J. WOJTOWICZ (Warszawa)

METODY SPROWADZANIA RÓWNAŃ CZWARTEGO I PIĄTEGO RZĘDU NOMOGRAFICZNEGO DO POSTACI KANONICZNEJ

Wstęp

W pracy tej podane są różniczkowe kryteria nomogramowalności funkcji $F(x, y, z)$, równania $F(x, y, z) = 0$ oraz równania $f(z) = F(x, y)$. W dowodach twierdzeń często będziemy powoływać się na twierdzenie o ciągłości i różniczkowalności wielomianów nomograficznych[1].

Jeżeli funkcja $F(x, y, z) \equiv \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y) h_i(z)$ jest w postaci zredukowanej względem wszystkich zmiennych oraz jeżeli jest ciągła w pewnym przedziale, to wszystkie funkcje $f_i(x)$, $g_i(y)$ i $h_i(z)$ są ciągłe w tym przedziale oraz jeżeli $F(x, y, z)$ jest m_1 razy różniczkowalna względem x, m_2 razy różniczkowalna względem y i m_3 razy różniczkowalna względem z, to funkcje $f_i(x)$ są różniczkowalne m_1 razy, $g_i(y)-m_2$ razy, $h_i(z)-m_3$ razy.

Funkcja $F(x, y, z) \equiv \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y) h_i(z)$ jest w postaci zredukowanej względem zmiennej x, jeżeli funkcje $A_i(y, z) \equiv g_i(y) h_i(z)$ są liniowo niezależne. Analogicznie dla innych zmiennych i dla funkcji $F(x, y)$.

I. Forma kanoniczna Cauchy'ego

§ 1. Równanie różniczkowe formy kanonicznej Cauchy'ego. Forma kanoniczna Cauchy'ego ma postać

$$g(z) + f(x) h(y) + k(y) = 0. \tag{1}$$

Oznaczmy

$$F \equiv F(x, y, z) \equiv g(z) + f(x) h(y) + k(y). \tag{2}$$

---

[1] J. Wojtowicz, *Über die korrekte Definition des Ranges eines nomographischen Polynoms und über die Stetigkeit und Differenzierbarkeit der verallgemeinerten nomographischen Polynome*, Ann. Math. Pol. 8 (1960), w druku.

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli funkcja F jest w prostopadłościanie D, określonym nierównościami $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$, $z_0 \leqslant z \leqslant z_1$, określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi aż do rzędu trzeciego włącznie oraz $F_x \neq 0$, to na to, by funkcja F miała w prostopadłościanie D postać* (2), *potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były warunki*

$$F_{xz} \equiv 0, \quad F_{yz} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 \ln|F_x|}{\partial x \partial y} \equiv 0. \tag{3}$$

Dowód konieczności. Jeżeli $k(y) \neq ah(y)$ (gdzie a jest współczynnikiem liczbowym), to na mocy definicji postaci zredukowanej funkcja $F(x, y, z)$ jest w postaci zredukowanej względem wszystkich trzech zmiennych. Jeżeli funkcja $F(x, y, z)$ jest w postaci zredukowanej i spełnia założenia twierdzenia 1, to, na podstawie twierdzenia o różniczkowalności i ciągłości wielomianów nomograficznych, funkcje $g(z)$, $h(y)$ i $k(y)$ mają pierwsze pochodne ciągłe, a funkcja $f(x)$ pierwszą i drugą pochodną ciągłą.

Jeżeli funkcja $F(x, y, z)$ nie jest w postaci zredukowanej, tj. jeżeli $k(y) \equiv ah(y)$ (a jest liczbą), to $F(x, y, z) \equiv g(z) + f(x)h(y) + ah(y)$.

Sprowadzając do postaci zredukowanej otrzymamy

$$F(x, y, z) \equiv g(z) + [f(x) + a]h(y).$$

Jednak i w tym przypadku, na podstawie twierdzenia o ciągłości i różniczkowalności wielomianów nomograficznych, $g(z)$ posiada pierwszą pochodną ciągłą, $f(x) + a$ posiada drugą pochodną ciągłą, więc także $f(x)$ oraz $h(y)$ posiada pierwszą pochodną ciągłą. Stąd ponieważ $k(y) \equiv \equiv ah(y)$, więc także $k(y)$ posiada pierwszą pochodną ciągłą.

Łatwo więc sprawdzić, że jeżeli $F(x, y, z) \equiv g(z) + f(x)h(y) + k(y)$ i spełnione są założenia twierdzenia 1, to spełnione są także warunki (3).

Dowód dostateczności. Całkując pierwsze równanie układu (3) względem x, drugie względem y otrzymujemy

$$F_z \equiv A(z, y), \tag{4}$$

$$F_z \equiv B(z, x). \tag{5}$$

Z warunków (4) i (5) wynika, że

$$A(z, y) \equiv B(z, x) \equiv A(z),$$

a stąd $F_z \equiv A(z)$. Całkując otrzymujemy

$$F \equiv \int A(z)\,dz + C(x, y). \tag{6}$$

Z istnienia odpowiednich pochodnych cząstkowych funkcji F wynika istnienie odpowiednich pochodnych cząstkowych funkcji $C(x, y)$, a z warunku $F_x \neq 0$ wynika, że $C_x \neq 0$.

Wstawiając (6) do trzeciego równania układu (3) otrzymujemy warunek na funkcję $C(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 \ln \left|\frac{\partial C(x,y)}{\partial x}\right|}{\partial x \partial y} \equiv 0.$$

Stąd wynika, że $C(x, y) \equiv h(y)f(x)+k(y)$. Oznaczając $\int A(z)dz \equiv$ $\equiv g(z)$ i wstawiając do (6) otrzymujemy (2).

§ 2. Metody sprowadzania do postaci kanonicznej. Funkcja $F(x, y, z)$ spełnia warunki (3) wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci (2) i spełnia założenia twierdzenia 1. Często jednak dane jest równanie $F(x, y, z) = 0$, którego lewa strona nie jest postaci (2). Zachodzi więc pytanie, jakie warunki musi spełniać funkcja $F(x, y, z)$, żeby można ją było sprowadzić do formy kanonicznej Cauchy'ego.

