ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXIX (1974)

Sur l'équivalence asymptotique de l'équation non perturbée et l'équation perturbée dans le cas des équations différentielles à paramètre retardé

par Z. Mikołajska (Kraków)

Résumé. Dans la présente note nous avons donné une condition sufficante pour l'éxistence, pour chaque solution $x(t)$ du système d'équations différentielles à paramètre retardé

$$x'(t) = f(t, x_t(\theta)) + r(t, x_t(\theta)), \tag{1}$$

d'une solution $y(t)$ du système

$$y'(t) = f((t, x(\theta)) \tag{2}$$

telle que

$$\|x(t) - y(t)\| \to 0 \quad \text{pour } t \to \infty. \tag{3}$$

La condition obtenue est démontrée à l'aide de la méthode topologique de T. Ważewski. La méthode en question consiste à construire un tube $\omega\{\|x - x(t)\| \leqslant \varrho(t)\}$ tel que chaque solution de l'équation (2) appartenant au tube pour $-h \leqslant t \leqslant t_0$ et telle que $y(t_0)$ appartient à la frontière de ω, sorte de ω pour $t > t_0$. Nous envisageons une famille F de solutions $y(t, x_0)$ telle que pour chaque x_0 appartenant à la boule $K\{\|x - x_0\| \leqslant \varrho(0)\}$, tel qu'il existe un point de sortie $P(x_0)$, $P(x_0)$ est continue (par rapport à x_0). Dans le cas envisagé l'hypothèse que pour chaque point $x_0 \epsilon K$ il existe un $P(x_0)$ implique que la sphère $\|x - x_0\| = \varrho(0)$ est un rétracte de la boule K. Mais cela n'a pas lieu et par suite il existe au moins un point x_0 tel que $y(t, x_0)$ parcourt dans ω pour tout $t \geqslant -h$. Dans le cas où $\varrho(t) \to 0$ il existe au moins une solution $y(t)$ satisfaisant à (3). Le théorème 2 donne une condition suffisante pour l'existence de la fonction $\varrho(t)$ dont l'existence est supposée dans le théorème 1. Le théorème 3 donne la condition suffisante à laquelle doit satisfaire le système (2) pour l'existence d'une perturbation $r(t, x_t(\theta))$ telle que soit satisfaite la condition du théorème 2. Nous obtenons ensuite certaines évaluations de la perturbation $r(t, x_t(\theta))$.

Dans la note [1] Kenneth L. Cooke a démontré une condition suffisante pour l'existence, pour chaque solution $u(t)$ de l'équation linéaire

$$u'(t) = L(u_t), \tag{0.1}$$

d'une solution $x(t)$ de l'équation perturbée

$$x'(t) = L(x_t) + F(t, x_t) \tag{0.2}$$

telle que

$$\|x(t)-u(t)\| \to 0 \quad \text{pour } t \to \infty,$$

où $x_t = x(t+\theta)$, $-h \leqslant \theta \leqslant 0$, $L(x_t)$ linéaire, $F(t, \Phi)$ continue

$$\|F(t, \Phi)\| \leqslant \|\Phi\|_1 \gamma(t),$$

les $\Phi(\theta)$ satisfaisant à la condition de Lipschitz (avec la constante k).

Dans la présente note nous démontrons une autre condition qui peut être appliquée dans le cas des équations non linéaires. La méthode employée ici est la méthode topologique de T. Ważewski [3]. La même méthode a été utilisée par S. Łojasiewicz [2] dans le cas des équations

$$y'(t) = Ay(t) \quad \text{et} \quad x'(t) = Ax(t)+f\big(x(t)\big)x(t).$$

§ 1. Envisageons deux systèmes d'équations différentielles à paramètre retardé

$$x'(t) = f\big(t, x_t(\theta)\big)+r\big(t, x_t(\theta)\big) \tag{1.1}$$

et

$$y'(t) = f\big(t, y_t(\theta)\big) \tag{1.2}$$

où $x = x_1, \ldots, x_n$, $f = f_1, \ldots, f_n$, $r = r_1, \ldots, r_n$, $f(t, \Phi)$ et $r(t, \Phi)$ sont des fonctions définies pour $t \geqslant 0$, $\Phi \in C$, C étant, ensemble des fonctions continues dans $[-h, 0]$, à valeurs dans R^n, $\Phi(\theta) \in R^n$ et avec la norme

$$\|\Phi\|_h = \sup_{-h \leqslant \theta \leqslant 0} \|\Phi(\theta)\|, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Admettons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES H_1. 1° *$f(t, \Phi)$ et $r(t, \Phi)$ sont continues pour $t \geqslant 0$, $\Phi \in C$.*

2° *La solution $y\big(t; \varphi(\cdot)\big)$ de l'équation* (1.2) *satisfaisant à la condition initiale $y\big(t; \varphi(\cdot)\big) = \varphi(t)$ pour $-h \leqslant t \leqslant 0$, dépend d'une façon continue de la condition initiale $\varphi(\cdot)$.*

