ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
VI (1963)

J. WOJTOWICZ (Warszawa)

O CZYNNIKU ANAMORFOZUJĄCYM, SPROWADZAJĄCYM RÓWNANIE $F(x, y, z, w) = 0$ DO POSTACI KANONICZNYCH RÓWNANIA CZWARTEGO RZĘDU NOMOGRAFICZNEGO Z CZTEREMA ZMIENNYMI

I. Czynnik anamorfozujący, sprowadzający równanie $F(x, y, z, w) = 0$ do postaci $f(x)+g(y)+h(z)+k(w) = 0$. Pojęcie czynnika anamorfozującego zostało określone w pracach [1] i [3]. Rozpatrzymy teraz przypadek czynnika anamorfozującego postaci $\varphi(x, y, z)$ $(\varphi(x, y, z) \neq 0)$ sprowadzającego równanie $F(x, y, z, w) = 0$ do postaci

$$f(x)+g(y)+h(z)+k(w) = 0. \tag{1}$$

Równanie dane ma więc postać

$$F \equiv F(x, y, z, w) \equiv \frac{1}{\varphi(x, y, z)}[f(x)+g(y)+h(z)+k(w)] = 0. \tag{2}$$

Udowodnimy

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli w kostce K, określonej nierównościami $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$, $z_0 \leqslant z \leqslant z_1$, $w_0 \leqslant w \leqslant w_1$, funkcja F jest określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi aż do rzędu trzeciego włącznie oraz $F_w \neq 0$, to na to, by istniał czynnik anamorfozujący φ, zależny tylko od x, y, z, sprowadzający równanie $F = 0$ do postaci (1), potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były tożsamości*

$$\text{(3a)}\quad \frac{\partial^2 \ln|F_w|}{\partial w\,\partial x} \equiv 0, \qquad \text{(3b)}\quad \frac{\partial^2 \ln|F_w|}{\partial w\,\partial y} \equiv 0, \qquad \text{(3c)}\quad \frac{\partial^2 \ln|F_w|}{\partial w\,\partial z} \equiv 0,$$

$$\text{(3d)}\quad \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{F}{F_w}\right) \equiv 0, \qquad \text{(3e)}\quad \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{F}{F_w}\right) \equiv 0, \qquad \text{(3f)}\quad \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left(\frac{F}{F_w}\right) \equiv 0,$$

przy czym

$$\varphi(x, y, z) = \frac{c}{F_w(x, y, z, \omega)},$$

gdzie ω jest dowolną liczbą z przedziału $\langle w_0, w_1\rangle$, a c jest dowolną liczbą.

Dowód konieczności. Zakładamy, że funkcja F ma postać (2). Z istnienia trzecich pochodnych cząstkowych funkcji F oraz z twierdzenia o różniczkowalności uogólnionych wielomianów nomograficznych [2] wynika, że funkcje $\varphi(x,y,z)$, $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ i $k(w)$ są trzykrotnie różniczkowalne. Łatwo więc teraz sprawdzić, że warunki (3) są konieczne.

Dowód dostateczności. Z tożsamości (3a), (3b) i (3c) wynikają tożsamości

$$\frac{\partial}{\partial w}\ln|F_w| \equiv A(w) \quad \text{oraz} \quad \ln|F_w| \equiv \int A(w)dw+B(x,y,z)$$

i

$$F_w \equiv C(w)D(x,y,z), \tag{4}$$

gdzie

$$C(w) \equiv \int\Big[\exp\int A(w)dw\Big]dw, \qquad D(x,y,z) = \exp B(x,y,z).$$

Z (4) wynika, że funkcja F ma postać

$$F \equiv D(x,y,z)\int C(w)dw+E(x,y,z). \tag{5}$$

Obliczamy teraz wyrażenie F/F_w ($F_w \neq 0$ z założenia):

$$\frac{F}{F_w} \equiv \frac{\int C(w)dw}{C(w)}+\frac{E(x,y,z)}{D(x,y,z)}\cdot\frac{1}{C(w)}. \tag{6}$$