Jednym ze sposobów sprowadzenia funkcji $F(x, y, z)$ do postaci (2) jest złożenie funkcji $F(x, y, z)$ z taką funkcją $\Phi(u)$, że $\Phi[F(x, y, z)]$ ma postać (2). Funkcję $\Phi(u)$ nazywamy w takim przypadku funkcją *anamorfozującą* funkcji F. Jeżeli $\Phi(u) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u = 0$, i $\Phi(u)$ jest funkcją anamorfozującą funkcji F, to funkcja $\Phi(u)$ jest funkcją anamorfozującą równania $F = 0$.

Inną metodą sprowadzenia równania $F(x, y, z) = 0$ do postaci kanonicznej jest pomnożenie go przez funkcję $f(x, y, z)$ tak dobraną, że iloczyn fF jest postaci (2). Funkcja f nazywa się *czynnikiem anamorfozującym*.

Czynnik anamorfozujący nie może być funkcją dowolnej postaci; musi być tak dobrany, żeby równania $fF = 0$ i $F = 0$ były równoważne.

Będziemy rozpatrywać czynniki anamorfozujące zależne tylko od dwu zmiennych.

§ 3. Funkcja anamorfozująca. Udowodnimy

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli w prostopadłościanie D (określonym jak w twierdzeniu 1) funkcja $F(x, y, z)$ jest określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi aż do rzędu trzeciego włącznie oraz $F_x \cdot F_y \cdot F_z \neq 0$, a wartości funkcji $F(x, y, z)$ w prostopadłościanie D wypełniają przedział I, to na to, by w przedziale I istniała trzykrotnie różniczkowalna funkcja anamorfozująca $\Phi(u)$, sprowadzająca funkcję $F(x, y, z)$ do postaci (2), taka, że $\Phi'(u) \neq 0$, potrzeba i wystarcza, żeby w całym prostopadłościanie D speł-*

nione były warunki

$$(7)\qquad \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{F_x}{F_y}\right] \equiv 0, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\ln\left|\frac{F_x}{F_z}\right| \equiv 0, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\ln\left|\frac{F_x}{F_z}\right| \equiv 0.$$

Dowód konieczności. Załóżmy, że w przedziale I istnieje funkcja anamorfozująca $\Phi(u)$ taka, że $\Phi(F) \equiv g(z)+f(x)h(y)+k(y)$. Ponieważ $\Phi'(u) \neq 0$, więc istnieje funkcja $u = \varphi(\Phi)$ odwrotna do $\Phi(u)$. Stąd

$$F(x, y, z) \equiv \varphi[g(z)+f(x)h(y)+k(y)].$$

Obliczamy

$$F_x \equiv \varphi' f'(x)h(y), \qquad F_z \equiv \varphi' g'(z), \qquad F_y \equiv \varphi'[f(x)h'(y)+k'(y)]$$

i sprawdzamy, że funkcja $F(x, y, z)$ spełnia warunki (7).

Dowód dostateczności. Sprawdzamy, że na mocy warunków (7) zachodzi

$$(8)\qquad \frac{1}{F_x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{F_{xz}}{F_xF_z}\right] \equiv \frac{1}{F_y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{F_{xz}}{F_xF_z}\right] \equiv \frac{1}{F_z}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{F_{xz}}{F_xF_z}\right].$$

Z pierwszej tożsamości (7) po przekształceniach otrzymamy

$$(9)\qquad \frac{F_{xz}}{F_xF_z} \equiv \frac{F_{yz}}{F_yF_z}.$$

Następnie, biorąc pod uwagę pierwszą i drugą tożsamość (7), dowodzimy następującej równości:

$$(10)\qquad \frac{1}{F_x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{F_{xz}}{F_xF_z}\right] + \frac{F_{xz}F_{xy}}{F_x^2F_yF_z} - \frac{1}{F_xF_y}\cdot\frac{F_{xxy}F_x - F_{xx}F_{xy}}{F_x^2} \equiv 0.$$

Z uwagi na twierdzenie o zależności funkcyjnej ([2]) oraz na warunki (8) jest

$$\frac{F_{xz}}{F_xF_z} \equiv A\big(F(x, y, z)\big).$$

Ponieważ funkcje F, F_x, F_z i F_{xz} są ciągłe oraz $F_x \neq 0$ i $F_z \neq 0$, więc funkcja $A(u)$ jest ciągła. Zatem istnieje funkcja $\Phi(u)$ spełniająca tożsamość

$$(11)\qquad \frac{\Phi''(F)}{\Phi'(F)} \equiv -\frac{F_{xz}}{F_xF_z}.$$

Zauważmy jeszcze, że funkcja $\Phi(u)$ jest trzykrotnie różniczkowalna. Wynika to z założeń o trzykrotnej różniczkowalności funkcji $F(x, y, z)$.

([2]) Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления,* Москва - Ленинград 1948, tom I, str. 547.

Dołączmy do tożsamości (11) warunki (9) i (10). Układ tych równości jest równoważny z układem

$$(12)\qquad \begin{gathered} \frac{\Phi''(F)}{\Phi'(F)} \equiv -\frac{F_{xz}}{F_xF_z}, \quad \frac{\Phi''(F)}{\Phi'(F)} \equiv -\frac{F_{yz}}{F_yF_z}, \\ \left[\frac{\Phi''(F)}{\Phi'(F)}\right]' + \frac{\Phi''(F)}{\Phi'(F)}\cdot\frac{F_{xy}}{F_xF_y} + \frac{1}{F_xF_y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{F_{xx}}{F_x}\right] \equiv 0. \end{gathered}$$

(Wystarczy we wzorach (9) i (10) zamiast $\dfrac{F_{xz}}{F_xF_z}$ wstawić $-\dfrac{\Phi''(F)}{\Phi'(F)}$, a zamiast $\dfrac{1}{F_x}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{F_{xz}}{F_xF_z}\right]$, wstawić $-\left[\dfrac{\Phi''(F)}{\Phi'(F)}\right]'$.) Powyższe warunki można przedstawić w następującej postaci:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}[\Phi(F)] \equiv 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}[\Phi(F)] \equiv 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\ln\left|\frac{\partial}{\partial x}[\Phi(F)]\right| \equiv 0.$$

Na podstawie twierdzenia 1 funkcja $\Phi(F)$ jest postaci (2), zatem $\Phi(u)$ jest funkcją anamorfozującą.

