ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
V (1960)

J. WOJTOWICZ (Warszawa)

SPROWADZANIE RÓWNAŃ DO POSTACI KANONICZNYCH RÓWNANIA CZWARTEGO RZĘDU NOMOGRAFICZNEGO Z CZTEREMA ZMIENNYMI

Niniejsza praca jest kontynuacją prac poprzednich [2], [3], w których zostało sformułowane pojęcie funkcji anamorfozującej i podane zostały kryteria istnienia funkcji anamorfozującej, sprowadzającej równanie $F(x,y,z)=0$ do I i II formy kanonicznej równania trzeciego rzędu nomograficznego, formy kanonicznej Cauchy'ego i I formy kanonicznej Soreau.

I. Równanie postaci $f(x)+g(y)+h(z)+k(w)=0$.

$$F(x,y,z,w)\equiv F\equiv f(x)+g(y)+h(z)+k(w)=0. \tag{1}$$

Udowodnimy

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli*

1. *funkcja F jest określona i ciągła w kostce D, określonej nierównościami*

$$x_0\leqslant x\leqslant x_1,\quad y_0\leqslant y\leqslant y_1,\quad z_0\leqslant z\leqslant z_1,\quad w_0\leqslant w\leqslant w_1,$$

2. *funkcja F ma w kostce D drugie pochodne mieszane ciągłe, to na to, by funkcja F miała postać* (1), *potrzeba i wystarcza, żeby w kostce D spełnione były tożsamości*

$$F_{xy}\equiv 0, \tag{2a}$$

$$F_{xz}\equiv 0, \tag{2b}$$

$$F_{xw}\equiv 0, \tag{2c}$$

$$F_{yz}\equiv 0, \tag{2d}$$

$$F_{yw}\equiv 0, \tag{2e}$$

$$F_{zw}\equiv 0. \tag{2f}$$

Dowód konieczności. Jeżeli żadna z funkcji $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ i $k(w)$ nie jest stała, to funkcja F ma postać zredukowaną [4]. Stąd, na podstawie twierdzenia o różniczkowalności uogólnionych wielomianów nomograficznych, funkcje $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ i $k(w)$ mają pierwsze pochodne ciągłe [4]. Łatwo więc sprawdzić, że tożsamości (2) są spełnione.

Dowód dostateczności. Z tożsamości (2a, b, c) otrzymujemy

$$F_x \equiv A(x).$$

Stąd

$$F \equiv \int A(x)dx + E(y, z, w). \tag{3}$$

Wstawiając (3) w tożsamości (2d) i (2e) otrzymamy $E_{yz} \equiv 0$ i $E_{yw} \equiv 0$. Stąd $E_y \equiv H(y)$ i

$$E \equiv \int H(y)dy + L(z, w). \tag{4}$$

Z tożsamości (3) i (4) wynika

$$F \equiv \int A(x)dx + \int H(y)dy + L(z, w). \tag{5}$$

Z tożsamości (2f), po uwzględnieniu tożsamości (5), mamy $L_{zw} \equiv 0$. Zatem $L(z, w) \equiv M(z) + N(w)$, a następnie

$$F \equiv \int A(x)dx + \int H(y)dy + M(z) + N(w).$$

Oznaczając

$$\int A(x)dx \equiv f(x), \quad \int H(y)dy \equiv g(y), \quad M(z) \equiv h(z), \quad N(w) \equiv k(w)$$

otrzymamy funkcję F w postaci (1).