3° *Pour chaque solution $x(t)$ de l'équation* (1.1) *il existe une fonction $\varrho(t) > 0$ telle que*

$$\varrho'(t) \leqslant 0, \tag{1.3}$$

$$\varrho(t) \to 0 \quad \textit{pour } t \to \infty. \tag{1.4}$$

Pour chaque $t \geqslant 0$ et chaque y satisfaisant à la condition

$$\|x(t)-y\| = \varrho(t)$$

et chaque fonction $\sigma_t(\theta)$ continue, telle que

$$\|\sigma_t(\theta)\| \leqslant \varrho_t(\theta) = \varrho(t+\theta) \quad \textit{pour } -h \leqslant \theta \leqslant 0,$$

on a

$$(1.5)\qquad \frac{\big(x(t)-y\big)}{\varrho(t)}\cdot\Big(f\big(t,x_t(\theta)\big)-f\big(t,x_t(\theta)+\sigma_t(\theta)\big)\Big)+ \\ +\frac{\big(x(t)-y\big)}{\varrho(t)}\cdot r\big(t,x_t(\theta)\big)-\varrho'(t)>0.$$

THÉORÈME 1. *Les hypothèses* H_1 *étant vérifiées, pour chaque solution* $x(t)$ *de l'équation* (1.1) *il existe au moins une solution* $x(t)$ *de l'équation* (1.2) *telle que*

$$(1.6)\qquad \|x(t)-y(t)\|\leqslant\varrho(t)\quad \textit{pour } t\geqslant 0$$

et par suite

$$(1.7)\qquad \|x(t)-y(t)\|\to 0\quad \textit{pour } t\to\infty.$$

Démonstration. Envisageons la boule

$$(\mathrm{K})\qquad \|p\|\leqslant\varrho(0)$$

dans l'espace R^n. Posons par définition

$$(1.8)\qquad \sigma_0(\theta,p)=p\quad \text{pour } -h\leqslant\theta\leqslant 0,\ \|p\|\leqslant\varrho(0).$$

À chaque $p_0\in K$ appartient ainsi une fonction $\sigma_0(\theta)=\sigma_0(\theta,p)$, et par suite une solution $y(t,p)$ de l'équation (1.2) telle que $y(t,p)=x(t)+\sigma_0(t)$ pour $-h\leqslant t\leqslant 0$.

La solution $y(t,p)$ dépend de p d'une façon continue. Nous allons démontrer qu'il existe un point $\bar p\in K$ tel que la solution $y(t,\bar p)$ appartient pour $t\geqslant -h$ à l'ensemble ω suivant

$$(\omega)\qquad t\geqslant -h,\quad \|y-x(t)\|\leqslant\varrho(t).$$

Pour la démonstration nous utiliserons la méthode topologique de T. Ważewski. De l'hypothèse (1.5) il vient que pour chaque point $Q\in$ frontière de ω, $Q=\big(t_0,x(t_0)+\sigma^*\big)$ dans le cas où il existe $p^*\in K$ tel que

$$\big(t,y(t,p^*)\big)\in\omega\quad \text{pour } -h\leqslant t\leqslant t_0,$$

$$\big(t_0,y(t_0,p^*)\big)=Q\in \text{fr. }\omega,$$

on a

$$\big(t,y(t,p^*)\big) \text{ n'appartient pas à } \omega \text{ pour } t\in(t_0,t_0+\varepsilon)\quad (\varepsilon>0).$$

Pour le voir il suffit de poser

$$z(t)=\|x(t)-y(t,p^*)\|-\varrho(t).$$

On obtient

$$z'(t) = \frac{x(t)-y(t,p^*)}{\|x(t)-y(t,p^*)\|}\cdot f\big(t, x_t(\theta)\big) - f\big(t, y_t(t,p^*)\big) +$$

$$+\frac{x(t)-y(t,p^*)}{\|x(t)-y(t,p^*)\|}\cdot r\big(t, x_t(\theta)\big) - \varrho'(t) \qquad \text{pour } t \text{ tel que } z(t) \neq 0.$$

Au point t_0 tel que $z(t_0) = 0$, $\|\sigma^*_{t_0}(\theta)\| = \|y_{t_0}(\theta, p^*) - x_{t_0}(\theta)\| \leqslant \varrho_{t_0}(\theta)$ et par suite

$$z'(t_0) > 0, \qquad z(t_0) = 0$$

d'où il vient

$$z(t) > 0 \qquad \text{pour } t_0 < t \leqslant t_0 + \varepsilon,$$

$$z(t) < 0 \qquad \text{pour } t_0 - \varepsilon \leqslant t < t_0.$$

Désignons par $C(P)$ le premier point où l'intégrale $y(t,p)$ rencontre la frontière de ω, c'est-à-dire

$$C(p) = \big(t_p, y(t_p, p)\big)$$

où

$$t_p = \min\big(t \geqslant 0 \mid \big(t, y(t,p)\big) \in \text{fr.}\, \omega\big).$$