Wstawiając F/F_w, obliczone z tożsamości (6), w tożsamości (3d), (3e) i (3f) otrzymujemy

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{E}{D}\right) \equiv 0, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{E}{D}\right) \equiv 0, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\left(\frac{E}{D}\right) \equiv 0.$$

Stąd wynika, że $E/D = f(x)+g(y)+h(z)$, a zatem

$$E(x,y,z) = D(x,y,z)[f(x)+g(y)+h(z)].$$

Wstawiając tak obliczoną funkcję $E(x,y,z)$ w tożsamość (5) i podstawiając $\int C(w)dw = k(w)$ i $1/D(x,y,z) = \varphi(x,y,z)$ otrzymujemy funkcję F w postaci (2). Warunki (3) są więc dostateczne. Jeżeli istnieje czynnik zależny od innej trójki zmiennych, twierdzenie łatwo przenosi się na taki przypadek przez odpowiednią zamianę zmiennych.

Załóżmy, że istnieje czynnik anamorfozujący; wtedy z postaci funkcji F wynika tożsamość

$$F_w = \frac{k'(w)}{\varphi(x,y,z)},$$

a stąd tożsamość

$$\varphi(x, y, z) \equiv \frac{k'(w)}{F_w(x, y, z)}.$$

Można ją napisać w postaci

$$\varphi(x, y, z) \equiv \frac{c}{F_w(x, y, z, \omega)}, \tag{7}$$

gdzie ω jest dowolną liczbą zawartą w przedziale $\langle w_0, w_1 \rangle$, a c współczynnikiem liczbowym.

Udowodniliśmy

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli funkcja $F(x, y, z, w)$ spełnia założenia twierdzenia 1 i jeżeli istnieją czynniki anamorfozujące zależne tylko od x, y, z, sprowadzające równanie $F(x, y, z, w) = 0$ do postaci (1), to różnią się one co najwyżej stałym czynnikiem.*

II. Czynnik anamorfozujący, sprowadzający równanie $F(x, y, z, w) = 0$ do postaci $f(x)g(y)h(z)k(w)-1 = 0$. Rozpatrzymy teraz przypadek czynnika anamorfozującego zależnego od zmiennych x, y, z i sprowadzającego równanie $F(x, y, z, w) = 0$ do postaci

$$f(x)g(y)h(z)k(w)-1 = 0. \tag{8}$$

Równanie ma w tym przypadku postać

$$F \equiv F(x, y, z, w) \equiv \frac{1}{\varphi(x, y, z)}[f(x)g(y)h(z)k(w)-1] = 0. \tag{9}$$

Udowodnimy

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli w kostce K, określonej jak w twierdzeniu 1, funkcja $F(x, y, z, w)$ jest określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi aż do rzędu czwartego włącznie oraz $F_w \neq 0$ i $P_x \neq 0, P_y \neq 0, P_z \neq 0$, gdzie $P \equiv F/F_w$, to na to, by istniał czynnik anamorfozujący, zależny jedynie od x, y, z, sprowadzający równanie $F = 0$ do postaci* (8), *potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były tożsamości* (3a), (3b), (3c) *oraz tożsamości*

$$\text{(10a)}\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\ln|P_x| \equiv 0, \quad \text{(10b)}\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\ln|P_y| \equiv 0, \quad \text{(10c)}\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\ln|P_z| \equiv 0.$$

przy czym

$$\varphi(x, y, z) = \frac{c}{F_w(x, y, z, w)P_x(\xi, y, z, w)P_y(x, \eta, \zeta, \omega)},$$

gdzie ξ, η, ζ i ω są dowolnymi liczbami z kostki K, a c jest stałą.

Dowód konieczności przebiega analogicznie jak w twierdzeniu (1).

