ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXI (1976)

L'équation de translation sur une structure avec zéro

par Zenon Moszner et Józef Tabor (Kraków)

Résumé. Soit $(S, \cdot)$ une structure algébrique par rapport à une opération „$\cdot$" binaire, interne, mais pas nécessairement toujours définie. Considérons l'ensemble $S \cup \{0\}$, où $0 \notin S$. Nous élargissons l'opération „$\cdot$" en posant

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad \text{pour chaque } a \text{ de } S \cup \{0\}.$$

Nous appellerons la structure $(S \cup \{0\}, \cdot)$ définie comme plus haut: *structure avec zéro*.

Soit X un ensemble arbitraire. Nous disons qu'une fonction $F\colon X \times S \multimap X$ satisfait à l'équation de translation si est remplie la condition suivante:

— si $F(x, a)$ et $a \cdot \beta$ sont définis, alors $F(F(x, a), \beta)$ et $F(x, a \cdot \beta)$ son définis et

$$F(F(x, a), \beta) = F(x, a \cdot \beta).$$

Le but de cette note est de déterminer les liaisons entre la solution de l'équation de translation sur la structure $(S, \cdot)$ et la solution de cette équation sur la structure $S \cup \{0\}, \cdot)$ avec zéro.

Soit $(S, \cdot)$ une structure algébrique par rapport à une opération „$\cdot$" binaire, interne, mais pas nécessairement toujours définie. Considérons l'ensemble $S \cup \{0\}$, où $0 \notin S$. Nous élargissons l'opération „$\cdot$" en posant

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \quad \text{pour chaque } a \text{ de } S \cup \{0\}.$$

Nous appellerons la structure $(S \cup \{0\}, \cdot)$ définie comme plus haut: structure avec zéro.

Admettons la

Definition 1 ([4]). Soit X un ensemble arbitraire et $(S, \cdot)$ une structure algébrique. Nous disons qu'une fonction $F\colon X \times S \multimap X$, c'est-à-dire une fonction définie sur un sous-ensemble de l'ensemble $X \times S$ et à valeurs dans X, satisfait à l'équation de translation si est remplie la condition suivante:

— si $F(x, a)$ et $a \cdot \beta$ sont définis, alors $F(F(x, a), \beta)$ et $F(x, a \cdot \beta)$ sont définis et

$$F(F(x, a), \beta) = F(x, a \cdot \beta).$$

Le but de cette note est de déterminer les liaisons entre la solution de l'équation de translation sur la structure $(S, \cdot)$ et la solution de cette équation sur la structure $(S \cup \{0\}, \cdot)$.

1. Considérons une fonction $F\colon X\times S \multimap X$, c'est-à-dire une fonction définie sur un sous-ensemble de $X\times S$ et à valeurs dans X et désignons par:

$$O_x^1 = F(\{x\}, S),$$
$$O_x^{n+1} = F(O_x^n, S) \quad \text{pour } n = 1, 2, \ldots,$$
$$O_x = \bigcup_{n\in N} O_x^n \quad \text{où } N \text{ est l'ensemble des nombres entiers positifs},$$
$$B_x^1 = \{y\colon \bigvee_{a\in S} F(y, a)\in[O_x\cup\{x\}]\},$$
$$B_x^{n+1} = \{y\colon \bigvee_{a\in S} F(y, a)\in B_x^n\} \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$B_x = \bigcup_{n\in N} B_x^n,$$
$$S_x = O_x\cup B_x.$$

Nous définissons sur la famille $\{S_x\}$ des ensembles S_x non-vides la relation „$\sim$" suivante:

$S_x \sim S_y$ si et seulement s'il existe une suite $x = x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ telle que:

$$S_{x_i}\cap S_{x_{i+1}} \neq \emptyset \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

On voit facilement que la relation „$\sim$" est une relation d'équivalence. Posons

$$P_x = \{y\in X\colon \bigvee_{z\in X} y\in S_z\wedge S_z\in[S_x]\} = \bigcup_{S_z\in[S_x]} S_z,$$

où $[S_x]$ est une classe d'équivalence de la relation „$\sim$" déterminée par l'ensemble S_x.