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli*

1. *funkcja $F(x, y, z, w)$ jest określona i ciągła w kostce D, określonej nierównościami*

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \quad y_0 \leqslant y \leqslant y_1, \quad z_0 \leqslant z \leqslant z_1, \quad w_0 \leqslant w \leqslant w_1,$$

2. *funkcja F ma w kostce D ciągłe pochodne cząstkowe aż do rzędu trzeciego włącznie,*

3. *w kostce D spełnione są warunki $F_x \neq 0$, $F_y \neq 0$, $F_z \neq 0$, $F_w \neq 0$, to na to, żeby istniała dwukrotnie różniczkowalna funkcja anamorfozująca* [2] *$\Phi(u)$ taka, że $\Phi'(u) \neq 0$, sprowadzająca równanie $F(x, y, z, w) = 0$ do postaci* (1), *potrzeba i wystarcza, by w kostce D spełnione były tożsamości*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{F_y}{F_z}\right] \equiv 0, \tag{6a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{F_y}{F_w}\right] \equiv 0, \tag{6b}$$

(6c) $$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{F_x}{F_z}\right] \equiv 0,$$

(6d) $$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{F_x}{F_w}\right] \equiv 0,$$

(6e) $$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{F_x}{F_w}\right] \equiv 0.$$

Dowód konieczności. Załóżmy, że istnieje funkcja anamorfozująca $\Phi(u)$ taka, że

$$\Phi[F] \equiv f(x)+g(y)+h(z)+k(w).$$

Ponieważ $\Phi'(u) \neq 0$, to istnieje funkcja $u = \varphi(\Phi)$ odwrotna do $\Phi(u)$. Stąd

$$F \equiv \varphi[f(x)+g(y)+h(z)+k(w)].$$

Łatwo teraz sprawdzić, że tożsamości (6) są spełnione.

Dowód dostateczności. Z (6) wynikają tożsamości

(7) $$\frac{F_{xy}}{F_xF_y} \equiv \frac{F_{xz}}{F_xF_z} \equiv \frac{F_{xw}}{F_xF_w} \equiv \frac{F_{yz}}{F_yF_z} \equiv \frac{F_{yw}}{F_yF_w} \equiv \frac{F_{zw}}{F_zF_w}$$

oraz tożsamości

(8) $$\frac{A_x}{F_x} \equiv \frac{A_y}{F_y} \equiv \frac{A_z}{F_z} \equiv \frac{A_w}{F_w},$$

gdzie

$$A \equiv \frac{F_{xy}}{F_xF_y}.$$

Z uwagi na twierdzenie o zależności funkcyjnej [1] oraz na warunki (8) wynika

$$\frac{F_{xy}}{F_xF_y} \equiv \Psi(F).$$

Ponieważ funkcje F, F_x, F_y, F_{xy} są ciągłe, $F_x \neq 0$ i $F_y \neq 0$, to funkcja $\Psi(u)$ jest ciągła. Istnieje zatem funkcja $\Phi(u)$ spełniająca tożsamość

(9) $$\frac{\Phi''(F)}{\Phi'(F)} \equiv -\frac{F_{xy}}{F_xF_y}.$$

Uwzględniając tożsamości (7) otrzymamy jeszcze pięć analogicznych tożsamości. Tożsamości te oraz tożsamość (9) można napisać w postaci

(9a) $$\frac{\partial^2 \Phi(F)}{\partial x \partial y} \equiv 0,$$

(9b) $$\frac{\partial^2 \Phi(F)}{\partial x \partial z} \equiv 0,$$

(9c) $$\frac{\partial^2 \Phi(F)}{\partial x \partial w} \equiv 0,$$

(9d) $$\frac{\partial^2 \Phi(F)}{\partial y \partial z} \equiv 0,$$

(9e) $$\frac{\partial^2 \Phi(F)}{\partial y \partial w} \equiv 0,$$

(9f) $$\frac{\partial^2 \Phi(F)}{\partial z \partial w} \equiv 0.$$

Na podstawie twierdzenia 1

$$\Phi(F) \equiv f(x)+g(y)+h(z)+k(w).$$

Obliczamy z tożsamości (9)

$$\Phi(u) \equiv c_1 \int [\exp \int \Psi(u)du]du + c_2.$$

Oznaczając

$$P(u) \equiv \int [\exp \int \Psi(u)du]du$$

i wstawiając $\Phi(0) = 0$ otrzymujemy

$$\Phi(u) \equiv c_1[P(u)-P(0)].$$

Udowodniliśmy

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli funkcja $F(x, y, z, w)$ spełnia założenia twierdzenia 2 oraz jeżeli istnieją dwie funkcje anamorfozujące, sprowadzające równanie $F(x, y, z, w) = 0$ do postaci (1), to różnią się one co najwyżej stałym czynnikiem.*

