ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XV (1964)

Sur la détermination numérique des points extrémaux de Fekete-Leja

par W. KLEINER (Kraków)

1. Les points extrémaux $\eta_{n1}, \ldots, \eta_{nn}$ (au sens de Fekete-Leja) de la frontière $C = \partial D$ d'un domaine plan D $(\infty \in D)$, définis par la condition de maximaliser le produit

$$V(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{i \neq k} |z_i - z_k|, \quad z_i \in C, \tag{1}$$

fournissent une expression approximée pour la fonction $w = f(z)$, $f'(\infty) = 1$, qui donne la répresentation conforme de D sur le cercle $|w| > d(C)$ ($d(C) = d$ désigne le diamètre transfini de C):

$$\begin{gathered} d \approx d_n = V(\eta_{n1}, \ldots, \eta_{nn})^{1/n(n-1)}, \\ f(z) \approx f_n(z) = \sqrt[n]{(z-\eta_{n1})\ldots(z-\eta_{nn})}, \quad f_n'(\infty) = 1. \end{gathered} \tag{2}$$

Pour déterminer les points η_{nk} par calculateur électronique, on doit donner un réseau E_n de $N = N(n)$ points sur C, pour lequel la machine doit 1° former toutes les combinaisons de n points, 2° calculer pour la k-ème le produit (1), 3° le retenir dans la mémoire (ainsi que les n points correspondants) s'il dépasse le dernier produit retenu (qui est alors à oublier), ou bien 4° l'oublier dans le cas contraire. Quand toutes les combinaisons seront examinées, on trouvera dans la mémoire un système $\gamma_{n1}, \ldots, \gamma_{nn}$ de points extrémaux de E_n.

Quel doit être E_n, et, en particulier, quel doit être le nombre $N(n)$, pour que la convergence $f_n \to f$ — et dans la mesure du possible le degré de convergence et l'exactitude de l'approximation (2) — subsiste?

Cette question importante et très discutée aux séminaires de M. Leja a été enfin résolue par M. Siciak; sans aucune condition supplémentaire sur C, M. Siciak démontre (dans une note à paraitre) que pour $N(n)^{1/n} \to \infty$, l'ensemble E_n réparti uniformément sur C, la méthode converge. Mais ce N étant très grand, une machine énorme devrait alors être employée pendant un temps très long.

Nous allons voir que pour $C \epsilon C^2$, $N = O(n^2)$ est suffisant pour conserver non seulement la convergence, mais aussi son degré.

La maximisation du produit (1) équivaut à la minimisation du logarithme de son réciproque, ce qui nous amène à la théorie du potentiel (voir [2], [3], [7]), dont nous nous sommes servis dans cette note.

2. Soit alors C une courbe simple (ou bien un arc simple) de courbure bornée, réprésentée par l'équation $z = z(s)$, $z(s+|C|) = z(s)$, où s désigne le paramètre naturel et $|C|$ la longueur de C, que nous supposons < 1. Il existe une mesure positive η sur C, de masse totale $\eta(C) = 1$, pour laquelle l'énergie

$$\|\eta\|^2 = \iint \log|z-\zeta|^{-1} d\eta\, d\eta$$

est minimale. η est dite mesure d'équilibre; $d = \exp(-\|\eta\|^2)$. On a sur C $|f'| = 2\pi\eta'$, et par le théorème de Kellog ([1], X, 1) il existe deux constantes positives c_1, c_2 telles que

$$0 < c_1 \leqslant \eta'(z) \leqslant c_2 < \infty\,, \qquad z \epsilon C\,. \tag{3}$$

3. Partageons C en n arcs $C_1, \ldots, C_n$, tels que $\eta(C_i) = 1/n$; on a alors par (3)

$$1/c_2 n \leqslant |C_i| \leqslant 1/c_1 n\,. \tag{4}$$

Soit z_i le point central de C_i (par rapport à la longueur de l'arc), et τ_n une mesure discrète positive sur C, portant la masse $1/n$ en chacun des points z_i:

$$\int g(z)\, d\tau_n = \sum g(z_i) n^{-1}\,.$$

Posons

$$\log_0 r^{-1} = \begin{cases} \log r^{-1} & (r > 0)\,, \\ 0 & (r = 0)\,, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|\tau_n\|_0^2 &= \iint \log_0 |z-\zeta|^{-1} d\tau_n\, d\tau_n = \sum_{i \neq k} n^{-2} \log|z_i - z_k| \\ &= n^{-2} \log V(z_1, \ldots, z_n)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Soit E_n l'ensemble de $N = [an^2]$ points $z(s_i)$, répartis sur C presque uniformément, à savoir

$$|C|/\theta a n^2 \leqslant s_i - s_{i-1} \leqslant |C|\,\theta/an^2\,, \qquad i = 1, \ldots, N\,, \tag{6}$$

où $\theta \geqslant 1$ et $a > 0$ sont des constantes arbitraires. Soit z_i^* le point dans $E_n \frown C_i$ le plus proche de z_i (donc $|z_i - z_i^*| \leqslant |C|\,\theta/an^2$) et τ_n^* la mesure portant la masse $1/n$ en chaque z_i^*:

$$\int g(z)\, d\tau_n^* = \sum g(z_i^*)/n\,.$$

Par (4), $|z_i - z_k|$, $|z_i^* - z_k^*| > 1/2c_2 n$ ($i \neq k$, n suffisamment grand). Par la formule de Lagrange nous avons alors pour un r compris entre ces deux distances

$$(7) \qquad \left|\log|z_i^* - z_k^*|^{-1} - \log|z_i - z_k|^{-1}\right| \\ = \left||z_i^* - z_k^*| - |z_i - z_k|\right| r^{-1} \leqslant 2 \cdot |C| \, \theta a^{-1} n^{-2} \cdot 2c_2 n = c_4 n^{-1},$$

donc

$$(8) \qquad \left| \|\tau_n^*\|_0^2 - \|\tau_n\|_0^2 \right| \leqslant c_4 n^{-1}.$$

4. Désignons par $G(Q)$ la classe de toutes les mesures discrètes positives, de masse totale unité, dont chacune porte des masses $1/n$ en n points de l'ensemble $Q \subset C$: pour chaque $\gamma \in G(Q)$ il y a n points distincts $a_1, \ldots, a_n \in Q$ tels que pour toute g continue

$$\int g(z) d\gamma = \sum g(a_i) n^{-1}.$$

Soit γ_n la mesure minimale dans $G(E_n)$, c'est-à-dire

$$\|\gamma_n\|_0^2 \leqslant \|\gamma\|_0^2 \quad \text{pour} \quad \gamma \in G(E_n)$$

($\|\gamma\|_0^2$ est défini par l'intégrale de la forme (5)); une telle mesure existe, puisque $\|\gamma\|_0^2$ est (dans $G(E_n)$) une fonction continue des points a_i sauf pour le cas où deux de ces points se confondent; si nous posons dans ce cas $\|\gamma\|_0^2 = \infty$, l'existence de la mesure minimale est évidente. Désignons par $\gamma_{n1}, \ldots, \gamma_{nn}$ les points a_i pour γ_n.

5. Posons dans le lemme [4] $\sigma = \eta$, $\varphi = 0$. Nous en tirons

$$\|\eta\|^2 + O(n^{-1}\log n) \geqslant \|\tau_n\|_0^2;$$

par (8) et par la définition de γ_n,

$$(9) \qquad \|\eta\|^2 + O(n^{-1}\log n) \geqslant \|\tau_n^*\|_0^2 \geqslant \|\gamma_n\|_0^2.$$

Soit η_n la mesure minimale dans $G(C)$; les points a_i correspondants sont justement $\eta_{n1}, \ldots, \eta_{nn}$. On a $\gamma_n \in G(C)$, donc

$$(10) \qquad \|\gamma_n\|_0^2 \geqslant \|\eta_n\|_0^2 = n^{-2} \log V(\eta_{n1}, \ldots, \eta_{nn}).$$

Nous avons démontré dans la note [5] que

$$(11) \qquad I_n = \|\eta_n\|_0^2 \geqslant \|\eta\|^2 - O(n^{-1}\log n);$$

donc, par (9), (10) et (11)

$$(12) \qquad \left| \|\eta\|^2 - \|\gamma_n\|_0^2 \right| \leqslant O(n^{-1}\log n).$$

6. Or, la relation $\left|\|\eta\|^2-\|\eta_n\|_0^2\right| = O(n^{-1}\log n)$ nous a suffi dans [3] pour obtenir des estimations quant à la convergence $\eta_n\to\eta$ et $f_n\to f$. Nous pouvons alors répéter toutes les considérations de [3] en y remplaçant η_n par γ_n; nous obtenons ainsi les résultats suivants ([1]).