Dowód dostateczności. Analogicznie jak w twierdzeniu (1), z tożsamości (3a), (3b) i (3c) mamy

(11) $$F_w \equiv A(w)B(x, y, z)$$

oraz

(12) $$F \equiv \int A(w)dw \cdot B(x, y, z) + C(x, y, z).$$

Stąd

(13) $$P \equiv \frac{F}{F_w} \equiv \frac{\int A(w)dw}{A(w)} + \frac{1}{A(w)} \cdot \frac{C(x, y, z)}{B(x, y, z)}.$$

Wstawiając P z tożsamości (13) w (10a), (10b) i (10c) otrzymujemy:

(14a) $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C}{B}\right) \equiv D(x, z)E(x, y),$$

(14b) $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{C}{B}\right) \equiv G(y, z)H(x, y),$$

(14c) $$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{C}{B}\right) \equiv K(x, z)L(y, z).$$

Różniczkując tożsamość (14a) względem y i (14b) względem x otrzymujemy

$$D(x, z)E_y(x, y) \equiv G(y, z)H_x(x, y);$$

Jest ona spełniona w całej kostce K, a zatem muszą zachodzić tożsamości

$$D(x, z) \equiv M(x)N(z) \quad \text{oraz} \quad G(y, z) \equiv P(y)N(z).$$

Różniczkując (14a) względem z i (14c) względem x i porównując otrzymujemy

$$E(x, y) \equiv Q(x)R(y) \quad \text{i} \quad L(y, z) \equiv S(z)R(y).$$

Następnie różniczkując (14b) względem z i (14c) względem y otrzymujemy

$$H(x, y) \equiv T(x)U(y) \quad \text{i} \quad K(x, z) \equiv T(x)V(z).$$

Stąd wynika tożsamość $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C}{B}\right) = M(x)N(z)Q(x)R(y)$; całkując ją stronami otrzymujemy

(15) $$\frac{C}{B} \equiv N(z)R(y)\int M(x)Q(x)dx + W(y, z).$$

Obliczamy teraz $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{C}{B}\right)$; otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{C}{B}\right) \equiv P(y)N(z)T(x)U(y)$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{C}{B}\right) = N(z)R'(y)\int M(x)Q(x)dx + W_y(y, z).$$

Spełniona jest zatem tożsamość

$$P(y)N(z)T(x)U(y) \equiv N(z)R'(y)\int M(x)Q(x)dx + W_y(y, z).$$

Stąd wynikają tożsamości $W_y(y, z) \equiv aN(z)R'(y)$, gdzie a jest liczbą, oraz $W(y, z) \equiv aN(z)R(y)+Z(z)$.

Obliczając dalej $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{C}{B}\right)$ otrzymujemy tożsamość

$$N'(z)R(y)\left[\int M(x)Q(x)dx + a\right] + Z'(z) \equiv S(z)R(y)T(x)V(z)$$

spełnioną ze względu na z tylko wtedy, gdy

$$Z'(z) \equiv bN'(z) \quad \text{i} \quad V(z)S(z) \equiv cN'(z),$$

gdzie b i c są stałymi i $c \neq 0$.

Tożsamość ta po skróceniu przez $N'(z)$, gdzie $N'(z) \neq 0$ z warunku $P_z \neq 0$, przyjmuje postać

$$R(y)\left[\int M(x)Q(x)dx + a\right] + b \equiv cR(y)T(x)$$

i następnie

$$R(y)\left[\int M(x)Q(x)dx + a - cT(x)\right] \equiv -b.$$

Zachodzi to tylko wtedy, gdy $\int M(x)Q(x)dx + a = cT(x)$, a zatem wtedy $b = 0$.