PRZYKŁAD. Sprowadzić równanie

$$F \equiv x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-w^2}+\sqrt{1-x^2}\,y\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-w^2}-x\sqrt{1-y^2}\,zw-$$
$$-\sqrt{1-x^2}\,yzw+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\,z\sqrt{1-w^2}+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}\,w-$$
$$-xyz\sqrt{1-w^2}-xy\sqrt{1-z^2}\,w = 0$$

do postaci $f(x)+g(y)+h(z)+k(w) = 0$.

Obliczamy pochodne cząstkowe

$$\sqrt{1-x^2}\,F_x \equiv \sqrt{1-y^2}\,F_y \equiv \sqrt{1-z^2}\,F_z \equiv \sqrt{1-w^2}\,F_w \equiv$$
$$\equiv \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-w^2} - xy\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-w^2} -$$
$$-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\,zw + xyzw - x\sqrt{1-y^2}\,z\sqrt{1-w^2} -$$
$$-x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}\,w - \sqrt{1-x^2}\,yz\sqrt{1-w^2} -$$
$$-\sqrt{1-x^2}\,y\sqrt{1-z^2}\,w.$$

Łatwo teraz można sprawdzić, że tożsamości (6) są spełnione. Istnieje zatem funkcja anamorfozująca, sprowadzająca dane równanie do postaci (1).

Obliczamy wyrażenie

$$F_{xy} \equiv \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,[-\sqrt{1-x^2}\,y\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-w^2} -$$
$$-x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-w^2} + \sqrt{1-x^2}\,yzw + x\sqrt{1-y^2}\,zw +$$
$$+ xyz\sqrt{1-w^2} + xy\sqrt{1-z^2}\,w - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\,z\sqrt{1-w^2} -$$
$$-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-z^2}\,w].$$

Widać natychmiast, że spełniona jest tożsamość

$$F_{xy} \equiv \frac{-F}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}.$$

Łatwo sprawdzić, że $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\,F_xF_y \equiv 1-F^2$. Tożsamość (9) ma zatem postać

$$\frac{\Phi''(F)}{\Phi'(F)} \equiv \frac{F}{1-F^2}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\Phi(F) \equiv c_1 \arcsin F + c_2.$$

Ponieważ $\Phi(0) = 0$, to $c_2 = 0$. Przyjmujemy także (dowolnie) $c_1 = 1$. Funkcja $\Phi(F)$ ma zatem postać

$$\Phi(F) \equiv \arcsin F.$$

Teraz już łatwo sprawdzić, że

$$F \equiv \sin(\arcsin x + \arcsin y + \arcsin z + \arcsin w),$$

a zatem dane równanie można sprowadzić do postaci

$$\arcsin x + \arcsin y + \arcsin z + \arcsin w = 0 .$$

II. Równanie postaci $f(x)g(y)h(z)k(w)-1 = 0$.

Zauważmy, że jeżeli funkcja $\Phi(u)$ sprowadza równanie $F(x, y, z, w) = 0$ do postaci (1), to funkcja $\exp\Phi(u)$ sprowadza dane równanie do postaci

$$f(x)g(y)h(z)k(w)-1 = 0, \tag{10}$$

oraz jeżeli funkcja $\Psi(u)$ sprowadza dane równanie do postaci (10), to funkcja $\ln|\Psi(u)+1|$ sprowadza dane równanie do postaci (1). Widać więc, że warunki istnienia funkcji anamorfozujących, sprowadzających dane równanie do postaci (1) lub postaci (13), są identyczne.