Il est évident que pour chaque $p \in \text{fr.}\, K$ on a $C(p) = p$. L'hypothèse qu'il n'existe pas de point $p \in K$ tel que $\big(t, y(t,p)\big) \in \omega$ pour tout $t \geqslant 0$ implique l'existence de $C(p)$ pour chaque $p \in K$. Introduisons la transformation $T(Q)$ pour $Q \in \text{fr.}\, \omega$, $t \geqslant 0$, $Q = \big(\tau, x(\tau) + \sigma_Q\big)$ de la façon suivante:

$$T(Q) = \frac{\varrho(0)}{\varrho(\tau)}\sigma_Q \qquad \text{pour } \tau \geqslant 0.$$

On a

$$\|T(Q)\| = \varrho(0)$$

pour chaque $Q \in \text{fr.}\, \omega$ et par suite $T(Q) \in \text{fr.}\, K$ pour $Q \in \text{fr.}\, \omega$. La transformation $T(Q)$ est continume pour chaque $Q \in \text{fr.}\, \omega$. La transformation composée $T\big(C(p)\big)$ est donc définie et continue pour chaque $p \in K$ et

$$T\big(C(P)\big) = T(p) = p \qquad \text{pour } p \in \text{fr.}\, K,$$

et par suite $T\big(C(p)\big)$ effectue la rétraction de K sur la frontière de K, ce qui est impossible. Le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

Remarque 1. Dans la démonstration du théorème 1 on ne peut pas utiliser le théorème de T. Ważewski, car le théorème en question est démontrée dans le cas des équations différentielles sans retardement. Dans le cas des équations à paramètre retardé les points de la frontière de ω

ne puvent être envisagés comme points de sortie ou d'entrée par rapport à l'ensemble ω (dans le sens introduit par T. Ważewski), car par chaque point de la frontière de ω il passe plusieurs intégrales de l'équation (1.2). Il peut arriver que par le point Q passent des intégrales qui sortent de ω et des intégrales qui entrent dans ω par le point Q. Mais dans le cas envisagé nous nous occupons exclusivement d'intégrales qui sortent de ω, c'est-à-dire le cas envisagé est analogue à celui où tous les points de la frontière de ω son des points de sortie stricte (cf. la note de T. Ważewski).

Remarque 2. De la démonstration du théorème 1 on peut facilement voir qu'en général il existe plusieurs intégrales $y(t)$ qui parcourent dans ω pour $t \geqslant 0$, car au lieu de la fonction $\gamma_0(t, p) = p$ on peut prendre une fonction $\sigma(t, p)$ quelconque, continue et telle que

$$\|\sigma(t, p)\| \leqslant \varrho(t) \quad \text{pour} \ -h \leqslant t \leqslant 0,$$

$$\sigma(0, p) = p \quad \text{pour} \ \|p\| \leqslant \varrho(0).$$

Pour chaque telle fonction il existe au moins un point $p_\sigma \in K$ tel que la solution $y\big(t, \sigma(\theta, p_\sigma)\big)$ parcourt dans ω pour $t \geqslant 0$ (où $y\big(t, \sigma(\theta, p_\sigma)\big)$ est la solution de (1.2) telle que $y\big(t, \sigma(\theta, p_\sigma)\big) = x(t) + \sigma(t, p_\sigma)$ pour $t \in [-h, 0]$).

§ 2. Dans le cas où la fonction $f\big(t, x_t(\theta)\big)$ satisfait à la condition de Lipschitz on peut facilement établir une condition suffisante pour l'existence de la fonction $\varrho(t)$ satisfaisant à la condition (1.3), (1.4) et (1.5). On obtient par exemple la condition suivante:

HYPOTHÈSE H_2. *Il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\big\|f\big(t, \Phi(\theta)\big) - f\big(t, \Psi(\theta)\big)\big\| \leqslant M \|\Phi(\theta) - \Psi(\theta)\|_h \tag{2.1}$$

(cf. la définition de $\|\Phi\|_h$ et $\|x\|$ au § 1)

$$hM < e^{-1}. \tag{2.2}$$

Posons

$$a_0 = \frac{1}{h} \ln \frac{1}{Mh} \tag{2.3}$$

et supposons que pour chaque solution $x(t)$ *de l'équation* (1.1) *il existe une fonction continue* $R_x(t)$ *telle que*

$$\big\|r\big(t, x_t(\theta)\big)\big\| < R_x(t) \quad \textit{pour} \ t \geqslant 0 \tag{2.4}$$

et

$$\int_0^\infty e^{a_0 \tau} R_x(\tau)\, d\tau < \infty. \tag{2.5}$$

THÉORÈME 2. *Les hypothèses* H_2 *étant vérifiées, pour chaque solution* $x(t)$ *de l'équation* (1.1) *il existe une fonction* $\varrho(t)$ *de classe* C^1 *telle que*

$$\varrho(t) > 0, \quad \varrho'(t) \leqslant 0, \quad \varrho(t) \to 0 \quad \textit{pour } t \to \infty$$

et $\varrho(t)$ *satisfait à* (1.5).

