ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
VI (1962)

E. PLESZCZYŃSKA (Warszawa)

WZÓR REKURENCYJNY DLA ILOŚCI PARTYCJI OGRANICZONYCH O RÓŻNYCH SKŁADNIKACH

W pracy [1] podano wzór rekurencyjny dla ilości partycji ograniczonych. Celem mojej pracy jest modyfikacja tego wzoru przy założeniu, że wszystkie składniki partycji są różne.

Należy więc znaleźć liczbę $r(a, n; c)$ ciągów liczb całkowitych $x_1, \ldots, x_n$ takich, że

$$\begin{cases} 0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant c, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = a, \end{cases} \tag{1}$$

przy czym a, n, c muszą spełniać warunek

$$\frac{(n-1)n}{2} \leqslant a \leqslant nc - \frac{n(n-1)}{2}. \tag{2}$$

Jest natychmiast widoczne, że (2) jest równoważne warunkowi $r(a, n, c) > 0$.

Dla a, n, c niespełniających (2) przyjmuje się $r(a, n, c) = 0$.

Zastępując warunek (4) w pracy [1] przez (2) i stosując metodę dowodu tam przedstawioną, można wyprowadzić następujący wzór rekurencyjny na $r(a, n; c)$:

$$r(a, n; c) = \tag{3}$$
$$= \sum_{i=A}^{B} \sum_{k=C}^{D} r(k, s-1; i-1) r[a-k-(n-s+1)i-n+s, n-s; c-i-1]$$

z warunkiem początkowym:

$$r(a, 1; c) = 1 \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant a \leqslant c,$$

gdzie s — dowolna liczba naturalna z przedziału $(1, n)$,

$$A = \max\left(\left[\frac{a-(s+c)(n-s)}{s} + \frac{n(n-1)-1}{2s} + 1\right], s-1\right),$$

$$B = \min\left(\left[\frac{2a-(s-2)(s-1)}{2(n-s+1)} - \frac{n-s}{2}\right], c-n+s\right),$$

$$C = \max\left(\frac{(s-2)(s-1)}{2}, a-i-(n-s)c+\frac{(n-s)(n-s-1)}{2}\right),$$

$$D = \min\left(\frac{(s-1)(2i-s)}{2}, a-\frac{(n-s+1)(2i+n-s)}{2}\right).$$

Wzór (3) jest odpowiednikiem wzoru (10) w [1].

Łatwo sprawdzić, że wzór (3) pozostaje prawdziwy dla $s = 1$ i $s = n$, jeśli tylko określić dodatkowo

$$r(a, 0; c) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad a = 0, \\ 0 & \text{dla} \quad a \neq 0. \end{cases}$$

Wyprowadzony wzór (3) znalazł zastosowanie przy statystycznej analizie gry liczbowej „Łuczniczka", a mianowicie przy badaniu rozkładu sumy wylosowanych liczb.

W „Łuczniczce" gracze skreślają 6 liczb spośród kolejnych liczb naturalnych od 1 do 36. Mgr Edmund Józefowicz z Torunia postawił pytanie: Ile jest układów po 6 różnych liczb naturalnych z przedziału $\langle 1, 36\rangle$, których suma wynosi P. Otóż, zgodnie z definicją $r(a, n; c)$, układów takich jest $r(P-6, 6; 35)$. Obliczenia przeprowadzone według wzoru (3) dla $P = 111$ dały wynik $r(105, 6; 35) = 32141$. Z warunku (2) otrzymujemy, że $21 \leqslant P \leqslant 201$, a więc liczba 111 jest środkiem przedziału możliwych wartości P. Okazuje się, że dla tej wartości szukana liczba układów osiąga kres górny.

Dalsze opracowanie statystyczne gry „Łuczniczka" prowadził mgr Józefowicz i nie jest ono przedmiotem niniejszej notatki.

Praca cytowana

[1] S. Zubrzycki, *Wzór rekurencyjny dla ilości partycji ograniczonych*, Zastosowania Matematyki 6 (1962), str. 231 - 234.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca wpłynęła 30. 5. 1961

Е. ПЛЕЩИНСКАЯ (Варшава)

РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА НА КОЛИЧЕСТВО ОГРАНИЧЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, СЛАГАЕМЫЕ КОТОРЫХ РАЗЛИЧНЫ

РЕЗЮМЕ

Выведена рекуррентная формула (3) на количество ограниченных распределений с различными слагаемыми, определёнными, как число последовательностей целых чисел $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяющих условиям (1).

E. PLESZCZYŃSKA (Warszawa)

RECURRENCE FORMULA FOR THE NUMBER OF LIMITED PARTITIONS WITH DIFFERENT COMPONENTS

SUMMARY

The author derives a recurrence formula (3) for the number of limited partitions with different components defined as the number of sequences of integers $x_1, \ldots, x_n$ satisfying conditions (1).