Widać więc, że funkcja $\frac{C}{B}$ spełnia tożsamość

$$\frac{C}{B} \equiv N(z)R(y)cT(x). \tag{16}$$

Zauważmy dalej, że z warunków $P_x \neq 0$, $P_y \neq 0$ i $P_z \neq 0$ wynika, że $N(z) \neq 0$, $R(y) \neq 0$ i $T(x) \neq 0$.

Z tożsamości (16) obliczamy C i wstawiamy w tożsamość (12):

$$F \equiv B(x,y,z)\int A(w)dw + B(x,y,z)N(z)R(y)cT(x).$$

Podstawiając: $\varphi(x,y,z) \equiv -1/B(x,y,z)N(z)R(y)cT(x)$, $\int A(w)dw \equiv \equiv k(w)$, $1/N(z) \equiv h(z)$, $1/R(y) \equiv g(y)$, $1/cT(x) \equiv f(x)$, otrzymujemy funkcję F w postaci (9).

Jeżeli istnieje czynnik zależny od innej trójki zmiennych, twierdzenie łatwo przenosi się na taki przypadek przez odpowiednią zamianę zmiennych.

Przystąpimy teraz do wyznaczenia czynnika anamorfozującego. Zakładamy, że funkcja F ma postać (9).

Łatwo sprawdzić, że

$$F_w(x,y,z,w)P_x(\xi,y,z,w)P_y(x,\eta,\zeta,\omega) \equiv \equiv \frac{1}{\varphi(x,y,z)}\cdot\frac{f'(\xi)g'(\eta)}{f^2(\xi)g^2(\eta)h(\zeta)k'(\omega)},$$

gdzie ξ,ζ,η,ω są dowolnymi liczbami spełniającymi nierówności $x_0 \leqslant \leqslant \xi \leqslant x_1$; $y_0 \leqslant \eta \leqslant y_1$; $z_0 \leqslant \zeta \leqslant z_1$; $w_0 \leqslant \omega \leqslant w_1$.

$$\varphi(x,y,z) = \frac{c}{F_w(x,y,z,w)P_x(\xi,y,z,w)P_y(x,\eta,\zeta,\omega)}, \tag{17}$$

gdzie c jest współczynnikiem liczbowym.

Udowodniliśmy

TWIERDZENIE 4. *Jeżeli funkcja $F(x,y,z,w)$ spełnia założenie twierdzenia 3 i jeżeli istnieją czynniki anamorfozujące, zależne tylko od x,y,z, sprowadzające równanie $F=0$ do postaci* (8), *to różnią się one co najwyżej stałym czynnikiem.*

III. Czynnik anamorfozujący, sprowadzający równanie $F(x,y,z,w)=0$ do postaci $f(x)+g(y)+h(z)k(w)=0$.

1. Rozpatrzymy przypadek czynnika anamorfozującego, zależnego od zmiennych x,y,z i sprowadzającego równanie $F(x,y,z,w)=0$ do postaci

$$f(x)+g(y)+h(z)k(w)=0. \tag{18}$$

Równanie ma w tym przypadku postać

$$F \equiv F(x,y,z,w) \equiv \frac{1}{\varphi(x,y,z)}[f(x)+g(y)+h(z)k(w)]=0. \tag{19}$$

Udowodnimy

TWIERDZENIE 5. *Jeżeli w kostce K, określonej jak w twierdzeniu* 1, *funkcja F jest określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi aż do rzędu czwartego włącznie oraz $F_w \neq 0$, $R_x \neq 0$, $R_y \neq 0$ i $R_z \neq 0$, gdzie $R \equiv F/F_w$, to na to, by istniał czynnik anamorfozujący, zależny tylko od x, y, z, sprowadzający równanie $F = 0$ do postaci* (18), *potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były tożsamości* (3a), (3b), (3c) *oraz*

$$\text{(20a)}\quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\ln|R_x| \equiv 0, \quad \text{(20b)}\quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\ln|R_y| \equiv 0, \quad \text{(20c)}\quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\ln|R_z| \equiv 0,$$

$$\text{(20d)}\quad R_{xy} \equiv 0, \qquad \text{(20e)}\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{R_x}{R_y}\right) \equiv 0.$$

przy czym

$$\varphi(x, y, z) = \frac{c}{F_w(x, y, z, w) R_x(\xi, y, z, w)},$$

gdzie ξ jest dowolną liczbą z przedziału $\langle x_0, x_1\rangle$, a c jest stałą.