Wszystkie funkcje spełniające tożsamość (11) mają postać

$$\Phi(u) \equiv c_1P(u)+c_2, \quad \text{gdzie} \quad P(u) \equiv \int \exp\left[-\int A(u)\,du\right]du.$$

Jeżeli równanie $F(x,y,z)=0$ posiada funkcję anamorfozującą, to ma ona postać

$$\Phi(u) \equiv c_1[P(u)-P(0)].$$

Udowodniliśmy

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli funkcja $F(x,y,z)$ spełnia założenia twierdzenia 2 i jeżeli istnieją dwie funkcje anamorfozujące, sprowadzające równanie $F(x,y,z)=0$ do postaci $g(z)+f(x)h(y)+k(y)=0$, to różnią się one między sobą co najwyżej stałym czynnikiem.*

PRZYKŁAD 1. Dane jest równanie

$$F \equiv z\sqrt{1+y^2}\cosh xy + yz\sinh xy + \\ + \sqrt{1+z^2}\cdot\sqrt{1+y^2}\sinh xy + y\sqrt{1+z^2}\cosh xy = 0.$$

Należy sprawdzić, czy istnieje funkcja anamorfozująca, sprowadzająca równanie $F=0$ do postaci kanonicznej Cauchy'ego. Najpierw sprawdzamy spełnienie warunków (7). Następnie obliczamy wyrażenie

$$(\mathrm{A})\qquad \frac{F_{xz}}{F_xF_z}$$

Ze spełnienia warunków (7) wynika, że wyrażenie to jest funkcją tylko zmiennej F. Rugując z równania $F=0$ i z wyrażenia (A) jedną ze zmiennych, na przykład z, otrzymujemy wyrażenie (A) w postaci

$$\frac{F}{1+F^2}.$$

Tożsamość (11) przyjmie zatem postać

$$\frac{\Phi''(u)}{\Phi'(u)} \equiv -\frac{u}{1+u^2}.$$

Wszystkie funkcje spełniające tę tożsamość mają postać

$$\Phi(u) \equiv c_1 \operatorname{arc\,sinh} u + c_2.$$

Zatem najprostsza postać funkcji anamorfozującej równania $F=0$ jest

$$\Phi(u) \equiv \operatorname{arc\,sinh} u.$$

Stosując znane wzory dla funkcji hiperbolicznych możemy równanie $\operatorname{arc\,sinh} F = 0$ przedstawić w postaci

$$\operatorname{arc\,sinh} z + xy + \operatorname{arc\,sinh} y = 0,$$

co nie było natychmiast widoczne.

§ 4. Czynnik anamorfozujący. W paragrafie tym rozpatrzymy trzy przypadki istnienia czynnika anamorfozującego.

4.1. Rozpatrzymy najpierw przypadek istnienia czynnika anamorfozującego postaci $\varphi(x,y)$, $(\varphi(x,y)\neq 0)$. Załóżmy więc, że równanie ma postać

$$F \equiv F(x,y,z) \equiv \frac{1}{\varphi(x,y)}[g(z)+f(x)h(y)+k(y)] = 0. \tag{13}$$

Udowodnimy

TWIERDZENIE 4. *Jeżeli w prostopadłościanie D (określonym jak w twierdzeniu 1) funkcja $F(x,y,z)$ jest określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi aż do rzędu czwartego włącznie oraz $F_zP_x\neq 0$, gdzie $P=F/F_z$, to na to, by istniał czynnik anamorfozujący, zależny tylko od x i y, sprowadzający równanie do postaci kanonicznej Cauchy'ego, potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były warunki*

$$\frac{\partial^2 \ln|F_z|}{\partial z\partial y} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 \ln|F_z|}{\partial z\partial x} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 \ln|P_x|}{\partial x\partial y} \equiv 0. \tag{14}$$

Dowód konieczności. Jeżeli istnieje czynnik anamorfozujący, to

$$F \equiv \frac{1}{\varphi(x, y)}[g(z)+f(x)h(y)+k(y)].$$

Analogicznie jak w twierdzeniu 1 dowodzimy różniczkowalności funkcji $\varphi(x, y)$, $g(z)$, $f(x)$, $h(y)$ i $k(y)$. Następnie obliczamy $F_z \equiv g'(z)/\varphi(x, y)$ i dalej

$$\varphi(x, y) \equiv \frac{c}{F_z(x, y, \zeta)}, \tag{15}$$

gdzie ζ jest dowolną wartością zmiennej z w prostopadłościanie D, a c jest współczynnikiem liczbowym.

Łatwo więc sprawdzić, że jeżeli F spełnia założenia twierdzenia oraz $F \equiv [g(z)+f(x)h(y)+k(y)]/\varphi(x, y)$, to warunki (14) są spełnione.

Dowód dostateczności. Całkując pierwszą tożsamość (14) względem y i drugą względem x otrzymujemy

$$\frac{\partial \ln|F_z|}{\partial z} \equiv A(z, x), \qquad \frac{\partial \ln|F_z|}{\partial z} \equiv B(z, y).$$

Skąd

$$A(z, x) \equiv B(z, y) \equiv A(z) \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial \ln|F_z|}{\partial z} \equiv A(z).$$

Całkując względem z i przekształcając otrzymujemy

$$F_z \equiv E(z)H(x, y), \quad \text{gdzie} \quad E(z) \equiv \exp \int A(z)dz.$$

Z warunku $F_z \neq 0$ wynika, że $E(z) \neq 0$ i $H(x, y) \neq 0$. Całkując względem z obliczamy

$$F \equiv H(x, y) \int E(z)dz + K(x, y).$$

Obliczamy teraz P,

$$P \equiv \frac{F}{F_z} \equiv \frac{\int E(z)dz}{E(z)} + \frac{1}{E(z)} \cdot \frac{K(x, y)}{H(x, y)},$$

i wstawiamy do ostatniej tożsamości układu (14):

$$\frac{\partial^2 \ln\left|\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{K}{H}\right)\right|}{\partial x \partial y} \equiv 0.$$

(Funkcja $\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K}{H}\right)\right|$ jest różniczkowalna, gdyż $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K}{H}\right) \equiv P_x \neq 0$). Stąd otrzymujemy

$$K(x, y) \equiv [f(x)h(y) + k(y)]H(x, y).$$

Obliczamy teraz funkcję

$$F(x, y, z) \equiv H(x, y)\int E(z)dz + H(x, y)[f(x)h(y) + k(y)].$$

Po wstawieniu

$$\int E(z)dz \equiv g(z) \quad \text{i} \quad H(x, y) \equiv \frac{1}{\varphi(x, y)}$$

funkcja $F(x, y, z)$ przyjmuje postać (13).