Démonstration. Considérons une solution $x(t)$ de l'équation (1.1) (quelconque) et la fonction $R_x(t)$. De l'hypothèse (2.5) il vient qu'il existe une constante $k_0 > 0$ telle que

$$\int_0^t e^{a_0 s} R_x(s)\,ds < k_0 \quad \text{pour } t \geqslant 0. \tag{2.6}$$

Posons par définition

$$\varrho(t) = \Big(k_0 - \int_0^t e^{a_0 s} R_x(s)\,ds\Big) e^{-a_0 t} = k(t) e^{-a_0 t} \quad \text{pour } t \geqslant 0, \tag{2.7}$$

on a donc

$$\varrho'(t) = -a_0 k(t) e^{-a_0 t} - R_x(t). \tag{2.8}$$

Pour $\|x-y\| = \varrho(t)$, $\|\sigma_t(\theta)\| \leqslant \varrho_t(\theta)$ nous avons

$$\begin{aligned} V(x, y, t; \sigma) &= \frac{x-y}{\varrho(t)} f\big(t, x_t(\theta)\big) - f\big(t, x_t(\theta) + \sigma_t(\theta)\big) + \frac{x-y}{\varrho(t)} r\big(t, x_t(\theta)\big) - \varrho'(t) \\ &\geqslant -\frac{\|x-y\|}{\varrho(t)} M \|\sigma_t(\theta)\|_h - \frac{\|x-y\|}{\varrho(t)} \big\|r\big(t, x_t(\theta)\big)\big\| - \varrho'(t) \\ &\geqslant -M \max_{-h \leqslant \theta \leqslant 0} \varrho_t(\theta) - \big\|r\big(t, x_t(\theta)\big)\big\| - \varrho'(t), \end{aligned}$$

$\varrho(t)$ étant décroissante nous avons pour $\|x-y\| = \varrho(t)$, $\|\sigma_t(\theta)\| \leqslant \varrho_t(\theta)$,

$$\begin{aligned} V(x, y, t, \sigma) &\geqslant -M\varrho(t-h) - \big\|r\big(t, x_t(\theta)\big)\big\| - \varrho'(t) \\ &\geqslant -M\varrho(t-h) - R_x(t) - \varrho'(t) \\ &= -M\varrho(t-h) - R_x(t) + a_0 k(t) e^{-a_0 t} + R_x(t) \\ &= -Mk(t-h) e^{-a_0 t + a_0 h} + a_0 k(t) e^{-a_0 t} \\ &\geqslant e^{-a_0 t}(-Me^{a_0 h} + a_0) k(t) + Me^{a_0 h}\big(k(t) - k(t-h)\big) \\ &= e^{-a_0 t}\Big(-Me^{\ln\frac{1}{hM}} + \frac{1}{h}\ln\frac{1}{Mh}\Big) k(t) + Me^{a_0 h}\big(k(t) - k(t-h)\big) \\ &= e^{-a_0 t}\Big(-\frac{1}{h} + \frac{1}{h}\ln\frac{1}{Mh}\Big) k(t) + Me^{a_0 h}\big(k(t) - k(t-h)\big). \end{aligned}$$

De l'hypothèse (2.2) nous tirons

$$-\frac{1}{h}+\frac{1}{h}\ln\frac{1}{Mh}=s>0$$

d'où

$$V(x,y,t,\sigma)>e^{-a_0t}\big(sk(t)+Me^{a_0h}\big(k(t)-k(t-h)\big)\big). \tag{2.10}$$

De la définition de $k(t)$ (2.7) on a

$$k(t)-k(t-h) = -\int_{t-h}^{t} e^{a_0s}R_x(s)\,ds. \tag{2.11}$$

L'hypothèse (2.5) et la définition (2.4) de $R_x(t)$ entraînent qu'il existe un nombre $N>0$ tel que

$$0<\int_{t-h}^{t} e^{a_0s}R_x(s)\,ds\leqslant N \quad \text{pour } t\geqslant 0, \tag{2.12}$$

et par suite, en vertu de (2.10) et (2.11), on a

$$V(x,y,t,\sigma)\geqslant e^{-a_0t}\big(sk(t)-Me^{2a_0h}N\big).$$

Posons par définition

$$\int_0^\infty e^{a_0s}R_x(s)\,ds=\gamma<\infty.$$

On a

$$V(x,y,t,\sigma)>e^{-a_0t}\big(s(k_0-\gamma)-Me^{2a_0h}N\big)$$

$$\text{pour } \|x-y\| = \varrho(t),\ \|\sigma_t(\theta)\|\leqslant\varrho_t(\theta).$$