THÉORÈME I.

$$[\gamma_n-\eta]\leqslant cn^{-1/2}\log n\,,\qquad n\geqslant n_0\,, \tag{13}$$

où c et n_0 dépendent de C, a et θ, et

$$[\gamma_n-\eta] = \sup_L|\gamma_n(L)-\eta(L)|$$

où L parcourt la classe de tous les arcs partiels de C.

THÉORÈME II. *Les fonctions*

$$h_n(z) = \sqrt[n]{(z-\gamma_{n1})\dots(z-\gamma_{nn})}\,,\qquad g'(\infty)=1\,, \tag{14}$$

convergent vers $f(z)$ presque uniformément dans D; plus précisément

$$\left|\log\frac{1}{h_n(z)}-\log\frac{1}{f(z)}\right|\leqslant c\frac{\log n}{\sqrt{n}}V(z)\,,\qquad n\geqslant n_0\,, \tag{15}$$

$$V(z) = \mathrm{Var}\{\log(z-\zeta)^{-1}\,,\ \zeta\in C\}\,.$$

THÉORÈME III. *Les polynômes $S_n^*(w^{-1})$ de degré n de la variable w^{-1}, définis par les conditions*

$$S_{n-1}^*(w_{nk}^{-1}) = \gamma_{nk}-w_{nk}\,,\qquad w_{nk} = d\cdot e^{2\pi ik/n}\,, \tag{16}$$

$$d = d(C) = \exp(-\|\eta\|^2)\,,$$

convergent vers la fonction $z=f^{-1}(w)-w$ (où f^{-1} donne la représentation conforme de $K=\{w\colon |w|>d\}$ sur D, $f^{-1\prime}(\infty)=1$); la convergence est uniforme dans le cercle fermé $\bar{K}$. Pour une courbe C analytique,

$$|S_n^*(w^{-1})-f^{-1}(w)+w|\leqslant O(n^{-1/2}\log^2 n)\,,\qquad w\in\bar{K}\,. \tag{17}$$

La démonstration des théorèmes II et III est analogue à celle des théorèmes II et III de [3].

([1]) $|\gamma_{ni}-\gamma_{nk}|\geqslant c_5 n^{-2}$, on peut donc éviter les difficultés de [3] en s'appuyant directement sur [6]. Soit γ_{ni}^* la mesure de densité constante sur l'arc C_i de centre γ_{ni} et de longueur n^{-3}, telle que $\gamma_{ni}^*(C_i)=\gamma_n(C_i)$, et $\gamma_n^*=\sum_i\gamma_{ni}^*$. On a $\|\gamma_n^*\|^2=\sum\|\gamma_{ni}^*\|^2+\sum\sum_{i\neq k}(\gamma_{ni}^*,\gamma_{nk}^*)$ (voir [6]); la première somme est $O(n^{-1}\log n)$, la seconde diffère de $\|\gamma_n\|_0^2$ par $O(n^{-1})$ (ce que l'on vérifie par la méthode du n° 3). Par conséquent $\left|\|\gamma_n^*\|^2-\|\gamma_n\|_0^2\right|\leqslant O(n^{-1}\log n)$, donc par (12) $\|\gamma_n^*-\eta\|^2\leqslant O(n^{-1}\log n)$ (on doit se rappeler que le potentiel de η est $\equiv\|\eta\|^2$ sur C; pour les détails voir formule (9) [3]). La densité de cette dernière mesure est $O(n^2)$; par (32) [6] on obtient par un calcul élémentaire $[\gamma_n^*-\eta]\leqslant O(n^{-1/2}\log n)$. Donc $[\gamma_n-\eta]\leqslant O(n^{-1/2}\log n)$.