Z równości (15) wynika, że czynnik anamorfozujący jest określony z dokładnością do stałego czynnika. Udowodniliśmy

TWIERDZENIE 5. *Jeżeli funkcja $F(x, y, z)$ spełnia założenia twierdzenia 4 i jeżeli istnieją dwa czynniki anamorfozujące, zależne tylko od x i y, sprowadzające równanie $F(x, y, z) = 0$ do postaci kanonicznej Cauchy'ego, to różnią się co najwyżej o stały czynnik.*

PRZYKŁAD 2. Dane jest równanie

$$g(z)f(x) + f^2(x)h(y) + f(x)k(y) + g(z)h(y) + k(y)h(y) + f(x)h^2(y) = 0,$$

którego lewą stronę oznaczymy przez $F(x, y, z)$. Funkcje $h(y)$ i $k(y)$ mają pierwsze pochodne ciągłe, $g(z)$ i $f(x)$ zaś drugie. Należy sprawdzić, czy istnieje czynnik anamorfozujący, zależny jedynie od x i y, sprowadzający równanie do postaci kanonicznej Cauchy'ego. W tym celu należy sprawdzić czy spełnione są tożsamości (14). Najpierw obliczamy $F_z \equiv g'(f+h)$. Następnie $\ln|F_z| \equiv \ln|g'(z)| + \ln|f(x) + h(y)|$. Stąd widać, że

$$\frac{\partial^2 \ln|F_z|}{\partial z \partial y} \equiv 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 \ln|F_z|}{\partial z \partial x} \equiv 0.$$

Analogicznie sprawdzamy, że spełniona jest ostatnia tożsamość (14). Ze spełnienia warunków (14) wynika, że istnieje czynnik anamorfozujący zależny jedynie od x i y. Obliczymy go: $F_z \equiv g'(f+h)$ i

$$\varphi(x, y) \equiv \frac{c}{g'(\zeta)[f(x) + h(y)]}.$$

Można więc przyjąć, że czynnik anamorfozujący ma następującą postać:

$$\varphi(x, y) \equiv \frac{1}{f(x) + h(y)}.$$

4.2. Rozpatrzmy teraz przypadek czynnika anamorfozującego zależnego jedynie od zmiennych y i z. W takim przypadku równanie ma następującą postać:

$$F \equiv F(x, y, z) \equiv \frac{1}{\varphi(y, z)}[g(z)+f(x)h(y)+k(y)] = 0. \tag{16}$$

TWIERDZENIE 6. *Jeżeli w prostopadłościanie D (określonym jak w twierdzeniu 1) funkcja $F(x, y, z)$ jest określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi aż do rzędu czwartego włącznie oraz $F_xP_z \neq 0$, gdzie $P = F/F_x$, to na to, by istniał czynnik anamorfozujący zależny tylko od y i z, sprowadzający równanie do postaci kanonicznej Cauchy'ego, potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były warunki*

$$\frac{\partial^2 \ln|F_x|}{\partial x \partial y} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 \ln|F_x|}{\partial x \partial z} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 \ln|P_z|}{\partial z \partial y} \equiv 0. \tag{17}$$

Dowód konieczności. Analogicznie jak w twierdzeniu 4 dowodzimy różniczkowalności funkcji $\varphi(y, z)$, $g(z)$, $f(x)$, $h(y)$ i $k(y)$. Sprawdzamy, że

$$F_x(x, y, z)P_z(x, y, \zeta) \equiv \frac{g'(\zeta)}{\varphi(y, z)}, \tag{18}$$

gdzie ζ jest dowolną wartością z w prostopadłościanie D.

Teraz już łatwo sprawdzić, że jeżeli funkcja $F(x, y, z)$ spełnia założenia twierdzenia i

$$F(x, y, z) \equiv \frac{1}{\varphi(y, z)}[g(z)+f(x)h(y)+k(y)],$$

to warunki (17) są spełnione.

Dowód dostateczności. Całkując pierwszą tożsamość (17) względem y, drugą względem z otrzymujemy

$$\frac{\partial \ln|F_x|}{\partial x} \equiv A(x, z), \quad \frac{\partial \ln|F_x|}{\partial x} \equiv B(x, y).$$

Stąd

$$A(x, z) \equiv B(x, y) \equiv A(x) \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial \ln|F_x|}{\partial x} = A(x).$$

Zatem $F_x \equiv K(x)E(y, z)$. Z warunku $F_x \neq 0$ wynika, że $K(x) \neq 0$ i $E(x, y) \neq 0$. Całkując jeszcze raz względem x obliczamy

$$F(x, y, z) \equiv \int K(x)dxE(y, z)+L(y, z).$$

Następnie obliczamy funkcję P:

$$P \equiv \frac{F}{F_x} \equiv \frac{\int K dx}{K} + \frac{L}{KE}.$$

Stąd

$$P_z \equiv \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{L}{E}\right).$$

Z ostatniego warunku (17) otrzymujemy

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \ln \left| \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{L}{E}\right) \right| \equiv 0.$$

Stąd $L = E(y, z)H(y)M(z) + E(y, z)Q(y)$. Funkcja $F(x, y, z)$ przyjmuje więc postać (16). Z warunku $P_z \neq 0$ i tożsamości $P_z \equiv HM'/K$ wynika, że $H(y) \neq 0$.

$$F \equiv E(y, z) \int K(x) dx + E(y, z) H(y) M(z) + E(y, z) Q(y).$$

Po wstawieniu

$$H(y)E(y, z) \equiv \frac{1}{\varphi(y, z)},$$

$$\int K(x) dx \equiv f(x), \qquad M(z) \equiv g(z), \qquad \frac{1}{H(y)} \equiv h(y), \qquad \frac{Q(y)}{H(y)} \equiv k(y),$$

otrzymamy funkcję F w żądanej postaci. Z tożsamości (18) wynika

$$\varphi(y, z) \equiv \frac{c}{F_x(x, y, z) P_z(x, y, \zeta)}, \qquad \text{gdzie} \qquad c = \text{const}.$$