Dans la définition de $\varrho(t)$ (cf. (2.7)) on peut poser

$$k_0\geqslant\gamma+\frac{M}{s}e^{2a_0h}N. \tag{2.13}$$

Pour la fonction $\varrho(t)$ définie par (2.7) avec (2.13) on a

$$V(x,y,t,\sigma)>0 \quad \text{pour } \|x-y\| = \varrho(t), \quad \|\sigma(\theta)\|\leqslant\varrho_t(\theta).$$

Le théorème 2 se trouve ainsi démontré.

§ 3. Dans le cas où l'équation (1.2) est plus simple que l'équation (1.1) il est commode d'avoir pour $r(t,x_t)$ une condition suffisante pour (2.5) ne dépendant pas de l'allure des solutions de l'équation (1.1). Par exemple, dans le cas où il existe une constante a telle que pour chaque solution $y(t)$ de l'équation (1.2) il existe une constante $C>0$ telle que

$$\|y(t)\|\leqslant Ce^{at} \quad \text{pour } t\geqslant 0, \tag{3.1}$$

on peut facilement donner une condition de ce genre:

Admettons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES H_3. 1° *Il existe une constante* a *telle que pour chaque solution* $y(t)$ *de l'équation* (1.2) *il existe une constante* C *telle qu'on a* (3.1);

2° $f(t, x_t(\theta))$ *satisfait à la condition* (2.1) *avec une constante* M *telle qu'on a* (2.2);

3° *la perturbation* $r(t, x_t(\theta))$ *satisfait à l'inégalité suivante*

$$\|r(t, \Phi(\theta))\| \leqslant \tilde{r}(t)\|\Phi(\theta)\|_h \quad \text{pour } t \geqslant 0 \tag{3.2}$$

où $\tilde{r}(t)$ *est une fonction continue pour* $t \geqslant 0$;

4° *dans le cas où* $a-M > 0$ *on suppose que*

$$\int_0^\infty e^{(\alpha_0+a)s}\tilde{r}(s)\,ds < \infty \tag{3.3}$$

et dans le cas où $a-M \leqslant 0$

$$\int_0^\infty e^{(\alpha_0+M)s}\tilde{r}(s)\,ds < \infty. \tag{3.4}$$

THÉORÈME 3. *Les hypothèses* H_3 *étant vérifiées, pour chaque solution* $x(t)$ *de l'équation* (1.1) *il existe une fonction continue* $R_x(t)$ *satisfaisant à* (2.4) *et* (2.5).

Démonstration. Pour démontrer la théorème 3 évaluons la solution $x(t)$ de l'équation (1.1). On a

$$x(t) = y(t)+\big(y(t)-x(t)\big) \tag{3.5}$$

où $y(t)$ est la solution de (1.2) telle que $x(\theta) = y(\theta)$ pour $-h \leqslant \theta \leqslant 0$:

$$\begin{aligned}\|y'(t)-x'(t)\| &\leqslant M\|y_t(\theta)-x_t(\theta)\|_h+\|r(t, x_t(\theta))\| \\ &\leqslant M\|y_t(\theta)-x_t(\theta)\|+\tilde{r}(t)\|y_t(\theta)-x_t(\theta)\|_h+\tilde{r}(t)\|y_t(\theta)\|_h \\ &\leqslant \big(M+\tilde{r}(t)\big)\|y_t(\theta)-x_t(\theta)\|_h+\tilde{r}(t)C\|e^{a(t+\theta)}\|_h \\ &\leqslant \big(M+\tilde{r}(t)\big)\|y_t(\theta)-x_t(\theta)\|_h+\tilde{r}(t)\tilde{C}e^{at}\end{aligned}$$

où

$$\tilde{C} = \begin{cases} C & \text{pour } a > 0, \\ Ce^{-ah} & \text{pour } a < 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

d'où on obtient: dans le cas où $a-M>0$

$$\begin{aligned}
\|x(t)-y(t)\| &\leqslant \tilde{C}e^{Mt+\int_0^t \tilde{r}(s)ds}\Big(\int_0^t e^{(a-M)\tau-\int_0^\tau \tilde{r}(s)ds}\big(\tilde{r}(\tau)-(a-M)\big)d\tau+\int_0^t (a-M)e^{(a-M)\tau}d\tau\Big)\\
&= \tilde{C}e^{Mt+\int_0^t \tilde{r}(s)ds}\big(1-e^{(a-M)t-\int_0^t \tilde{r}(s)ds}+e^{(a-M)t}-1\big)\\
&= \tilde{C}e^{Mt+\int_0^t \tilde{r}(s)ds}e^{(a-M)t}\big(1-e^{-\int_0^t \tilde{r}(s)ds}\big)\leqslant \tilde{C}e^{at+\int_0^t \tilde{r}(s)ds} \qquad \text{pour } t\geqslant 0,
\end{aligned}$$

et par suite

$$\|x(t)\|\leqslant e^{at}\big(C+\tilde{C}^*e^{\int_0^t \tilde{r}(s)ds}\big). \tag{3.8}$$