Remarque 1. Pour les calculs numériques, nous choisissons un $a > 0$, trouvons $[an^2]$ points sur C, qui partagent notre courbe en arcs „égaux" (l'exactitude n'en vaut pas la peine) et nous cherchons n points $\gamma_{n1}, \ldots, \gamma_{nn}$ parmi les $[an^2]$, tels que le produit $V(\gamma_{n1}, \ldots, \gamma_{nn})$ soit le plus grand. Ce sont justement les points demandés. Nous ne nous occupons pas des C_i: ils se forment à notre insu au cours de la construction que nous venons de réaliser.

Pour les calculs numériques, on remplacera dans (16) la quantité inconnue d par

$$(18) \qquad d_n^* = V(\gamma_{n1}, \ldots, \gamma_{nn})^{1/n(n-1)} = \exp\left(-\|\gamma_n\|_0^2 n/(n-1)\right) ;$$

l'erreur qui en résulte est $O(n^{-1}\log n)$ (voir (12)).

Remarque 2. On ne doit pas prendre un a trop petit, car la valeur numérique de l'erreur en augmente; $a = 1$ ou $a = \frac{1}{2}$ est à recommander.

Remarque 3. Si nous substitutons pour a la quantité (dépendent de n) $a = a^*/\log n$, les théorèmes I-III restent vrais sans aucun changement.

Si nous n'avons en vue que la convergence, il suffit que E_n soit formé de $N^*(n)$ points, où $N^*(n)n^{-1}\log^{-2}n \to \infty$. Nous avons alors $h_n(z) \to f(z)$ presque uniformement dans D. Les estimations (13) et (15) et le théorème III ne sont plus valables.

Remarque 4. Posons $a = 1/\log n$; pour $\theta = 1$ on calcule alors aisément

$$0 \leqslant \|\gamma_n\|_0^2 - \|\eta_n\|_0^2 \leqslant 2n^{-1}(\log n + \varepsilon_n) , \qquad \varepsilon_n \to 0 .$$

Dans la note [5] nous avons obtenu l'inégalité

$$\|\eta_n\|_0^2 \leqslant \|\eta\|^2 \leqslant \|\eta_n\|_0^2 + 2(n-1)^{-1}(\log n + 1) .$$

Il s'ensuit que l'on a dans ce cas l'estimation suivante de l'erreur (voir (18)):

$$(19) \qquad |\log d_n^*/d| \leqslant qn^{-1}(\log n + 1 + \varepsilon_n^*) , \qquad \varepsilon_n^* \to 0 , \ q \leqslant 2 .$$

L'approximation du diamètre transfini d de la courbe C par la quantité d_n est maintenant meilleure (en général) que par d_n (2), où $q = 2$. De même, l'approximation de f par h_n et de $f^{-1} - w$ par S_n^* semble être meilleure; en tout cas, les estimations de [3] (th. I-III) restent en vigueur sans changer les constantes c, c_8. Toute la remarque est valide a fortiori pour un a constant et n suffisamment grand (par example $a = \frac{1}{2}, n \geqslant 9$).

Remarque 5. M. Bach et l'auteur ont énoncé l'hypothèse selon laquelle $|\eta_{ni} - \eta_{nk}| \geqslant O(n^{-2})$ $(i \neq k)$ pour C compact arbitraire. Il en résulterait que $N(n) = O(n^3)$ soit suffisant dans ce cas général.

Travaux cités

[1] Г. М. Голузин, (G. M. Golusin), *Геометрическая теория функций комплексного переменного,* Москва-Ленинград 1952.

[2] J. Górski, *Méthode des points extrémaux de résolution du problème de Dirichlet dans l'espace,* Ann. Polon. Math. 1 (1955), p. 418-429.

[3] W. Kleiner, *Sur l'approximation de la représentation conforme par la méthode des points extrémaux de M. Leja,* Ann. Polon. Math. 14 (1964), p. 134-144.

[4] — *Sur la condensation des masses,* Ann. Polon. Math., ce volume, p. 85-90.

[5] — *Sur l'approximation du diamètre transfini,* Ann. Polon. Math. 12 (1962), p. 171-173.

[6] — *Une condition de Dini-Lipschitz dans la théorie du potentiel,* Ann. Polon. Math. 14 (1964), p. 121-134.

[7] A. Szybiak, *Some properties of plane sets with positive transfinite diameter,* Ann. Polon. Math. 3 (1956), p. 19-28.

UNIVERSITÊ JAGELLONNE
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 30. 6. 1962