Widać więc, że czynnik anamorfozujący jest określony z dokładnością do stałego czynnika. Udowodniliśmy

TWIERDZENIE 7. *Jeżeli funkcja $F(x, y, z)$ spełnia założenia twierdzenia 6 i jeżeli istnieją dwa czynniki anamorfozujące zależne tylko od y i z, sprowadzające równanie $F(x, y, z) = 0$ do postaci kanonicznej Cauchy'ego, to różnią się co najwyżej o stały czynnik.*

4.3. Rozpatrzymy ostatni przypadek istnienia czynnika anamorfozującego, jako funkcji x i z. Równanie w tym przypadku ma postać

$$F \equiv F(x, y, z) \equiv \frac{1}{\varphi(x, z)} [g(z) + f(x)h(y) + k(y)] = 0.$$

TWIERDZENIE 8. *Jeżeli w prostopadłościanie D (określonym jak w twierdzeniu 1) funkcja $F(x, y, z)$ jest określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi aż do rzędu piątego włącznie oraz $F_y P_z R_x \neq 0$, gdzie $P \equiv F/F_y$,*

$R \equiv P/P_z$, *to na to, by istniał czynnik anamorfozujący zależny tylko od* x *i* z, *sprowadzający dane równanie do postaci kanonicznej Cauchy'ego, potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były warunki*

$$\frac{\partial^2 \ln|F_y|}{\partial z \partial y} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 \ln|P_z|}{\partial z \partial x} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2 \ln|R_x|}{\partial x \partial y} \equiv 0. \tag{19}$$

Dowód konieczności.

$$F(x, y, z) \equiv \frac{1}{\varphi(x, z)}[g(z)+f(x)h(y)+k(y)].$$

Na podstawie twierdzenia o różniczkowalności i ciągłości wielomianów nomograficznych dowodzimy, podobnie jak w twierdzeniu 4, różniczkowalności funkcji $h(y)$, $k(y)$, $f(x)$, $g(z)$ i $\varphi(x, z)$. Zauważmy jeszcze, że zachodzi równość

$$F_y(x, y, z)P_z(x, y, z)R_x(\xi, \eta, z) \equiv \frac{1}{\varphi(x, z)}f'(\xi)h(\eta), \tag{20}$$

gdzie ξ i η są dowolnymi wartościami x i y w prostopadłościanie D. Łatwo sprawdzić, że warunki (19) są konieczne.

Dowód dostateczności. Całkując pierwszą tożsamość (19) otrzymujemy

$$F_y \equiv A(z, x)B(x, y) \quad \text{i} \quad F(x, y, z) \equiv A(z, x)\int B(x, y)dy + C(x, z).$$

Z warunku $F_y \neq 0$ wynika, że $A(z, x) \neq 0$ i $B(x, y) \neq 0$. Obliczamy funkcję P:

$$P \equiv \frac{\int B(x, y)dy}{B(x, y)} + \frac{C(x, z)}{A(z, x), B(x, y)}.$$

Następnie obliczamy P_z,

$$P_z \equiv \frac{1}{B(x, y)} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{C}{A}\right),$$

i podstawiamy do drugiej tożsamości (19):

$$-\frac{\partial^2 \ln|B(x, y)|}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \ln\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{C}{A}\right)\right|}{\partial z \partial x} \equiv 0.$$

Całkując otrzymaną tożsamość mamy

$$C(x, z) \equiv A(z, x)K(x)E(z) + G(x)A(z, x).$$

Wobec tego funkcja $F(x, y, z)$ ma postać

$$F(x, y, z) \equiv A(z, x)\int B(x, y)dy + A(z, x)K(x)E(z) + G(x)A(z, x). \tag{21}$$

Z warunku $P_z \neq 0$ i tożsamości $P_z \equiv KE'/B$ wynika, że $K(x) \neq 0$ i $E'(z) \neq 0$. Obliczamy funkcję R.

$$R \equiv \frac{A\int Bdy + AKE + GA}{ABKE'} B \equiv \frac{\int Bdy + G}{KE'} + \frac{E}{E'}.$$

Oznaczmy $(\int Bdy + G)/K$ przez Q. Wtedy

$$R \equiv \frac{Q(x,y)}{E'(z)} + \frac{E(z)}{E'(z)} \quad \text{i} \quad R_x \equiv \frac{1}{E'(z)} Q_x.$$

Wstawiamy R_x do ostatniej tożsamości (19):

$$\frac{\partial^2 \ln|Q_x|}{\partial x \partial y} \equiv 0.$$

Stąd po całkowaniach i przekształceniach $Q \equiv W(y)S(x) + V(y)$ i następnie $\int B(x,y)dy + G(x) \equiv [W(y)S(x) + V(y)]K(x)$. Po wstawieniu do warunku (21) otrzymamy funkcję

$$F(x,y,z) \equiv A(z,x)[W(y)S(x) + V(y)]K(x) + A(z,x)K(x)E(z).$$

Kładąc

$$A(z,x)K(x) \equiv \frac{1}{\varphi(x,z)}, \quad S(x) \equiv f(x), \quad E(z) \equiv g(z), \quad W(y) \equiv h(y),$$
$$V(y) \equiv k(y)$$

otrzymujemy funkcję $F(x,y,z)$ w postaci

$$F(x,y,z) \equiv \frac{1}{\varphi(x,z)} [g(z) + f(x)h(y) + k(y)],$$

a z warunku (21) mamy

$$\varphi(x,z) \equiv \frac{c}{F_y(x,y,z)P_z(x,y,z)R_x(\xi,\eta,z)}.$$

Stąd widać, że czynnik anamorfozujący jest określony z dokładnością do stałego czynnika. Udowodniliśmy

TWIERDZENIE 9. *Jeżeli funkcja $F(x,y,z)$ spełnia założenia twierdzenia 8 i jeżeli istnieją dwa czynniki anamorfozujące zależne jedynie od x i z, sprowadzające równanie $F(x,y,z) = 0$ do postaci kanonicznej Cauchy'ego, to różnią się co najwyżej o stały czynnik.*

§ 5. Forma kanoniczna Cauchy'ego w postaci $m(z) = f(x)h(y) + k(y)$.