Dans le cas où $a-M\leqslant 0$ on obtient

$$\begin{aligned}
\|x(t)-y(t)\| &\leqslant \tilde{C}e^{Mt+\int_0^t \tilde{r}(s)ds}\int_0^t \big(M-a+\tilde{r}(\tau)\big)e^{(a-M)\tau-\int_0^\tau \tilde{r}(s)ds}d\tau\\
&= \tilde{C}e^{Mt+\int_0^t \tilde{r}(s)ds}\big(1-e^{(a-M)t-\int_0^t \tilde{r}(s)ds}\big)\leqslant \hat{C}e^{Mt+\int_0^t \tilde{r}(s)ds}
\end{aligned}$$

et par suite

$$\|x(t)\|\leqslant Ce^{at}+\hat{C}e^{Mt+\int_0^t \tilde{r}(s)ds}\leqslant e^{Mt}\big(C+\hat{C}e^{\int_0^t \tilde{r}(s)ds}\big). \tag{3.9}$$

En vertu de (3.2), (3.8) et (3.9) on conclut que pour chaque solution $x(t)$ il existe une constante $C>0$ et $C^*>0$ (dans le cas $a-M>0$) ou $C>0$ et $\hat{C}>0$ (dans le cas $a-M\leqslant 0$) telle que

$$\big\|r\big(t,x_t(\theta)\big)\big\|\leqslant R_x(t)=\begin{cases}\tilde{r}(t)e^{at}\big(C+C^*e^{\int_0^t \tilde{r}(s)ds)}\big) & \text{pour } a-M>0,\\[2mm] \tilde{r}(t)e^{Mt}\big(C+\hat{C}e^{\int_0^t \tilde{r}(s)ds}\big) & \text{pour } a-M\leqslant 0.\end{cases}$$

De l'hypothèse (3.3) ou (3.4) on a $\int_0^\infty \tilde{r}(s)ds\leqslant q_0<\infty$ et par suite

$$\int_0^t e^{a_0\tau}R_x(\tau)d\tau\leqslant \gamma\int_0^t \tilde{r}(s)e^{\bar{a}s}ds$$

où

$$\gamma = \begin{cases} C+\tilde{C}e^{q_0} & \text{pour } a-M>0, \\ C+\hat{C}e^{q_0} & \text{pour } a-M\leqslant 0, \end{cases}$$

$$\bar{a} = \begin{cases} a+a_0 & \text{pour } a-M>0, \\ a_0+M & \text{pour } a-M\leqslant 0, \end{cases}$$

et par suite, en vertu de (3.3) et (3.4), on a

$$\int_0^\infty e^{a_0\tau} R_x(\tau)\,d\tau < \infty$$

pour chaque solution $x(t)$ de l'équation (1.1). Le théorème 3 se trouve ainsi démontré.

§ 4. Dans le cas où $f(t, \Phi(\theta)) = \tilde{f}(t, \Phi(0))$ on peut obtenir du théorème 1 des conditions moins restrictives que (2.5) et (2.3). Par exemple on peut remplacer la condition H_2 par l'Hypothèse H_4 suivante

HYPOTHÈSE H_4. *Il existe une fonction continue $\lambda(t)$ telle que*

$$(4.1)\qquad (x-y)[\tilde{f}(t,x)-\tilde{f}(t,y)] \leqslant \lambda(t)(x-y)^2 \quad \textit{pour } t\geqslant 0.$$

Posons par définition

$$(4.2)\qquad \tilde{\lambda}(t) = \begin{cases} \lambda(t) & \textit{pour } t \textit{ tel que } \lambda(t)>0, \\ 0 & \textit{pour } t \textit{ tel que } \lambda(t)\leqslant 0 \end{cases}$$

et supposons que

$$(4.3)\qquad \int_0^\infty e^{\int_0^\tau \tilde{\lambda}(s)ds} R_x(\tau)\,d\tau < \infty$$

où $R_x(t)$ est définie par (2.4).