Théorème 1. *La fonction $F\colon X\times(S\cup\{0\})\multimap X$ satisfait à l'équation de translation si et seulement si*

(a) *F satisfait à cette équation sur l'ensemble $X\times S$,*

(b) *la fonction $F(x, 0)$ satisfait aux conditions suivantes:*

(1) *elle est constante sur chaque ensemble P_x qui est formé comme ci-dessus avec la fonction $F|X\times S$ comme base,*

$$\bigwedge_{x\in F(X,0)} \bigwedge_{a\in S\cup\{0\}} \big(F(x, a) = x\big). \tag{2}$$

Démonstration. Supposons que la fonction $F\colon X\times(S\cup\{0\}\multimap X$ satisfasse à l'équation de translation. Il est évident que cette fonction satisfait aussi à cette équation sur l'ensemble $X\times S$. Considérons la famille des ensembles P_x déterminés par la fonction $F|X\times S$. Démontrons qu'on a (1). Soit O_x^1 un ensemble non-vide et $y\in O_x^1$. Il existe un a de S tel que:

$$y = F(x, a).$$

Dans ce cas $F(F(x, a), 0)$ est définie et nous avons

$$F(y, 0) = F(F(x, a), 0) = F(x, 0).$$

Il en résulte que pour y de O_x^1 nous avons

$$F(y, 0) = F(x, 0). \tag{3}$$

En supposant que la relation (3) ait lieu pour y de O_x^n, nous allons démontrer qu'elle a lieu aussi pour y de O_x^{n+1}. L'élément y de O_x^{n+1} est de la forme

$$y = F(z, a)$$

pour un z de O_x^n et pour un a de S. Nous avons d'après l'hypothèse de récurrence:

$$F(y, 0) = F(F(z, a), 0) = F(z, 0) = F(x, 0).$$

La relation (3) a donc lieu pour chaque y de O_x. On peut démontrer d'une manière analogue qu'elle a lieu aussi pour y de B_x. La fonction $F(x, 0)$ est donc stable sur S_x et de là (1) a lieu.

Si $x \in F(X, 0)$, c'est-à-dire si $x = F(y, 0)$ pour un y de X, alors pour chaque a de $S \cup \{0\}$ nous avons:

$$x = F(y, 0) = F(F(y, 0), a) = F(x, a).$$

La condition (2) est donc aussi remplie.

Supposons à présent que la fonction F: $X \times (S \cup \{0\}) \circ\!\!\to X$ satisfasse sur l'ensemble $X \times S$ à l'équation de translation et que la fonction $F(x, 0)$ satisfasse aux conditions (1) et (2). Nous démontrerons que la fonction F satisfait à l'équation de translation sur l'ensemble $X \times (S \cup \{0\})$ tout entier.

Considérons un x de X et a de S tel que $F(x, a)$ est définie. Il existe un y de X tel que $F(x, a) \in P_y$. Il résulte de la construction de l'ensemble P_y que $x \in P_y$. D'après (1) nous avons

$$F(F(x, a), 0) = F(x, 0).$$

Si $F(x, 0)$ est définie, d'après la condition (2) nous avons donc pour chaque a de $S \cup \{0\}$

$$F(F(x, 0), a) = F(x, 0).$$

Il en résulte que la fonction F satisfait à l'équation de translation sur l'ensemble $X \times (S \cup \{0\})$ tout entier. La démonstration du théorème 1 est donc terminée.