TWIERDZENIE 10. *Jeżeli w prostokącie D, określonym nierównościami $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$, funkcja $F(x,y)$ jest określona i ciągła wraz* *z pochodnymi cząstkowymi aż do rzędu trzeciego włącznie oraz $F_x \neq 0$, to na to, aby zachodziła tożsamość $F(x, y) \equiv f(x)h(y)+k(y)$, potrzeba i wystarcza, żeby spełniony był warunek*

$$\frac{\partial^2 \ln |F_x|}{\partial x \partial y} \equiv 0. \tag{22}$$

Dowód konieczności. Jeżeli $F(x, y) \equiv f(x)h(y)+k(y)$, a $F(x, y)$ spełnia założenia twierdzenia 10, to analogicznie jak w twierdzeniu 1, dowodzimy, że $f(x)$ posiada ciągłą pierwszą i drugą pochodną, $h(y)$ i $k(y)$ zaś pierwszą pochodną ciągłą.

Wobec tego łatwo sprawdzić, że funkcja $F(x, y)$ spełnia warunek (22).

Dowód dostateczności. Całkując dwukrotnie (22) raz względem x, drugi raz względem y i przekształcając otrzymujemy $F_x \equiv A(x)h(y)$. Całkując obie strony względem x otrzymujemy

$$F(x, y) \equiv \int A(x)dx \cdot h(y)+k(y).$$

Wstawiając $\int A(x)dx \equiv f(x)$, otrzymujemy

$$F(x, y) \equiv f(x)h(y)+k(y).$$

Dane jest równanie $n(z) = F(x, y)$. Chcemy znaleźć warunki, jakie spełniać musi funkcja $F(x, y)$, by istniała funkcja $\Phi(u)$ jednej zmiennej taka, żeby równanie $\Phi(n) = \Phi(F)$ miało postać

$$m(z) = f(x)h(y)+k(y).$$

TWIERDZENIE 11. *Jeżeli w prostokącie D (określonym jak w twierdzeniu 10) funkcja $F(x, y)$ jest określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi aż do rzędu piątego włącznie oraz jeżeli spełniony jest warunek $B_y \neq 0$, gdzie $B(u, y) \equiv A[x(u, y), y]$, $A(x, y) \equiv F_{xy}/F_xF_y$, a funkcja $x = x(u, y)$ jest odwrotna do funkcji $u = F(x, y)$, to na to, by istniała funkcja anamorfozująca $\Phi(u)$ taka, że $\Phi'(u) \neq 0$ i $\Phi[F(x, y)] \equiv f(x)g(y)+ +h(y)$, potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były warunki*

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2B+\frac{B_{uy}}{B_y}\right) \equiv 0, \qquad -\frac{\partial}{\partial u}\left(2B+\frac{B_{uy}}{B_y}\right)-B^2-B\frac{B_{uy}}{B_y}+B_u \equiv 0. \tag{23}$$

Dowód konieczności. Z twierdzenia 10 wynika, że funkcja $\Phi[F(x, y)]$ spełnia warunek

$$\frac{\partial^2 \ln |\Phi'(F)F_x|}{\partial x \partial y} \equiv 0.$$

Rozwijając i wstawiając $x = x(u, y)$ ($x = x(u, y)$ jest funkcją określoną w założeniach twierdzenia) otrzymujemy

$$-\left[\frac{\Phi''(u)}{\Phi'(u)}\right]' \equiv \frac{\Phi''(u)}{\Phi'(u)} B(u, y) + B^2(u, y) + B_u(u, y). \tag{24}$$

Pochodna prawej strony tożsamości (24) obliczona względem zmiennej y znika tożsamościowo:

$$\frac{\Phi''}{\Phi'} B_y + 2BB_y + B_{uy} \equiv 0.$$

Stąd

$$-\frac{\Phi''}{\Phi'} \equiv 2B + \frac{B_{uy}}{B_y}. \tag{25}$$

Ponieważ prawa strona tożsamości (25) nie zależy od y, więc po zróżniczkowaniu otrzymujemy pierwszy warunek (23). Drugą tożsamość (23) otrzymamy z tożsamości (24), obliczając najpierw funkcję $\left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)'$ ze wzoru (25).

Dowód dostateczności. Z pierwszej tożsamości (23) wynika istnienie funkcji $\Psi(u)$ spełniającej tożsamość

$$\Psi(u) B_y + 2BB_y + B_{uy} \equiv 0. \tag{26}$$

Istnieje zatem funkcja $\Omega(u)$ spełniająca tożsamość

$$\Omega(u) + \Psi(u) B + B^2 + B_u \equiv 0. \tag{27}$$

Na mocy drugiego warunku (23) i wzoru (27) $\Omega(u) \equiv \Psi'(u)$. Wtedy tożsamość (27) przyjmie postać

$$\Psi'(u) + \Psi(u) B + B^2 + B_u \equiv 0.$$

Oznaczając $\Psi(u) \equiv \Phi''(u)/\Phi'(u)$ otrzymujemy tożsamość (24). Wstawiając $u \equiv F(x, y)$ i zwijając otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 \ln\left|\dfrac{\partial}{\partial x}[\Phi(F)]\right|}{\partial x \partial y} \equiv 0.$$

Na mocy twierdzenia 10 funkcja $\Phi(F)$ spełnia tożsamość

$$\Phi(F) \equiv f(x) g(y) + h(y).$$

II. Równanie piątego rzędu nomograficznego

§ 1. Równanie różniczkowe nomogramowalnego wielomianu piątego rzędu nomograficznego. Jak wiadomo, nie wszystkie równania piątego rzędu nomograficznego są nomogramowalne. Można sporządzić nomogram kolineacyjny dla równań piątego rzędu postaci

$$m(z) = \frac{-f(x)-h(y)}{g(x)+k(y)}.$$

Równanie to można napisać w postaci

$$F \equiv F(x,y,z) \equiv m(z)g(x)+m(z)k(y)+f(x)+h(y) = 0. \tag{1}$$

Udowodnimy następujące

TWIERDZENIE 12. *Jeżeli w prostopadłościanie D (określonym jak w twierdzeniu* 1) *funkcja $F(x,y,z)$ jest określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi aż do rzędu trzeciego włącznie oraz $F_z \neq 0$, to na to, by funkcja $F(x,y,z)$ miała postać* (1), *potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były warunki*

$$F_{xy} \equiv 0, \qquad \frac{\partial^2 \ln|F_z|}{\partial x \partial z} \equiv 0. \tag{2}$$

D o w ó d k o n i e c z n o ś c i. Analogicznie jak w twierdzeniu 1 dowodzimy różniczkowalności funkcji $m(z), f(x), g(x), h(y), k(y)$. Łatwo więc teraz sprawdzić, że jeżeli funkcja $F(x,y,z)$ ma postać (1) i spełnia założenia twierdzenia, to warunki (2) są także spełnione.