THÉORÈME 4. *Les hypothèses H_4 étant vérifiées, pour chaque solution $x(t)$ de l'équation*

$$(4.4)\qquad x'(t) = \tilde{f}(t, x(t)) + r(t, x_t(\theta))$$

il existe une fonction positive $\varrho(t)>0$ satisfaisant à (1.5), (1.3) *et* (1.4) *et par suite, en vertu du théorème* 1, *il existe au moins une solution $y(t)$ de l'équation* (4.5)

$$(4.5)\qquad y(t) = \tilde{f}(t, y(t))$$

telle que

$$\|x(t)-y(t)\| \to 0 \qquad \textit{pour } t\to\infty.$$

Démonstration. Considérons l'expression

$$V(x, y, \varphi(\cdot), \varrho, t) = \frac{x-y}{\varrho}\big(\tilde{f}(t, x) - \tilde{f}(t, y)\big) + \frac{x-y}{\varrho} r(t, \varphi).$$

En vertu de (4.1) on a

$$V(x, y, \varphi(\cdot), \varrho, t) \geqslant -\lambda(t)\frac{(x-y)^2}{\varrho} - \frac{\|x-y\|}{\varrho}\big\|r(t, \varphi(\cdot))\big\|$$

d'où, pour $\|x-y\| = \varrho$, il vient

$$V(x, y, \varphi(\cdot), \varrho, t) \geqslant -\lambda(t)\varrho - \big\|r(t, \varphi(\cdot))\big\| \geqslant -\tilde{\lambda}(t)\varrho - \|r(t, \varphi)\|$$

pour $\|x-y\| = \varrho$.

Posons $x = x(t)$, où $x(t)$ est solution de l'équation (4.4) et $\varphi(\theta) = x_t(\theta) = x(t+\theta)$ pour $-h \leqslant \theta \leqslant 0$. On a, en vertu de (2.4),

$$V(x(t), y, x_t(\cdot), \varrho, t) \geqslant -\tilde{\lambda}(t)\varrho - \big\|r(t, x_t(\theta))\big\| > -\tilde{\lambda}(t) - R_x(t) \tag{4.6}$$

pour $t \geqslant 0$ et y tel que $\|x(t)-y\| = \varrho$.

De l'hypothèse (4.3) il vient qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_0^\infty e^{\int_0^\tau \tilde{\lambda}(s)ds} R_x(\tau)\,d\tau = C < \infty. \tag{4.7}$$

Posons

$$\varrho(t) = e^{-\int_0^\tau \tilde{\lambda}(s)ds}\Big\{-\int_0^t e^{\int_0^\tau \tilde{\lambda}(s)ds} R_x(t)\,d\tau + C\Big\}. \tag{4.8}$$

On a, en vertu de (4.2), (4.7) et (4.8),

$$\varrho(t) > 0, \quad \varrho(t) \to 0 \quad \text{pour } t \to \infty \quad \text{et} \quad \varrho'(t) = -\tilde{\lambda}(t)\varrho(t) - R_x(t)$$

d'où, en vertu de (4.6), on a

$$V(x(t), y, x_t(\cdot), \varrho(t), t) - \varrho'(t) > -\tilde{\lambda}(t)\varrho(t) - R_x(t) + \tilde{\lambda}(t)\varrho(t) + R_x(t) = 0$$
$$\text{pour } t,\ y \text{ telles que } \|x(t)-y\| = \varrho(t)$$

c'est-à-dire que pour $\varrho(t)$ définie par (4.8) son satisfaites (1.5), (1.3), (1.4). Le théorème 4 se trouve ainsi démontré.

§ 5. Dans le cas où

$$f(t, 0) = 0 \tag{5.1}$$

on peut déduire de (4.1) une condition suffisante pour (4.3) ne dépendant pas de $x(t)$.

HYPOTHÈSES H_5. *Supposons que* $\hat{f}(t,x)$ *satisfait à* (4.1) *et* (5.1). *Désignons par* $a(s)$ *la fonction suivante*

$$a(s) = \begin{cases} \lambda(s)+\tilde{r}(s) & \text{pour } s \text{ tel que } \lambda(s)+\tilde{r}(s) > 0, \\ 0 & \text{pour } s \text{ tel que } \lambda(s)+\tilde{r}(s) \leqslant 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

où $\tilde{r}(t)$ *est une fonction continue telle que*

$$\big\|r\big(t,\Phi(\theta)\big)\big\| \leqslant \tilde{r}(t)\|\Phi(\theta)\|_h \tag{5.3}$$

supposons que

$$\int_0^\infty e^{\int_0^\tau[\tilde{\lambda}(s)+a(s)]ds}\tilde{r}(\tau)d\tau < \infty. \tag{5.4}$$

THÉORÈME 5. *Les hypothèses* H_5 *étant vérifiées, il existe une fonction* $R_x(t)$ *(pour chaque solution de* (4.4)) *telle qu'on a* (4.3).