Considérons une fonction F: $X \times S \circ\!\!\to X$ et désignons par

$$E = \{x \in X: \bigwedge_{a \in S} F(x, a) = x\}.$$

Nous allons démontrer le

Théorème 2 *Si la fonction F: $X\times S \Rightarrow X$ non-vide satisfait à l'équation de translation et $E \neq \emptyset$, alors une fonction f: $X \Rightarrow X$ satisfait aux conditions* (1),

$$(4) \qquad \bigwedge_{x\in f(X)} \bigwedge_{a\in S} \big(F(x, a) = x\big)$$

et

$$(5) \qquad \bigwedge_{x\in f(X)} \big(f(x) = x\big)$$

si et seulement si elle est construite comme il suit:

— *nous prenons un sur-ensemble Z de l'ensemble $\bigcup_{x\in X} P_x$ et un ensemble $E^* \subset E$, $E^* \neq \emptyset$ tel que pour chaque ensemble P_x on ait:*

$$\overline{\overline{P_x \cap E^*}} \leqslant 1,$$

ensuite

(a) *dans le cas où $P_x \cap E^* = \{y_0\}$ nous prenons*

$$f(y) = y_0 \quad \textit{pour } y \textit{ de } P_x,$$

(b) *dans le cas où $P_x \cap E^* = \emptyset$ nous posons*

$$f(y) = y_1 \quad \textit{pour chaque } y \textit{ de } P_x,$$

où y_1 est un élément arbitrairement fixé de E^*,

(c) *sur l'ensemble $Z \setminus \bigcup_{x\in X} P_x$ nous admettons f arbitraire, mais à valeurs dans l'ensemble E^*.*

Démonstration. Puisque les ensembles P_x, comme classes d'équivalence, sont identiques ou disjoints, la fonction f est bien définie sur l'ensemble Z par (a), (b) et (c). Il est évident que cette fonction satisfait aux conditions (1), (4) et (5).

Supposons que la fonction f: $X \Rightarrow X$ satisfasse aux conditions (1), (4) et (5) et désignons $E^* = f(X)$ et par Z le domaine de la fonction f. Il résulte de (4) que $E^* \subset E$. D'après (1) et puisque F est non-vide nous avons $\bigcup_{x\in X} P_x \subset Z$ et $E^* \neq \emptyset$. Supposons que y_1 et y_2 appartiennent à l'ensemble $P_x \cap E^*$. D'après (1) et (5) nous avons

$$y_1 = f(y_1) = f(y_2) = y_2,$$

donc $\overline{\overline{P_x \cap E^*}} \leqslant 1$.

Si $P_x \cap E^* = \{y_0\}$, donc d'après (1) et (5) nous avons

$$f(y) = f(y_0) = y_0 \quad \text{pour } y \text{ de } P_x.$$

La démonstration du théorème 2 est donc terminée.

Il résulte du théorème 2 que l'existence de la fonction f: $X \Rightarrow X$ qui satisfait aux conditions (1), (4) et (5) (avec la fonction F: $X\times S \Rightarrow X$

satisfaisant à l'équation de translation) est équivalente à la condition $E \neq \emptyset$ (l'ensemble E^* qui ne contient qu'un élément de E satisfait évidemment aux conditions dans (a)). La condition $E \neq \emptyset$ est alors aussi équivalente à la possibilité du prolongement de la fonction F à une fonction satisfaisant à l'équation de translation sur l'ensemble $X \times (S \cup \{0\})$ tout entier.

Si

(6) $$\overline{\overline{E \cap P_x}} \leqslant 1 \quad \text{pour chaque } x \text{ de } X,$$

l'ensemble E^*-comme sous-ensemble non-vide de E — peut être arbitrairement choisi. Mais cette condition (6) ne doit pas être remplie même dans le cas d'un groupoide de Brandt au lieu de la structure S.