D o w ó d k o n i e c z n o ś c i przebiega analogicznie jak w twierdzeniu 1.

D o w ó d d o s t a t e c z n o ś c i. Z tożsamości (3a), (3b) i (3c) mamy

$$\text{(21)}\qquad F_w \equiv A(w) B(x, y, z)$$

oraz

$$\text{(22)}\qquad F \equiv B(x, y, z) \int A(w)\,dw + C(x, y, z).$$

Następnie obliczamy funkcję R

$$R \equiv \frac{F}{F_w} \equiv \frac{\int A(w)\,dw}{A(w)} + \frac{1}{A(w)} \cdot \frac{C(x, y, z)}{B(x, y, z)}.$$

Wstawiając R w tożsamości (20a), (20b) i (20d) otrzymujemy

$$\text{(23a)}\quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\ln\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C}{B}\right)\right| \equiv 0, \qquad \text{(23b)}\quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\ln\left|\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{C}{B}\right)\right| \equiv 0,$$

$$\text{(23c)}\quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{C}{B}\right) \equiv 0.$$

Z tożsamości (23a) i (23c) wynika, że $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C}{B}\right) \equiv D(x) E(z)$, a z tożsamości (23b) i (23c) wynika $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{C}{B}\right) \equiv G(y) H(z)$.

Stąd

$$\frac{C}{B} \equiv E(z)\int D(x)dx + L(y,z), \tag{24a}$$

$$\frac{C}{B} \equiv H(z)\int G(y)dy + M(x,z). \tag{24b}$$

Porównując (24a) i (24b) i przekształcając otrzymujemy

$$E(z)\int D(x)dx - M(x,z) \equiv H(z)\int G(y)dy - L(y,z).$$

Obie strony tożsamości są funkcją tylko zmiennej z, czyli

$$E(z)\int D(x)dx - M(x,z) \equiv -N(z),$$

a stąd

$$M(x,z) \equiv E(z)\int D(x)dx + N(z).$$

Wstawiając $M(x,z)$ w tożsamość (24b) otrzymujemy

$$\frac{C}{B} \equiv H(z)\int G(y)dy + E(z)\int D(x)dx + N(z). \tag{25}$$

Z tożsamości (20e) wynika, że $E(z) \equiv aH(z)$, gdzie a jest współczynnikiem liczbowym i $a \neq 0$.

Zatem tożsamość (25) przyjmuje postać

$$\frac{C}{B} \equiv H(z)\int G(y)dy + aH(z)\int D(x)dx + N(z).$$

Z tożsamości (20c) mamy $\dfrac{\partial^2}{\partial z\partial y}\ln\left|\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{C}{B}\right)\right| \equiv 0$, a stąd tożsamość $H''(z)N'(z) - H'(z)N''(z) \equiv 0$. Zatem $N'(z) \equiv bH'(z)$ (b jest współczynnikiem liczbowym) i $N(z) \equiv bH(z) + c$ (c jest liczbą). Stąd

$$C(x,y,z) \equiv B(x,y,z)\left[H(z)\int G(y)dy + aH(z)\int D(x)dx + bH(z) + c\right].$$

Wstawiając wyrażenie na $C(x,y,z)$ w tożsamość (22) i podstawiając

$$\varphi(x,y,z) \equiv \frac{1}{B(x,y,z)H(z)}, \qquad k(w) \equiv c + \int A(w)dw,$$

$$h(z) \equiv \frac{1}{H(z)}, \qquad f(x) \equiv a\int D(x)dx, \qquad g(y) \equiv b + \int G(y)dy,$$

otrzymujemy funkcję F w postaci (19).