D o w ó d d o s t a t e c z n o ś c i. Dwukrotnie całkując drugą tożsamość (2) obliczamy

$$F_z \equiv A(y,z)B(x,y).$$

Po scałkowaniu pierwszego warunku (2) względem y otrzymujemy

$$F_x \equiv C(x,z).$$

Ze względu na ciągłość drugich pochodnych spełniony jest warunek

$$C_z(x,z) \equiv A(y,z)B_x(x,y).$$

Równość ta zachodzi jedynie wtedy, gdy

$$A(y,z) \equiv E(y)H(z) \quad \text{oraz} \quad B_x(x,y) \equiv \frac{1}{E(y)}K(x).$$

Stąd

$$B(x,y) \equiv \frac{\int K(x)\,dx}{E(y)} + L(y) \quad \text{oraz} \quad F_z \equiv E(y)H(z)\left[\frac{\int K(x)\,dx}{E(y)} + L(y)\right].$$

Przekształcając tę ostatnią tożsamość otrzymujemy

$$F_z \equiv H(z)\left[\int K(x)\,dx + L(y)E(y)\right]. \tag{3}$$

Po scałkowaniu wzoru (3) obliczamy, że

$$F \equiv \int H(z)\,dz\left[\int K(x)\,dx + L(y)E(y)\right] + M(x,y). \tag{4}$$

Różniczkując funkcję F, wyznaczoną przez wzór (4), względem x i y oraz uwzględniając pierwszą tożsamość (2) znajdujemy, że $M_{xy}(x,y) \equiv 0$. Stąd

$$M(x,y) \equiv f(x) + h(y). \tag{5}$$

Po wstawieniu (5) do wzoru (4) ostatecznie otrzymujemy

$$F \equiv \int H(z)\,dz\left[\int K(x)\,dx + L(y)E(y)\right] + f(x) + h(y).$$

Oznaczmy

$$\int H(z)\,dz \equiv m(z), \qquad \int K(x)\,dx \equiv g(x), \qquad L(y)E(y) \equiv k(y).$$

Widać, że funkcja $F(x,y,z)$ ma postać (1).

§ 2. Funkcja anamorfozująca. Udowodnimy następujące

TWIERDZENIE 13. *Jeżeli w prostopadłościanie D (określonym jak w twierdzeniu 1) funkcja $F(x,y,z)$ jest określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi aż do rzędu trzeciego włącznie oraz $F_xF_yF_z \neq 0$, to na to, by istniała trzykrotnie różniczkowalna funkcja anamorfozująca $\Phi(u)$, sprowadzająca funkcję F do postaci (1), i taka, że $\Phi'(u) \neq 0$, potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były warunki*

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 \ln\left|\dfrac{F_x}{F_y}\right|}{\partial x\,\partial y} \equiv 0, \qquad \frac{\partial^2 \ln\left|\dfrac{F_y}{F_z}\right|}{\partial x\,\partial z} \equiv 0, \\ \frac{1}{F_x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{F_{xy}}{F_xF_y}\right] \equiv \frac{1}{F_z}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{F_{xy}}{F_xF_y}\right]. \end{gathered} \tag{6}$$

Dowód warunku koniecznego jest analogiczny jak w twierdzeniu 2.

Dowód dostateczności. Ze wzorów (6) wynikają następujące tożsamości:

$$\frac{1}{F_x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{F_{xy}}{F_xF_y}\right]-\frac{1}{F_y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{F_{xy}}{F_xF_y}\right]\equiv 0, \tag{7}$$

$$-\frac{1}{F_x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{F_{xy}}{F_xF_y}\right]-\frac{F_{xy}}{F_xF_y}\cdot\frac{F_{xz}}{F_xF_z}+\frac{1}{F_xF_z}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\ln|F_z|\equiv 0. \tag{8}$$

Z uwagi na twierdzenie o zależności funkcyjnej ([3]) oraz na trzeci warunek (6) i wzór (7) jest

$$\frac{F_{xy}}{F_xF_y}\equiv A[F(x,y,z)].$$

Ponieważ funkcje F, F_x, F_y i F_{xy} są ciągłe oraz $F_x\neq 0$ i $F_y\neq 0$, więc funkcja $A(u)$ jest ciągła. Zatem istnieje funkcja $\Phi(F)$ spełniająca tożsamość

$$\frac{\Phi''(F)}{\Phi'(F)}\equiv-\frac{F_{xy}}{F_xF_y}. \tag{9}$$

Zauważymy jeszcze, że funkcja $\Phi(u)$ jest trzykrotnie różniczkowalna. Wynika to z założeń o trzykrotnej różniczkowalności funkcji $F(x,y,z)$.

Weźmy pod uwagę układ złożony z tożsamości (9) i (8); jest on równoważny z układem tożsamości (9) i (10):

$$\left[\frac{\Phi''(F)}{\Phi'(F)}\right]'+\frac{\Phi''(F)}{\Phi'(F)}\cdot\frac{F_{xz}}{F_xF_z}+\frac{1}{F_xF_z}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\ln|F_z|\equiv 0. \tag{10}$$

(Wystarczy w tożsamości (8) zamiast $\frac{F_{xy}}{F_xF_y}$ wstawić $-\frac{\Phi''(F)}{\Phi'(F)}$ oraz zamiast $\frac{1}{F_x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{F_{xy}}{F_xF_y}\right]$ wstawić $-\left[\frac{\Phi''(F)}{\Phi'(F)}\right]'$.) Powyższe tożsamości można przepisać w następującej postaci:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}[\Phi(F)]\equiv 0,\qquad \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\ln\left|\frac{\partial}{\partial z}[\Phi(F)]\right|\equiv 0.$$

Na podstawie twierdzenia 12 funkcja $\Phi(F)$ jest postaci (1), zatem $\Phi(u)$ jest funkcją anamorfozującą.