Exemple. Posons $X = \{x, y, z\}$, $S = \{a, b\} \times \{a, b\}$ et définissons l'opération „·" comme il suit:

$\cdot$	(a, a)	(a, b)	(b, a)	(b, b)
(a, a)	(a, a)	(a, b)	—	—
(a, b)	—	—	(a, a)	(a, b)
(b, a)	(b, a)	(b, b)	—	—
(b, b)	—	—	(b, a)	(b, b)

Posons:

$$F(x, a) = x \quad \text{pour } a \text{ de } S,$$
$$F(y, a) = y \quad \text{pour } a \text{ de } S,$$
$$F(z, (a, a)) = F(z, (a, b)) = y$$

et

$$F(z, (b, b)) = F(z, (b, a)) = x.$$

On peut facilement vérifier que la fonction F satisfait à l'équation de translation. De plus nous avons $P_z = X$, $E = \{x, y\}$. De là

$$\overline{\overline{P_z \cap E}} = 2.$$

La fonction $F\colon X \times S \Rightarrow X$ est dite transitive si

(7) $$\bigwedge_{x, y \in X} \bigvee_{a \in S} (F(x, a) = y).$$

Si la fonction F satisfait à l'équation de translation, la condition (7) est équivalente à la suivante:

(8) $$\bigwedge_{x \in X} (O_x^1 = X).$$

Supposons que la fonction F satisfasse à l'équation de translation sur $X \times (S \cup \{0\})$ et à la condition (7). Soit x arbitraire de $F(X, \{0\})$. D'après (7) nous avons:

$$\bigwedge_{y \in X} \bigvee_{a \in S \cup \{0\}} \big(F(x, a) = y\big).$$

Il en résulte d'après la condition (2) que $X = \{x\}$, c'est-à-dire $\overline{\overline{X}} = 1$. D'après la définition 1 l'ensemble $F(X, \{0\})$ peut être vide seulement dans le cas où X est vide. De là nous avons $\overline{\overline{X}} \leqslant 1$ dans le cas général.

On voit aussi facilement que si $\overline{\overline{X}} \leqslant 1$, alors F est transitive (vide dans le cas où $X = \emptyset$). Il en résulte que la condition $\overline{\overline{X}} \leqslant 1$ est équivalente à la transitivité de la solution de l'équation de translation sur l'ensemble $X \times (S \cup \{0\})$ tout entier.

2. Supposons que la structure $(S, \cdot)$ soit un groupe $\mathcal{G}$. Dans ce cas la fonction qui satisfait à l'équation de translation d'après la définition 1, doit être définie sur le produit cartésien d'un ensemble (d'un sous-ensemble de l'ensemble X) et du groupe $\mathcal{G}$ [3]. Nous pouvons donc omettre toutes les suppositions au sujet du sens des fonctions considérées.

La solution générale de l'équation de translation, définie sur $X \times \mathcal{G}$ tout entier est de la forme suivante (voir p. ex. [1]):

(9) $$F(x, a) = g_k^{-1}\big(g_k(f(x)) \cdot a\big) \quad \text{pour } f(x) \text{ de } X_k,$$

où

(9a) f est une fonction de X à X ($f\colon X \to X$), telle que $f\big(f(x)\big) = f(x)$,

(9b) $\{X_k\}_{k \in K}$ est une décomposition de l'ensemble $f(X)$, c'est-à-dire: $X_k \neq \emptyset$, $\bigcup_{k \in K} X_k = f(X)$, $X_{k_1} \cap X_{k_2} = \emptyset$ pour $k_1 \neq k_2$, telle que pour chaque k de K il existe un sous-groupe $\mathcal{G}_k$ du groupe $\mathcal{G}$ tel que l'indice de $\mathcal{G}_k$ par rapport à $\mathcal{G}$ est égal à $\overline{\overline{X}}_k$,

(9c) g_k est une bijection de l'ensemble X_k à la famille $\mathcal{G}/\mathcal{G}_k$ de la classe d'équivalence à droit de $\mathcal{G}$ par rapport à $\mathcal{G}_k$.