III. Równanie postaci $f(x)+g(y)+h(z)k(w) = 0$.

$$F(x, y, z, w) \equiv F \equiv f(x)+g(y)+h(z)k(w) = 0. \tag{11}$$

Udowodnimy

TWIERDZENIE 4. *Jeżeli funkcja F spełnia założenia* 1 *i* 2 *twierdzenia* 2 *oraz w kostce D spełnione są warunki $F_z \neq 0$ i $F_w \neq 0$, to na to, by funkcja F miała postać* (11), *potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były tożsamości:*

$$F_{xy} \equiv 0, \tag{12a}$$

$$F_{xz} \equiv 0, \tag{12b}$$

$$F_{xw} \equiv 0, \tag{12c}$$

$$F_{yz} \equiv 0, \tag{12d}$$

$$F_{yw} \equiv 0, \tag{12e}$$

$$\frac{\partial^2 \ln|F_z|}{\partial z \partial w} \equiv 0, \tag{12f}$$

$$\frac{\partial^2 \ln|F_w|}{\partial z \partial w} \equiv 0. \tag{12g}$$

Dowód konieczności. Podobnie jak w twierdzeniu 1 dowodzimy konieczności warunków.

Dowód dostateczności. Z dowodu twierdzenia 1 wynika, że jeżeli funkcja F spełnia tożsamości (12a, b, c, d, e), to ma postać

$$F \equiv A(x)+B(y)+C(z, w). \tag{13}$$

Wstawiając funkcję F w postaci (13) w tożsamość (12f) otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 \ln|C_z|}{\partial z \partial w} \equiv 0$$

i następnie $C \equiv E(z)H(w)+L(w)$.
Stąd funkcja F ma postać

$$F \equiv A(x)+B(y)+E(z)H(w)+L(w). \tag{14}$$

Z tożsamości (12g) i (14) mamy

$$L(w) \equiv aH(w)+b \qquad (a \text{ i } b \text{ są liczbami}).$$

Funkcja F przyjmuje zatem postać

$$F \equiv A(x)+B(y)+H(w)[E(z)+a]+b.$$

Oznaczając

$$A(x)+b \equiv f(x), \quad B(y) \equiv g(y), \quad E(z)+a \equiv h(z), \quad H(w) \equiv k(w),$$

otrzymamy funkcję F w postaci (11).

TWIERDZENIE 5. *Jeżeli funkcja* $F \equiv F(x, y, z, w)$ *spełnia założenia twierdzenia* 2, *to na to, by istniała trzykrotnie różniczkowalna funkcja anamorfozująca* $\Phi(u)$, *taka że* $\Phi'(u) \neq 0$, *sprowadzająca równanie* $F = 0$ *do postaci* (11), *potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były tożsamości* (6a, b, c, d) *oraz*

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \ln\left|\frac{F_z}{F_x}\right| \equiv 0, \tag{15a}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \ln\left|\frac{F_w}{F_x}\right| \equiv 0. \tag{15b}$$

K o n i e c z n o ś ć warunków dowodzimy podobnie jak w twierdzeniu 2.

D o w ó d d o s t a t e c z n o ś c i. Analogicznie jak w twierdzeniu 2 dowodzimy tożsamości (7) (poza ostatnią) i (8). Z uwagi na twierdzenie o zależności funkcyjnej oraz tożsamości (8) wynika

$$\frac{F_{xy}}{F_x F_y} \equiv \Psi(F), \qquad \text{gdzie funkcja } \Psi(u) \text{ jest ciągła}.$$

Istnieje zatem funkcja $\Phi(u)$ spełniająca tożsamość

$$\frac{\Phi''(F)}{\Phi'(F)} \equiv -\frac{F_{xy}}{F_x F_y}.$$

Stąd i z tożsamości (7) (poza ostatnią) wynikają analogicznie jak w twierdzeniu 2 tożsamości (9a, b, c, d, e).

Zauważmy jeszcze, że z trzykrotnej różniczkowalności funkcji F wynika trzykrotna różniczkowalność funkcji $\Phi(u)$.

