ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXV (1977)

Remarque sur la stabilité dans le cas d'une équation linéaire à paramètre retardé avec une perturbation non linéaire

par Z. Mikołajska (Kraków)

Résumé. Dans le cas de l'équation

$$(1) \qquad y'(t) = ay(t) + by(t-h) + f(t, y_t(\cdot))$$

la relation

$$y(t) = y_0(t) + \int_h^t Y(t-\tau) f(\sigma, y_\tau(\cdot))\, d\tau \qquad (\text{où } y_\tau(\theta) = y(\tau+\theta) \text{ pour } -h \leqslant \theta \leqslant 0),$$

$y_0(t)$ est la solution de l'équation linéaire $u'(t) = au(t) + bu(t-h)$ et $Y(t)$ est la solution de la même équation avec la condition

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t = 1, \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

satisfaite pour chaque solution de l'équation (1), et la théorie de l'inégalité de la forme

$$u(t) \leqslant C_1 + C_2 \int_h^t g_1(\delta, u(\delta))\, d\delta$$

permettent d'obtenir une condition suffisante de stabilité de la solution banale de l'équation (1), plus générale que la condition du type de Poincaré–Liapounov ou Dini–Chukuchara (cf. [1]).

Envisageons l'équation différentielle

$$(1) \qquad y'(t) = ay(t) + by(t-h) + f(t, y_t(\cdot)),$$

où par définition $y_t(\cdot)$ est la fonction $y(t+\theta)$ de la variable θ pour $\theta \in [-h, 0]$.

Supposons que

I. $f(t, \varphi(\cdot))$ est continue pour $t \in [0, \infty)$, φ continue dans $[-h, 0]$.

II. Pour chaque fonction $g(t)$ continue dans l'intervalle $[0, h]$ il y a unicité des solutions $y(t)$ de l'équation (1) avec la condition

$$(2) \qquad y(t) = g(t), \qquad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant h.$$

Remarque 1. Sous les hypothèses I, II la solution $y(t)$ a la forme suivante (cf. [1]):

$$y(t) = y_0(t) + \int_h^t Y(t-\tau) f(\tau, y_\tau(\cdot))\, d\tau \quad \text{pour } t \geqslant 0 \tag{3}$$

où y_0 est la solution de l'équation linéaire

$$u'(t) = au(t) + bu(t-h) \quad \text{pour } t \geqslant h \tag{4}$$

avec la condition (2) et $Y(t)$ est la solution de l'équation (4) pour $t \geqslant 0$ telle que

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t = 0, \\ 0 & \text{pour } t \leqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

Hypothèses H. 1° Supposons qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que chaque solution de l'équation (4) avec la condition (2) satisfait à l'inégalité

$$|u(t)| \leqslant Ce^{-\lambda t} \quad \text{pour } t \geqslant h \tag{6}$$

(où C est une constante dépendant de $g(t)$).

2° Supposons que

$$|f(\tau, y_\tau(\cdot))| \leqslant \omega(\tau, \|y_\tau(\cdot)\|) \tag{7}$$

où

$$\|y_\tau(\cdot)\| = \sup_{-h \leqslant \theta \leqslant 0} |y(\tau+\theta)|. \tag{8}$$

3° $\omega(t, u)$ est une fonction continue par rapport à (t, u) pour $u \geqslant 0$, $t \geqslant 0$.

4° $\omega(t, u)$ est croissante par rapport à u.

5° Pour chaque $k \geqslant 0$ il existe une constante $a_k \geqslant 0$ telle que chaque solution $v(t)$ de l'èquation

$$v'(t) = k\,\omega(t, e^{-\lambda t} v(t)) \cdot e^{\lambda t} \tag{9}$$

satisfait à l'inégalité

$$|v(t)| \leqslant \gamma e^{a_k t} \quad \text{pour } t \geqslant h. \tag{10}$$

(γ dépend de la condition initiale et de k).

Théorème 1. *Sous les hypothèses* I, II *et* H *il existe une constante* a^* *telle que pour chaque fonction* $g(t)$ *continue dans* $[0, h]$ *on peut choisir une constante* $M > 0$ *de telle façon qu'on ait*

$$|y(t)| \leqslant Me^{a^* t} \quad \textit{pour } t \geqslant 0,$$

où $y(t)$ *est la solution de l'equation* (1) *avec la condition initiale* (2).