Les ensembles X_k sont appelés *fibres transitives* de la solution $F(x, a)$ car on a la condition suivante:

$$\bigwedge_{x, y \in X_k} \bigvee_{a \in \mathcal{G}} \big(F(x, a) = y\big).$$

Il est évident d'après (9) que $O_x^n = X_k$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et k tel que $f(x) \in X_k$ et que

(10) $$B_x^n = \Big\{y\colon \bigvee_{a \in \mathcal{G}} F(y, a) \in X_k\Big\} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \tilde{X}_k,$$

pour $n = 1, 2, \ldots$ et k comme ci-dessus. Les ensembles (10) qui dépendent seulement de l'indice k, sont dits *extensions des fibres transitives* X_k. Ils forment une décomposition de l'ensemble X et par suite ils forment une famille $\{P_x\}_{x \in X}$.

Puisque $X_k \subset \tilde{X}_k$ et que l'ensemble E est la somme de fibres transitives qui n'ont qu'un seul élément on a

$$\overline{\overline{E \cap P_k}} \leqslant 1, \quad \text{pour chaque } x \text{ de } X.$$

Il en résulte que dans le cas d'un groupe l'ensemble E^* dans la construction (a), (b) du théorème 2 peut être choisi arbitrairement comme un sous-ensemble nonvide de l'ensemble E.

On peut donc construire le prolongement de la solution $F(x, a)$ de l'équation de translation sur $X \times \mathcal{G}$ à la solution sur $X \times (\mathcal{G} \cup \{0\})$ comme il suit:

— la fonction $F(x, 0)$ doit admettre les propriétés suivantes:

1° $F(x, 0)\colon X \to E$,

2° $F(x, 0) = x$ sur $F(X, 0)$,

3° $F(x, 0)$ est constante sur chaque $\tilde{X}_k$.

On considère dans beaucoup des applications de l'équation de translation (voir [2]) les différentes propriétés complémentaires des solutions de cette équation. Il sera utile de considérer toutes ces propriétés et de les comparer pour un groupe et un groupe avec zéro.

I. *Transitivité.* La condition de transitivité (7) pour un groupe est équivalente aux conditions:

$$\bigwedge_{x \in X} \big(f(x) = x\big) \quad \text{et} \quad \overline{\overline{K}} = 1.$$

Nous savons déjà que la transitivité pour une structure avec zéro $S \cup \{0\}$ est équivalente à la condition $\overline{\overline{X}} \leqslant 1$.

II. *Presque-transitivité.* On définit cette propriété comme il suit:

$$\bigwedge_{x, y \in X} \bigvee_{a \in S} \big(F(x, a) = y \vee F(y, a) = x\big). \tag{11}$$

Cette propriété sur un groupe, c'est-à-dire pour un groupe $\mathcal{G}$ au lieu de la structure S, est équivalente à la transitivité.

Pour un groupe avec zéro la condition équivalente à la presque-transitivité est la suivante:

$\overline{\overline{X}} \leqslant 1$ ou $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{E}} = 2$ et $\overline{\overline{E^*}} = 1$ ou $\overline{\overline{X}} > 2$ et il y a les deux fibres transitives $\{x_0\}$ et $X \setminus \{x_0\}$.

On peut aussi formuler cette condition comme suit:

— il existe au plus les deux fibres transitives remplissant l'ensemble X, l'une n'ayant qu'un seul élément et la deuxième, si elle existe, n'appartenant pas à l'ensemble E^*.

Démonstration de la suffisance. Si $\overline{\overline{X}} \leqslant 1$ la solution est transitive, alors elle est aussi presque-transitive. Dans le cas $\overline{\overline{E}} = \overline{\overline{X}} = 2$ et $\overline{\overline{E^*}} = 1$ nous avons $X = \{x, y\}$ et $F(x, 0) = F(y, 0) = x$ ou $F(x, 0) = F(y, 0) = y$ et de plus $F(x, a) = x$ et $F(y, a) = y$ pour chaque a de $\mathcal{G}$ (puisque $X = E$), alors F est presque-transitive.

Dans le troisième cas on a: $F(x, 0) = x_0$ pour chaque x de X, $F(x_0, a) = x_0$ pour chaque a de $\mathcal{G}$ et, comme $X \setminus \{x_0\}$ est une fibre transitive, nous avons

$$\bigwedge_{x,y \in X \setminus \{x_0\}} \bigvee_{a \in \mathcal{G}} \big(F(x, a) = y\big)$$

et dans ce cas aussi F est presque-transitive.