Z tożsamości (15) wynika tożsamość

$$\text{(16a)} \qquad \frac{1}{F_w}\cdot\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{F_{xz}}{F_x F_z}\right]+\frac{F_{xz}}{F_x F_z}\cdot\frac{F_{zw}}{F_z F_w}-\frac{1}{F_z F_w}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z\partial w}\ln|F_z|\equiv 0$$

oraz tożsamość (16b), którą otrzymujemy z tożsamości (16a) zamieniając miejscami zmienne z i w.

Wobec poprzednio udowodnionych tożsamości można napisać (16) w postaci

$$\text{(17a)} \qquad \frac{\partial^2}{\partial z\partial w}\ln\left|\frac{\partial}{\partial z}\Phi(F)\right|\equiv 0,$$

$$\text{(17b)} \qquad \frac{\partial^2}{\partial z\partial w}\ln\left|\frac{\partial}{\partial w}\Phi(F)\right|\equiv 0.$$

Z tożsamości (9a, b, c, d, e), (17a, b) i twierdzenia 4 wynika, że funkcja F ma postać (11).

Analogicznie jak twierdzenie 3 dowodzimy

TWIERDZENIE 6. *Jeżeli funkcja* $F\equiv F(x,y,z,w)$ *spełnia założenia twierdzenia* 2 *oraz istnieją funkcje anamorfozujące, sprowadzające równanie* $F=0$ *do postaci* (11), *to różnią się one co najwyżej stałym czynnikiem.*

Prace cytowane

[1] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. I, Москва-Ленинград, 1948, str. 547.

[2] J. Wojtowicz, *O sprowadzaniu równań do I i II formy kanonicznej równania trzeciego rzędu nomograficznego*, Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Budownictwo 12 (1959).

[3] — *Metody sprowadzania równań czwartego i piątego rzędu nomograficznego do postaci kanonicznych*, Zastosowania Matematyki, 5 (1960), str. 1—20.

[4] — *Über die korrekte Definition des Ranges eines nomographischen Polynoms und über die Stetigkeit und Differenzierbarkeit der verallgemeinerten nomographischen Polynome*, Annales Polonici Mathematici, 8 (1960), str. 177—183.

Praca wpłynęła 18. 6. 1959

Я. ВОЙТОВИЧ (Варшава)

ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ К ВИДУ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО НОМОГРАФИЧЕСКОГО ПОРЯДКА С ЧЕТЫРЬМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

РЕЗЮМЕ

В работе выводятся необходимые и достаточные условия существования анаморфозирующей функции, приводящей уравнение

$$F(x, y, z, w) = 0$$

к виду

$$f(x)+g(y)+h(z)+k(w) = 0$$

и к виду

$$f(x)g(y)h(z)k(w)-1 = 0$$

(тождество 2), а также к виду

$$f(x)+g(y)+h(z)k(w) = 0$$

(тождество 12).

Даются методы нахождения анаморфозирующей функции, как интеграла дифференциального уравнения, интегрируемого в квадратурах. Во всех случаях указывается форма уравнения.

Показано, что анаморфозирующая функция определена с точностью до постоянного коэффициента.

J. WOJTOWICZ (Warszawa)

REDUCTION OF EQUATIONS TO THE CANONICAL FORM OF EQUATIONS OF FOURTH NOMOGRAPHIC RANK WITH FOUR VARIABLES

SUMMARY

The author proves the necessary and sufficient conditions of the existence of an anamorphotical function reducing the equation

$$F(x, y, z, w) = 0$$

to the form

$$f(x)+g(y)+h(z)+k(w) = 0,$$

to the form

$$f(x)g(y)h(z)k(w)-1 = 0$$

(identities 2), and to the form

$$f(x)+g(y)+h(z)k(w) = 0$$

(identities 12).

He gives methods of finding the anamorphotical function as an integral of a differential equation integrable in quadratures. In each case the form of the equation is given.

It is proved that the anamorphotical function is determined to a constant factor.