Démonstration. En vertu de la remarque 1 on a

$$y(t) = y_0(t) + \int_h^t Y(t-\tau) f\big(\tau, y_\tau(\cdot)\big) d\tau$$

et par suite

$$|y(t)| \leqslant |y_0(t)| + \int_h^t |Y(t-\tau)| \left| f\big(\tau, y_\tau(\cdot)\big) \right| d\tau$$

$$\leqslant c_1 e^{-\lambda t} + c_2 e^{-\lambda t} \int_h^t e^{\lambda\tau} \cdot \omega\big(\tau, \|y_\tau(\cdot)\|\big) d\tau$$

d'où, en vertu de (8), on a

$$\|y_t(\cdot)\| \leqslant c_1 e^{-\lambda(t-h)} + c_2 e^{-\lambda(t-h)} \int_h^t e^{\lambda\tau} \omega\big(\tau, \|y_\tau(\cdot)\|\big) d\tau.$$

Posons

$$\bar{C}_1 = e^{\lambda h} c_1, \quad \bar{C}_2 = e^{\lambda h} c_2, \quad \mu(t) = \|y_t(\cdot)\| e^{\lambda t}.$$

On a donc

(11)
$$\mu(t) \leqslant \bar{C}_1 + \bar{C}_2 \int_h^t e^{\lambda\tau} \omega\big(\tau, e^{-\lambda\tau} \mu(\tau)\big) d\tau.$$

Posons

$$w(t) = \bar{C}_1 + \bar{C}_2 \int_h^t e^{\lambda\tau} \omega\big(\tau, e^{-\lambda\tau} \mu(\tau)\big) d\tau.$$

On a, en vertu de (11),

$$w'(t) = e^{\lambda t} \bar{C}_2 \omega\big(t, e^{-\lambda t} \mu(t)\big) \leqslant C_2 e^{\lambda t} \omega\big(t, e^{-\lambda t} w(t)\big)$$

et par suite

(12)
$$w(t) \leqslant v(t) \quad \text{pour } t \geqslant 0$$

où $v(t)$ est la solution de l'équation (9) avec la condition

$$w(h) = v(h), \quad \text{et } k = \bar{C}_2.$$

En vertu de (10) il existe une constante γ_0 telle que

$$v(t) \leqslant \gamma_0 e^{a_k t} \quad \text{pour } t \geqslant h$$

d'où, en vertu de (11) et (12), on a

$$\|y_t(\cdot)\| e^{\lambda t} = \mu(t) \leqslant w(t) \leqslant \gamma_0 e^{a_k t} \quad \text{pour } t \geqslant h$$

et par suite

$$\|y_t(\cdot)\| \leqslant \gamma_0 e^{(a_k - \lambda)t} = \gamma_0 e^{a^* t} \quad \text{pour } t \geqslant h.$$

Le théorème 1 est ainsi démontré.

THÉORÈME 2. *Dans le cas où $f(t, 0) = 0$ et $a^* < 0$ (c'est-a-dire $a_k < \lambda$ pour $k = \bar{C}_2$) le théorème 1 entraîne la stabilité asymptotique de la solution $y = 0$ de l'équation* (1).

Remarque 2. Dans le cas où

$$|f(t, y_t(\cdot))| \leqslant \varepsilon \|y_t(\cdot)\| \tag{13}$$

avec

$$\varepsilon < \frac{\lambda}{c_2} e^{-\lambda h}$$

on a

$$\omega(t, v) = \varepsilon v$$

et l'équation (9) a la forme

$$v'(t) = \varepsilon k v(t),$$

donc

$$v(t) = v(h) e^{-\varepsilon k h} \cdot e^{\varepsilon k t} \qquad \text{pour } t \geqslant h,$$

$$\gamma = v(h) e^{-\varepsilon k h}, \qquad a_k = \varepsilon k,$$

$$v(h) = w(h) = \bar{C}_1, \qquad k = \bar{C}_2 = c_2 e^{\lambda h},$$

$$\varepsilon c_2 e^{\lambda h} = \varepsilon k < \lambda$$

et par suite, pour

$$\varepsilon < \frac{\lambda}{c_2} e^{-\lambda h}$$

on a

$$a_k < \lambda \qquad \text{pour } k = \bar{C}_2$$

donc il y a stabilité asymptotique.