Warunki istnienia czynnika zależnego od x, y, w otrzymujemy zamieniając miejscami zmienne z i w w warunkach twierdzenia 5.

Zakładamy, że istnieje czynnik anamorfozujący, zależny od x, y, z. Łatwo zauważyć, że spełniona jest wtedy tożsamość

$$F_w(x, y, z, w) R_x(\xi, y, z, w) \equiv \frac{f'(\xi)}{\varphi(x, y, z)} \equiv \frac{c}{\varphi(x, y, z)},$$

gdzie ξ jest dowolną liczbą z przedziału $\langle x_0, x_1\rangle$, a c jest stałą.

Stąd

$$\varphi(x, y, z) \equiv \frac{c}{F_w(x, y, z, w) R_x(\xi, y, z, w)}. \tag{26}$$

Udowodniliśmy więc

TWIERDZENIE 6. *Jeżeli funkcja $F(x, y, z, w)$ spełnia założenia twierdzenia 5 i jeżeli istnieją czynniki anamorfozujące, zależne tylko od x, y, z i sprowadzające równanie $F = 0$ do postaci* (18), *to różnią się one co najwyżej stałym czynnikiem.*

2. Rozpatrzymy przypadek czynnika anamorfozującego, zależnego od zmiennych x, z, w i sprowadzającego równanie $F(x, y, z, w) = 0$ do postaci (18). Równanie ma w tym przypadku postać

$$F \equiv F(x, y, z, w) \equiv \frac{1}{\varphi(x, z, y)}[f(x) + g(y) + h(z)k(w)] = 0. \tag{27}$$

Udowodnimy

TWIERDZENIE 7. *Jeżeli w kostce K, określonej jak w twierdzeniu* 1, *funkcja $F(x, y, z, w)$ jest określona i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi aż do rzędu czwartego włącznie oraz $F_y \neq 0$, $Q_z \neq 0$, $Q_w \neq 0$, gdzie $Q \equiv \equiv F/F_y$, to na to, by istniał czynnik anamorfozujący zależny tylko od x, z, w, sprowadzający równanie $F \equiv 0$ do postaci* (18), *potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były tożsamości:*

(28a) $\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\ln|F_y| \equiv 0,$ (28b) $\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\ln|F_y| \equiv 0,$

(28c) $\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial w}\ln|F_y| \equiv 0,$ (28d) $Q_{xz} \equiv 0,$ (28e) $Q_{xw} \equiv 0,$

(28f) $\dfrac{\partial^2}{\partial z\,\partial w}\ln|Q_z| \equiv 0,$ (28g) $\dfrac{\partial^2}{\partial z\,\partial w}\ln|Q_w| \equiv 0,$

przy czym

$$\varphi(x, z, w) = \frac{c}{F_y(x, \eta, z, w)},$$

gdzie η jest dowolną liczbą z przedziału $\langle y_0, y_1\rangle$, a c jest stałą.

Dowód konieczności przebiega analogicznie jak w twierdzeniu 1.

Dowód dostateczności. Z tożsamości (28a), (28b) i (28c) wynika

$$F_y \equiv B(x, z, w) A(y)$$

oraz

$$F \equiv B(x, z, w) \int A(y) dy + C(x, z, w). \tag{29}$$

Stąd

$$Q \equiv \frac{\int A(y) dy}{A(y)} + \frac{1}{A(y)} \cdot \frac{C(x, z, w)}{B(x, z, w)}.$$

Z tożsamości (28d) i (28e) wynika

$$\frac{C}{B} \equiv D(x) + E(z, w).$$

Z tożsamości (28f) otrzymujemy

$$E(z, w) \equiv G(z) H(w) + L(w).$$

Z tożsamości (28g) wynika, że

$$L(w) \equiv aH(w) + b,$$

gdzie a i b są liczbami.