Démonstration. De l'hypothèse (5.1) et (4.1) on obtient pour chaque solution $x(t)$ de (4.4)

$$xx' \leqslant \lambda\|x\|^2 + \big\|r\big(t,x_t(\theta)\big)\big\|\cdot\|x(t)\|$$

et par suite, en vertu de (5.3),

$$xx' \leqslant \lambda\|x\|^2 + \tilde{r}(t)\|x_t(\theta)\|_h\|x(t)\|,$$

c'est-à-dire que pour $v(t) = \frac{1}{2}x^2(t)$ on a

$$v'(t) \leqslant 2\lambda(t)v(t) + 2\tilde{r}(t)[v(t)]^{\frac{1}{2}}[\max_{-h\leqslant\theta\leqslant 0} v(t+\theta)]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.5}$$

Supposons que $\|x_0(\theta)\|_h \neq 0$. Désignons par $u_\varepsilon(t)$ la fonction suivante:

$$u_\varepsilon = \tfrac{1}{2}\|x_0(\theta)\|_h^2 e^{2\int_0^t(a(s)+\varepsilon)ds}. \tag{5.6}$$

Il est évident qu'on a

$$0 \leqslant v(t) \leqslant u_\varepsilon(0) \quad \text{pour } -h \leqslant t \leqslant 0, \tag{5.7}$$

$$u_\varepsilon'(t) = 2[a(t)+\varepsilon]u_\varepsilon(t) \quad \text{pour } t \geqslant 0. \tag{5.8}$$

Nous démonstrons que

$$0 \leqslant v(t) \leqslant u_\varepsilon(t) \quad \text{pour } t \geqslant 0. \tag{5.9}$$

Supposons qu'il existe un $t_0 \geqslant 0$ tel que

$$0 \leqslant v(t) \leqslant u_\varepsilon(t) \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant t_0 \tag{5.10}$$

et

$$v(t_0) = u_\varepsilon(t_0), \tag{5.11}$$

$$v'(t_0) \leqslant 2\lambda(t_0)u_\varepsilon(t_0) + 2\tilde{r}(t_0)[u_\varepsilon(t_0)]^{\frac{1}{2}}[\max_{-h<\theta\leqslant 0} v(t_0+\theta)]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.13}$$

Il existe un $\vartheta_0 \in [-h, 0]$ tel que

$$\max_{-h \leqslant \theta \leqslant 0} v(t_0 + \theta) = v(t_0 + \vartheta_0).$$

On a donc, en vertu de (5.10) et (5.13),

$$v'(t_0) \leqslant 2\lambda(t_0) u_\varepsilon(t_0) + 2\tilde{r}(t_0)[u_\varepsilon(t_0)]^{\frac{1}{2}}[u_\varepsilon(t_0 + \vartheta_0)]^{\frac{1}{2}}$$

d'où comme $u_\varepsilon(t)$ est croissante (cf. (5.2)) et $\tilde{r} \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned} v'(t_0) &\leqslant 2\big(\lambda(t_0) + \tilde{r}(t_0)\big) u_\varepsilon(t_0) \\ &< 2\big(a(t_0) + \varepsilon\big) u_\varepsilon(t_0), \end{aligned}$$

d'où, en vertu de (5.8), il vient

$$v'(t_0) < u'(t_0)$$

et par suite (en vertu de (5.11)):

$$v(t) < u_\varepsilon(t) \qquad \text{pour } t_0 < t \leqslant t_0 + \eta$$

c'est-à-dire l'inégalité (5.9) est valable pour tour t $(t \geqslant 0)$.

ε étant quelconque positif, on obtient en passant à la limite l'inégalité

$$v(t) \leqslant \tfrac{1}{2} \|x_0(\vartheta)\|_h e^{2\int_0^t a(s) ds} \qquad \text{pour } t \geqslant 0,$$

d'où, en vertu de (5.3), on obtient

$$\big\|r\big(t, x_t(\theta)\big)\big\| \leqslant \tilde{r}(t) \|x_0(\theta)\|_h e^{\int_0^t a(s) ds} = R_x(t).$$

L'inégalité (4.3) a donc lieu (en vertu de (5.4)). Le théorème 5 se trouve ainsi démontré.

§ 6. Remarque. Dans le cas où $\lambda(t) \leqslant 0$ pour $t \geqslant 0$, la condition (4.3) prend la forme

$$\int_0^\infty R_x(s) ds < \infty \tag{6.1}$$

et par suite, dans le cas où $r\big(t, x_t(\theta)\big)$ satisfait à (5.3), il suffit de supposer que $\tilde{r}(t)$ est telle que chaque solution $x(t)$ est bornée que

$$\int_0^\infty \tilde{r}(s) ds < \infty. \tag{6.2}$$

Références

[1] Kenneth L. Cooke, *Linear functional differential equations of asymptotically autonomous type*, J. Diff. Equations 7 (1970), p. 154–174.

[2] S. Łojasiewicz, *Sur l'allure asymptotique des intégrales d'un système d'équations différentielles au voisinage d'un point singulier*, Ann. Polon. Math. 1 (1954), p. 34–72.

[3] T. Ważewski, *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Ann. Soc. Polon. Math. 20 (1947).

Reçu par la Rédaction le 14. 7. 1972