Démonstration de la nécessité. Supposons que la conclusion ne soit pas vraie. Il en résulte que

(a) si $X = \{x, y\}$, alors

(a_1) $E = \{x\}$ ou (a_2) $E = E^* = \{x, y\}$ ou

(b) si $\overline{\overline{X}} > 2$, alors puisque $E^* \neq \emptyset$ nous avons

(b_1) $\overline{\overline{E^*}} > 2$ ou (b_2) $E^* = \{x_0\}$ et l'ensemble $X \setminus \{x_0\}$ n'est pas une fibre transitive.

Dans le cas (a_1) nous avons $E^* = E$, de là $F(x, a) = F(y, a) = x$ pour chaque a de $\mathcal{G} \cup \{0\}$ et alors il n'existe pas d'élément β de $\mathcal{G} \cup \{0\}$ pour lequel $F(y, \beta) = y$, F n'est donc pas presque-transitive. Dans le cas (a_2) nous avons $F(x, a) = x$ et $F(y, a) = y$ pour chaque a de $\mathcal{G} \cup \{0\}$, donc (11) ne peut pas être remplie. Dans le cas (b_1) il existe des x_1, x_2 de E^* pour lesquels $x_1 \neq x_2$. De là, comme $E^* \subset E$, nous avons: $F(x_1, a) = x_1$ et $F(x_2, a) = x_2$ pour chaque a de $\mathcal{G} \cup \{0\}$. Il en résulte que (11) ne peut pas être remplie pour $x = x_1$ et $y = x_2$.

Dans le cas (b_2) il existe deux éléments x et y de $X \setminus \{x_0\}$ pour lesquels il n'existe pas d'élément a de $\mathcal{G}$ pour lequel $F(x, a) = y$ ou $F(y, a) = x$. Dans ce cas aussi (11) ne peut pas être remplie, puisque $F(x, 0) = F(y, 0) = x_0$.

III. *Transitivité simple*, c'est-à-dire transitivité et univalence de la fonction $F(x, a)$ par rapport à la variable a.

Sur le groupe $\mathcal{G}$ cette propriété de transitivité simple est équivalente aux conditions:

$$\bigwedge_{x \in X} \big(f(x) = x\big) \quad \text{et} \quad \overline{\overline{K}} = 1 \text{ et } \overline{\overline{\mathcal{G}_k}} = 1$$

(c'est-à-dire $\mathcal{G}_k = \{e\}$, où e est l'élément neutre du groupe $\mathcal{G}$).

Sur un groupe avec zéro $\mathcal{G} \cup \{0\}$ la transitivité nous donne $\overline{\overline{X}} \leqslant 1$. Si $X = \{x\}$, on a $F(x, e) = F(x, 0) = x$, donc la fonction F ne peut pas être univalente. Il en résulte que $X = \emptyset$ est une condition suffisante et nécessaire pour que F soit transitive simple.

IV. *L'univalence par rapport à x* sur un groupe $\mathcal{G}$ est, d'après (9), équivalente à la condition:

$$\bigwedge_{x\in X}\big(F(x, e) = x\big);$$

sur un groupe avec zéro cette propriété est équivalente à la suivante:

$$\bigwedge_{x\in X}\big(F(x, e) = F(x, 0) = x\big).$$

V. *L'effectivité* dans le cas d'un groupe est la propriété suivante:

$$N \overset{\mathrm{df}}{=} \Big\{a\in\mathcal{G}\colon \bigwedge_{x\in X}\big(F(x, a) = x\big)\Big\} = \{e\}.$$