Zatem

$$\frac{C}{B} \equiv D(x) + G(z) H(w) + aH(w) + b.$$

Wstawiając funkcję C, obliczoną z powyższej tożsamości, w tożsamości (29) i podstawiając $\varphi(x, z, w) \equiv 1/B(x, z, w)$, $f(x) \equiv D(x)$, $g(y) \equiv b + \int A(y) dy$, $h(z) \equiv G(z) + a$, $k(w) \equiv H(w)$ otrzymujemy funkcję F w postaci (18).

Warunki istnienia czynnika anamorfozującego, zależnego od y, z, w, otrzymujemy zamieniając miejscami zmienne x i y w warunkach twierdzenia 7.

Zakładamy, że istnieje czynnik anamorfozujący zależny od zmiennych x, z, w. Łatwo zauważyć wtedy, że spełniona jest tożsamość

$$F_y(x, \eta, z, w) \equiv \frac{g'(\eta)}{\varphi(x, z, w)} \equiv \frac{c}{\varphi(x, z, w)},$$

gdzie η jest dowolną liczbą z przedziału $\langle y_0, y_1 \rangle$, a c jest stałą. Stąd

$$\varphi(x, z, w) \equiv \frac{c}{F_y(x, \eta, z, w)}. \tag{30}$$

Udowodniliśmy więc

TWIERDZENIE 8. *Jeżeli funkcja $F(x, y, z, w)$ spełnia założenia twierdzenia 7, i jeżeli istnieją czynniki anamorfozujące, zależne tylko od x, z, w, sprowadzające równanie $F = 0$ do postaci* (18), *to różnią się one co najwyżej stałym czynnikiem.*

PRZYKŁAD. Dane jest równanie

$$
\text{(a)} \quad F \equiv f^2(x)h(z)+f(x)g(y)h(z)+f(x)h^2(z)k(w)+ \\
+f(x)k(w)+g(y)k(w)+h(z)k^2(w) = 0.
$$

Należy zbadać czy istnieje czynnik anamorfozujący, zależny od x, z, w, sprowadzający to równanie do postaci (18).

Zakładamy, że w pewnej kostce K funkcja F jest określona i ciągła wraz z czwartymi pochodnymi cząstkowymi.

Z twierdzenia o ciągłości i różniczkowalności uogólnionych wielomianów nomograficznych wynika, że funkcje $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ i $k(w)$ mają, dla argumentów należących do kostki K, czwarte pochodne ciągłe. Zakładamy także, że w kostce tej $F_y \neq 0$ oraz $Q_z \neq 0$ i $Q_w \neq 0$, gdzie $Q \equiv F/F_y$.

Widać więc, że przy tych założeniach można stosować twierdzenie 7.

Kolejno obliczamy

$$
\text{(b)} \quad F_y \equiv f(x)h(z)g'(y)+g'(y)k(w) \equiv g'(y)[f(x)h(z)+k(w)],
$$

$$
\text{(c)} \quad Q \equiv \\
\equiv \frac{f^2(x)h(z)+f(x)g(y)h(z)+f(x)h^2(z)k(w)+f(x)k(w)+g(y)k(w)+h(z)k^2(w)}{g'(y)[f(x)h(z)+k(w)]},
$$

$$
\text{(d)} \quad Q_x \equiv \frac{f'(x)f^2(x)h^2(z)+2f(x)f'(x)h(z)k(w)+f'(x)k^2(w)}{g'(y)[f(x)h(z)+k(w)]^2} \equiv \frac{f'(x)}{g'(y)}
$$

$$
\text{(e)} \quad Q_z \equiv \frac{h'(z)k(w)[f^2(x)h^2(z)+2f(x)h(z)k(w)+k^2(w)]}{g'(y)[f(x)h(z)+k(w)]^2} \equiv \frac{h'(z)k(w)}{g'(y)},
$$

$$
\text{(f)} \quad Q_w \equiv \frac{k'(w)h(z)[f^2(x)h^2(z)+2f(x)h(z)k(w)+k^2(w)]}{g'(y)[f(x)h(z)+k(w)]^2} \equiv \frac{k'(w)h(z)}{g'(y)}.
$$

Z (b) wynika natychmiast spełnienie tożsamości (28a), (28b) i (28c).