TWIERDZENIE 14. *Jeżeli funkcja $F(x,y,z)$ spełnia założenia twierdzenia* 13 *oraz jeżeli istnieją funkcje anamorfozujące, sprowadzające dane*

([3]) Por. przypis na str. 4.

równanie $F(x, y, z) = 0$ *do postaci* (1), *to różnią się one co najwyżej o stały czynnik.*

Dowód twierdzenia 14 jest analogiczny do dowodu twierdzenia 3.

PRZYKŁAD 3. Dane jest równanie

$$\begin{aligned} F = {} & xy\cos xz\cos yz - xy\sin xz\sin yz + x\sqrt{1-y^2}\sin xz\cos yz - \\ & - y\sqrt{1-x^2}\sin xz\cos yz + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\cos xz\cos yz + \\ & + x\sqrt{1-y^2}\cos xz\sin yz - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\sin xz\sin yz - \\ & - y\sqrt{1-x^2}\cos xz\sin yz = 0. \end{aligned}$$

Należy sprawdzić czy istnieje funkcja anamorfozująca, sprowadzająca równanie $F = 0$ do I formy kanonicznej Soreau. Najpierw sprawdzamy spełnienie warunków (6), następnie obliczamy wyrażenie

$$\text{(A)} \qquad \frac{F_{xy}}{F_x F_y}.$$

Ze spełnienia warunków (6) wynika, że wyrażenie to jest funkcją tylko zmiennej F. Rugując z równania $F = u$ i z wyrażenia (A) jedną ze zmiennych, np. z, otrzymujemy wyrażenie (A) w postaci $-u/(1+u^2)$.

Tożsamość (9) przyjmie zatem postać

$$\frac{\Phi''(u)}{\Phi'(u)} \equiv \frac{u}{1-u^2}.$$

Wszystkie funkcje spełniające tę tożsamość mają postać

$$\Phi(u) \equiv c_1 \arcsin u + c_2.$$

Zatem najprostsza postać funkcji anamorfozującej równania $F = 0$ jest

$$\Phi(u) \equiv \arcsin u.$$

Stosując znane wzory dla funkcji trygonometrycznych możemy równanie $\arcsin F = 0$ przedstawić w formie

$$xz + yz + \arccos x + \arcsin y = 0,$$

co nie było natychmiast widoczne.

Praca wpłynęła 2. 5. 1958

Я. ВОЙТОВИЧ (Варшава)

МЕТОДЫ ПРИВЕДЕНИЯ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО И ПЯТОГО НОМОГРАФИЧЕСКОГО ПОРЯДКА

РЕЗЮМЕ

В работе употребляется понятие анаморфозирующей функции и анаморфозирующего множителя. *Анаморфозирующей функцией* функции $F(x, y, z)$ называется функция одной переменной $\Phi(u)$ такая, что $\Phi[F(x, y, z)]$ является канонической. Если $\Phi(u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$, то функция $\Phi(u)$ называется *функцией анаморфозирующей* уравнение $F(x, y, z) = 0$. *Анаморфозирующим множителем* называется функция $f(x, y, z)$ такая, что уравнение $fF = 0$ оказывается эквивалентным уравнению $F(x, y, z) = 0$ и $fF = 0$ имеет канонический вид.

В работе доказаны необходимые и достаточные условия существования анаморфозирующей функции, приводящей данное уравнение к каноническому виду Коши (уравнения (7) и (23), гл. I) и I виду Соро (уравнения (6), гл. II), а также даны методы ее вычисления в виде интеграла некоторого дифференциального уравнения интегрируемого в квадратурах. Для случаев уравнения Коши и I вида уравнения Соро показано, что анаморфозирующая функция определяется с точностью до постоянного множителя.

Кроме того доказаны необходимые и достаточные условия существования анаморфозирующего множителя, зависящего только от двух переменных, приводящего данное уравнение $F(x, y, z) = 0$ к каноническому виду Коши (уравнения (14), (17), (19), гл. I), а также дан метод его вычисления (уравнения (15), (18), (20), гл. I). Показано, что анаморфозирующий множитель определяется с точностью до постоянного множителя.

J. WOJTOWICZ (Warszawa)

METHODS OF REDUCING EQUATIONS OF THE FOURTH AND FIFTH NOMOGRAPHIC RANK TO THE CANONICAL FORM

SUMMARY

The author uses the notions of an anamorphosing function and anamorphosing factor. The anamorphosing function of function $F(x, y, z)$ is a function of one variable $\Phi(u)$ such that the function $\Phi[F(x, y, z)]$ is of canonical form. If $\Phi(u) = 0$ if and only if $u = 0$, then the function $\Phi(u)$ is called the *anamorphosing function* of the equation $F(x, y, z) = 0$. The *anamorphosing factor* is a function $f(x, y, z)$ such that the equation $fF = 0$ is equivalent to a given equation $F(x, y, z) = 0$ and the equation $fF = 0$ is of canonical form.

The author gives necessary and sufficient conditions for the existence of the anamorphosing function reducing a given equation to the Cauchy canonical form (equations (7) and (23), chapter I) and to the first Soreau form (equation (6), chapter II). He shows how to find that function as an integral of a certain differential equation integrable by quadratures. In each case the form of the equation is given. In the case of the Cauchy equation and of the first form of the Soreau equa-

tion it is shown that the anamorphosing function is determined with an error not greater than a fixed factor.

Moreover the author establishes the necessary and sufficient conditions for the existence of the anamorphosing factor, dependent on two variables only, which reduces a given equation $F(x, y, z) = 0$ to the Cauchy canonical form (equations (14), (17) and (19), chapter I) and gives the method of finding it (equations (15), (18), (20), chapter I). It is also shown that the anamorphosing factor is determined with an error not greater than a fixed factor.