L'ensemble du premier mêmbre de cette égalité est appelé noyau d'effectivité de la fonction F. C'est le noyau de l'homomorphisme du groupe $\mathcal{G}$ sur le groupe des transformations de l'ensemble X dans cet ensemble, l'homomorphisme donné par la formule:

$$a \to F(x, a).$$

Ce noyau est donné ([1]) par la formule suivante (voir (9b)):

$$N = \bigcap_{k\in K}\bigcap_{a\in\mathcal{G}}(a^{-1}\mathcal{G}_k a), \tag{12}$$

donc l'effectivité sur un groupe est équivalente à la condition:

$$N = \bigcap_{k\in K}\bigcap_{a\in\mathcal{G}}(a^{-1}\mathcal{G}_k a) = \{e\}. \tag{13}$$

Sur le groupe avec zéro $\mathcal{G}\cup\{0\}$ la propriété d'effectivité peut être définie comme il suit:

$$\tilde{N} \overset{\mathrm{df}}{=} \Big\{a\in\mathcal{G}\cup\{0\}\colon \bigwedge_{x\in X}\big(F(x, a) = x\big)\Big\} = \{e\}. \tag{14}$$

On voit que $\tilde{N}\setminus N \subset \{0\}$, de plus $0\in\tilde{N}$ si et seulement si $E^* = X$. Il en résulte que (13) est équivalente à (14) si et seulement si $E^* \neq X$. La propriété $E^* \neq X$ a lieu s'il existe au moins une fibre transitive possédant plus d'un élément. Si toutes les fibres transitives n'ont qu'un élément, (14) entraîne $\mathcal{G} = \{e\}$. En effet, dans ce cas nous avons d'après (9) $\mathcal{G}_k = \mathcal{G}$ pour chaque k de K. De là $N = \mathcal{G}$ et puisque $N \subset \tilde{N}$, pour (14) il est nécessaire que $\mathcal{G} = \{e\}$.

Nous avons donc démontré que la condition (14) est équivalente à la suivante:

(a) s'il existe au moins une fibre transitive possédant plus d'un élément, dans ce cas on a (13), ou bien

(b) si toutes les fibres transitives n'ont qu'un élément, dans ce cas $\mathcal{G} = \{e\}$ et $E^* \neq X$.

Remarquons encore que pour un groupe la transitivité simple entraîne l'effectivité et évidemment la transitivité, puisque les égalités $\mathcal{G}_k = \{e\}$ entraînent d'après (12) que $N = \{e\}$. L'implication inverse n'est pas vraie. Il suffit de prendre pour $\mathcal{G}$ le groupe des permutations de trois éléments (1, 2, 3) avec la composition comme l'opération du groupe et pour $\mathcal{G}_k = \{p_1, p_2\}$ où $p_1 = (1, 2, 3)$, $p_2 = (2, 1, 3)$ et $K = \{k\}$ ($\overline{\overline{K}} = 1$) et de construire F par (9) où $X = \{1, 2, 3\}$, $f(x) = x$ et g_k est une bijection arbitraire de $X_k = X$ à $\mathcal{G}/\mathcal{G}_k$.

La fonction F satisfait à l'équation de translation, elle est transitive (puisque $\overline{\overline{K}} = 1$ et $f(x) = x$) et effective (cela peut être vérifié directement par (13)), n'étant pas en même temps transitive simplement (puisque $\overline{\overline{\mathcal{G}_k}} \neq 1$).

Travaux cités

[1] Z. Moszner, *Structure de l'automate plein, réduit et inversible*, Aequationes Math. 9 (1973), p. 46–59.

[2] — *The translation equation and its application*, Demonstratio Math. VI (1973), p. 309–327.

[3] J. Tabor, *Struktura ogólnego rozwiązania równania translacji na grupoidzie Ehresmanna oraz rozkłady niezmienione tego grupoidu*, Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP w Krakowie (Prace Matematyczne VI), zeszyt 41 (1970), p. 107–153.

[4] A. Zajtz, *Algebraic objects*, Zeszyty Naukowe Uniw. Jagiell. Prace Matematyczne, zeszyt 12 (1968), p. 67–79.

Reçu par la Rédaction le 22. 10. 1973