont chaque élément est une composante de la décomposition considérée,

(b) les autres composantes sont les restrictions à l'ensemble $\mathcal{G}^+$ des classes d'équivalence du groupe $\mathcal{G}$ par rapoort à un sous-groupe $\mathcal{G}^*$.

Dans notre cas (b) nous avons $[0, x_0\}] = \emptyset$, donc chacune des composantes $E_\alpha(\beta)$ est de la forme (b), c'est-à-dire ce sont des restrictions des classes d'équivalence du groupe $\mathcal{G}$ par rapport à un sous-groupe $\mathcal{G}^*$ à l'ensemble $\mathcal{G}^+$ et de plus $\overline{\overline{E_\alpha(\beta)}} > 1$.

Définissions à présent la fonction F sur $C \times \mathcal{G}$ comme suit

$$F(\alpha, x) = F^+(\alpha, K \cap \mathcal{G}^+)$$

pour x de K et $K \in \mathcal{G}/\mathcal{G}^*$. La fonction F est bien définie sur $C \times \mathcal{G}$ et pour $x \in \mathcal{G}^+$ nous avons $F(\alpha, x) = F^+(\alpha, x)$, la fonction F est donc un prolongement de la fonction F^+. F satisfait à l'équation de translation sur $C \times \mathcal{G}$. En effet nous avons pour x de $K_1 \in \mathcal{G}/\mathcal{G}^*$ et y de $K_2 \in \mathcal{G}/\mathcal{G}^*$

$$\begin{aligned} F\big(F(\alpha, x), y\big) &= F^+\big(F^+(\alpha, K_1 \cap G^+), K_2 \cap G^+\big) \\ &= F^+\big(\alpha, (K_1 + K_2) \cap G^+\big) = F(\alpha, x+y). \end{aligned}$$

Puisque chaque prolongement F de F^+ doit être stable sur les classes K de $\mathcal{G}/\mathcal{G}^*$, ce prolongement est défini uniquement.

Le théorème est donc démontré.

Remarquons que la condition (C) n'est pas une conséquence de la condition (A), même si F^+ satisfait à (1). En effet si $F^+(\alpha, x) = \alpha + x$, Γ est l'ensemble des nombres non négatifs et $\mathcal{G}$ est le demi-groupe Γ avec l'addition simple, nous avons

$$\overline{\overline{E_\alpha(\beta)}} = 1, \quad C = \Gamma, \quad F^+(C, 0) = \Gamma, \quad F^+(C, x) = [x, +\infty),$$

donc la condition (C) n'a pas lieu pour $x \neq 0$.

La condition (A) ne dépend pas non plus de la condition (C). En effet, posons $\Gamma = [0, +\infty)$, $\mathcal{G}^+ = \Gamma$ avec l'addition simple, $\mathcal{G}^*$ étant le groupe des nombres rationnels et considérons la décomposition invariante

$$\mathcal{G}^+ = \{0\} \cup \Big[\bigcup_{C \in \mathcal{G}/\mathcal{G}^* \cap (0, +\infty)} C \Big]$$

et une bijection g de Γ sur cette décomposition telle que $g(0) = 0$. On vérifie facilement que la fonction

$$F^+(\alpha, x) = g^{-1}\big(g(\alpha) + x\big) \quad \text{pour } \alpha \text{ de } \Gamma \text{ et } x \text{ de } \mathcal{G}^+$$

satisfait à l'équation (1) (cela résulte aussi de [1]), la condition (A) n'est pas remplie puisque $E_0(0) = \{0\}$ et $E_0(\beta) \in \mathcal{G}/\mathcal{G}^+ \cap [0, +\infty)$ si $\beta \neq 0$, même que la condition (C) est remplie, puisqu'il n'existe pas d'élément α tel que $\overline{\overline{E_\alpha(\beta)}} = 1$ pour chaque β de Γ.

Remarquons enfin que pour un demi-groupe $\mathcal{G}^+$ arbitraire contenu dans un groupe $\mathscr{G}$ le théoreme démontré n'est plus vrai. En effet si $\mathscr{G}^+$ est un sous-groupe de $\mathscr{G}$, dans ce cas les conditions (A), (B) et (C) sont remplies pour chaque solution F^+ de l'équation (1), même on demande le plus (voir [4]) pour que F^+ soit prolongeable a la solution de (1) sur $\Gamma \times \mathscr{G}$ tout entier.

Travaux cités

[1] A. Krupińska, *Ogólne rozwiązanie równania translacji na kategorii*, Zeszyty Naukowe WSP w Rzeszowie, 2/18 (1972), p. 13–106.

[2] S. Midura, J. Tabor, *Sur les itérations avec un paramètre réel des fonctions sous-modules*, Demonstratio Math. 6 (1973), p. 271–287.

[3] Z. Moszner, *Structure de l'automate plein, réduit et inversible*, Aequationes Math. 9 (1973), p. 46–59.

[4] — *Sur le prolongement des objets géométriques transitifs*, Tensor 26 (1972), p. 239–242.

[5] — *Décompositions invariantes du demi-groupe des éléments non négatifs du groupe archimédien*, ibidem 34 (1980), p. 8–10.

Reçu par la Rédaction le 6. 9. 1977