Z (d) wynika spełnienie tożsamości (28d) i (28e).

Z (e) wynika spełnienie tożsamości (28f), a z (f) — tożsamości (28g).

Widać zatem, że istnieje czynnik anamorfozujący żądanej postaci. Z tożsamości (30) wynika, że ma on postać

$$
\varphi(x, z, w) \equiv \frac{c}{g'(\eta)[f(x)h(z)+k(w)]}.
$$

Podstawiając $c = g'(\eta)$ otrzymujemy czynnik anamorfozujący w najprostszej postaci

$$\varphi(x, z, w) \equiv \frac{1}{[f(x)h(z)+k(w)]}.$$

Prace cytowane

[1] J. Wojtowicz, *O sprowadzaniu równań do I i II formy kanonicznej równania trzeciego rzędu nomograficznego*, Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej Nr. 40, Budownictwo Nr 12, 1959.

[2] — *Über die korrekte Definition des Ranges eines nomographischen Polynoms und über die Stetigkeit und Differenzierbarkeit der verallgemeinerten nomographischen Polynome*, Annales Polonici Mathematici 8 (1960), str. 177-183.

[3] — *Metody sprowadzania równań czwartego i piątego rzędu nomograficznego do postaci kanonicznej*, Zastosowania Matematyki 5 (1960), str. 1-20.

Praca wpłynęła 20. 3. 1961

Я. ВОЙТОВИЧ (Варшава)

О АНАМОРФИЗИРУЮЩЕМ ФАКТОРЕ, ПРИВОДЯЩЕМ УРАВНЕНИЕ $F(x,y,z,w) = 0$ К КАНОНИЧЕСКИМ ФОРМАМ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО НОМОГРАФИЧЕСКОГО ПОРЯДКА С ЧЕТЫРЬМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

РЕЗЮМЕ

В работе представлены необходимые и достаточные условия существования анаморфизирующего фактора, приводящего уравнение $F(x, y, z, w) = 0$ к виду $f(x)+g(y)+h(z)+k(w) = 0$ (тождества (3)), к виду $f(x)g(y)h(z)k(w) - 1 = 0$ (тождества (3a-3c) и (10)), и к виду $f(x)+g(y)+h(z)k(w) = 0$ (тождества (3a-3c) и (20) или тождества (28)), в зависимости от вида фактора.

В каждом из этих случаев дается формула исчисления анаморфизирующего фактора. Кроме того, доказано, что анаморфизирующие факторы определенны с точностью до постоянной.

J. WOJTOWICZ (Warszawa)

ON THE ANAMORPHOSING FACTOR REDUCING THE EQUATION $F(x, y, z, w) = 0$ TO CANONICAL FORMS OF EQUATION OF FOURTH NOMOGRAPHIC RANK WITH FOUR VARIABLES

SUMMARY

This paper gives sufficient and necessary conditions of the existence of an anamorphosing factor reducing the equation

$$F(x, y, z, w) = 0$$

to the form $f(x)+g(y)+h(z)+k(w) = 0$ (identities (3)) to the form $f(x)g(y)h(z)k(w)-1 = 0$ (identities (3a-3c) and (10)) and to the form $f(x)+g(y)+h(z)k(w) = 0$ (identities (3a-3c) and (20) or identities (28) according to the form of the factor).

In each case the formula necessary for computing the anamorphosing factor is given. Besides, it is proved that each of the anamorphosing factors differs from any other at most by a constant.