Il est évident qu'il suffit de supposer l'inégalité (13) pour $\|y_t\|$ suffisamment petite.

Remarque 3. De la condition

$$\lim_{\|\varphi\| \to 0} \frac{|f(t, \varphi(\cdot))|}{\|\varphi(\cdot)\|} = 0 \tag{13'}$$

uniformément par rapport à t résulte la condition (13) pour $\|\varphi\|$ suffisamment petite, et par suite du théorème 2 résulte le théorème de Poincaré–Liapounov (cf. par exemple [1]).

Remarque 4. Le théorème du type de Dini–Chukuchara, c'est-à-dire le cas où

$$|f(t, \varphi(\cdot))| \leqslant \psi(t) \|\varphi(\cdot)\|, \qquad \int_0^\infty \psi(\tau) d\tau < \infty \tag{13''}$$

est aussi un cas particulaire du théorème 2. Dans le cas envisagé on a

$$\omega(t, u) = \psi(t)\cdot u.$$

L'équation (9) a la forme

$$(9'') \qquad u'(t) = k\psi(t)u(t), \qquad u(t) = u(0)e^{k\int_0^t \psi(\tau)d\tau}, \qquad \int_0^t \psi(\tau)d\tau \leqslant C < \infty$$

et par suite

$$|u(t)| \leqslant |u_0|e^{kC} \leqslant \gamma e^{a_k t}$$

pour chaque $a_k \geqslant 0$, $\gamma = |u_0|e^{kC}$.

Remarque 6. Posons

$$\omega(t, v) = Me^{at}\cdot v^{1+\beta}.$$

L'équation (9) a donc la forme

$$u'(t) = kMe^{at}(e^{-\lambda t}u)^{1+\beta}e^{\lambda t},$$

c'est-à-dire

$$u'(t) = kMe^{(a-\beta\lambda)t}u^{1+\beta}.$$

Dans le cas où $a-\beta\lambda < 0$ la solution $u(t)$ a pour

$$0 < u_0 < \left(\frac{kM\beta}{\lambda\beta - a}\right)^{-1/\beta}$$

la forme

$$u(t) = \left\{u_0^{-\beta} - \frac{kM\beta}{\lambda\beta - a}(1 - e^{(a-\lambda\beta)t})\right\}^{-1/\beta} \leqslant \left[u_0^{-\beta} - \frac{kM\beta}{\lambda\beta - a}\right]^{-1/\beta} = \gamma$$

et par suite en vertu du théorème 2 il y a stabilité asymptotique de la solution $y(t) = 0$ de l'équation (1). Le théorème ainsi obtenu est analogue au théorème bien connu de Ramarkischna dans le cas des équations différentielles sans retard (cf. par exemple [2]).

Remarque 7. Il est évident qu'on peut remplacer l'inégalité

$$|f(t, y_t(\cdot))| \leqslant Me^{at}\|y_t(\cdot)\|^{1+\beta} \qquad a-\beta\lambda < 0$$

par l'inégalité

$$|f(t, \varphi(\cdot))| \leqslant \psi(t)\,\|\varphi(\cdot)\|^{1+\beta}$$

où

$$\int_0^t \psi(s)e^{-\beta\lambda s}ds \leqslant C < \infty \qquad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty.$$

Dans le cas envisagé de l'équation

$$(9) \qquad u'(t) = k\psi(t)e^{-\beta\lambda t}u^{1+\beta}$$

on obtient

$$u^{-\beta}(t) = u_0^{-\beta} - k\int_0^t \psi(s)e^{-\beta\lambda s}ds \geqslant u_0^{-\beta} - kC \qquad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty$$

et par suite, pour $0 < u \leqslant [kC]^{-1/\beta}$, on a

$$u(t) = [u_0^{-\beta} - k\int_0^t \psi(s)e^{-\beta\lambda s}ds]^{-1/\beta} \leqslant [u_0^{-\beta} - kC]^{-1/\beta} = \gamma.$$

Travaux cités

[1] Bellman Cooke, *Differential-difference equation*, Academic Press, New York, London 1963.

[2] Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Издат. „Наука", Москва 1967.

Reçu par la Rédaction le 5. 6. 1975