ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVII (1972)

Une remarque sur l'évaluation de la région d'attraction de la solution banale d'un système d'équations différentielles piloté avec le paramètre retardé

par Z. Mikołajska (Kraków)

Dans la note [1] A. M. Letow a envisagé l'éqution différentielle

$$y' = g(y, t) + m(y, t)\xi, \quad y = y_1, \ldots, y_n \tag{1}$$

où le pilotage ξ doit être choisi comme fonction de (y, t), $\xi = \xi(y, t)$ de telle manière que $y = 0$ soit une solution asymptotiquement stable (au sens de Liapounoff) pour l'équation

$$y' = g(y, t) + m(y, t)\xi(y, t). \tag{2}$$

Letow a évalué la fonction $\xi(y, t)$ dans le cas où $y = 0$ est une solution asymptotiquement stable de l'équation

$$y' = g(y, t) \tag{3}$$

et la fonction de Liapounoff pour l'équation (3) est connue.

Dans la présente note nous envisageons une équation différentielle plus générale et nous évaluons la loi de pilotage $\xi(y, t)$ sans connaitre la fonction de Liapounoff $V(y, t)$. Nous évaluons aussi la région d'attraction de la solution $y = 0$ de l'équation envisagée. Le théorème en question est basé sur le théorème de la stabilité asymptotique de la solution $y = 0$ de l'équation perturbée

$$y'(t) = X\big(t, y(t+\vartheta)\big) + R\big(t, y(t+\vartheta)\big), \tag{4}$$

où y est un vecteur dans l'espace de Banach B; $X\big(t, y(\cdot)\big)$, $R\big(t, y(\cdot)\big)$ sont des fonctions à valeurs dans B et définies dans $E \times B$, où $E = -\infty < t < +\infty$, $\tilde{B}$ est l'espace des fonctions continues $y(\vartheta)$ dans l'intervalle $-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$ avec la norme

$$\|y(\vartheta)\|^{(\tau)} = \sup \|y(\vartheta)\| \quad \text{pour } -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0,$$

$\|y\|$ étant la norme dans B.

On suppose que $x = 0$ est une solution asymptotiquement stable de l'équation

$$x'(t) = X(t, x(t+\vartheta)) \tag{5}$$

et que la region d'attraction de la solution $x = 0$ de l'équation (5) contient la boule

$$\|x(\vartheta)\|^{(\tau)} \leqslant r.$$

Le théorème de la stabilité asymptique de la solution $x = 0$ de l'équation (4) dans une boule convenablement choisie est une généralisation du théorème de Shimanow et Judajew [2].

1. Le théorème de la stabilité asymptotique de la solution $x = 0$ de l'équation perturbée.

HYPOTHÈSE H_1.

(1) *$X(t, x(\cdot))$ est une fonction continue par rapport à t pour $t \geqslant 0$,*

(2) *$X(t, x(\cdot))$ satisfait à la condition de Lipschitz*

$$\|X(t, \bar{x}(\vartheta)) - X(t, \bar{\bar{x}}(\vartheta))\|^{(\tau)} \leqslant L\|\bar{x}(\vartheta) - \bar{\bar{x}}(\vartheta)\|, \tag{1.2}$$

$$\|X(t, 0)\| = 0 \quad \textit{pour } t \geqslant 0. \tag{1.3}$$

HYPOTHÈSES H_2. *Il existe une fonction $\varphi(t_0, t)$ continue pour $t \geqslant 0$, $t_0 \geqslant 0$ telle que*

(1) *$\varphi(t_0, t)$ est décroissant par rapport à t,*

(2) *$c \geqslant \varphi(t, t) \geqslant 1$, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t_0, t) = 0$ pour $t_0 \geqslant 0$ telle que*

(3) *pour chaque solution $x(t)$ de l'équation (5) telle que*

$$x(t_0 + \vartheta) = x_0(\vartheta) \quad \textit{pour } t_0 - \tau \leqslant \vartheta \leqslant t_0,$$

$$\|x_0(\vartheta)\|^{(\sigma)} \leqslant \varrho < r \tag{1.4}$$

et que soit vérifiée l'inégalité

$$\|x(t+\vartheta)\|^{(\sigma)} \leqslant \|x_0(\vartheta)\|^{(\sigma)} \varphi(t_0, t) \quad \textit{pour } t \geqslant t_0. \tag{1.5}$$

HYPOTHÈSES H_3. *Il existe une fonction $\psi(t)$ continue pour $t \geqslant 0$ et telle que*

$$\|R(t, y(\vartheta))\|^{(\sigma)} \leqslant \psi(t)\|y(\vartheta)\|^{(\sigma)} \quad \textit{pour } t \geqslant 0 \textit{ et } \|y(\vartheta)\|^{(\sigma)}. \tag{1.6}$$

HYPOTHÈSES H_4.

(1) *Supposons qu'il existe un k, $0 < k < 1$ et une suite $\{T_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\gamma_n > 0$, $T_n > 0$, $T_{n+1} > T_n$, $T_n \to \infty$ tels que*

$$\gamma_n \geqslant \int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} \psi(s)\, ds \tag{1.7}$$

et

$$\gamma_n e^{\gamma_n + L(T_{n+1} - T_n)} + \varphi(T_n, T_{n+1}) \leqslant k. \tag{1.8}$$

THÉORÈME 1. (1) *Sous les hypothèses* H_1, H_2, H_3, H_4 *la solution* $y(t) = 0$ *de l'équation* (4) *est a symptotiquement stable.*

(2) *La région d'attraction contient la boule*

$$\|x(\vartheta)\|^{(\sigma)} \leqslant k\varrho .$$

Démonstration du théorème 1. Nous démontrons la stabilité asymptotique pour $t_0 = 0$ (pour $t_0 > 0$ la démonstration est analogue). Envisageons l'intégrale $y(t)$ de l'équation (4) avec la condition initiale

$$y(\vartheta) = y_0(\vartheta) \quad \text{pour } -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0, \tag{2.1}$$

$$\|y_0(\vartheta)\|^{(\tau)} \leqslant k\varrho . \tag{2.2}$$

Nous allons évaluer $\|y(t+\vartheta)\|^{(\sigma)}$ pour $t+\vartheta \geqslant 0$.

Introduisons la suite des solutions $x^n(t)$ de l'équation (5) valable pour $t \geqslant T_n$ et telle que

$$x^n(t) = y(t) \quad \text{pour } T_n - \tau \leqslant t \leqslant T_n . \tag{2.3}$$

Désignons par r_n une suite de constantes telles que

$$\|x_n(T_n+\vartheta)\|^{(\sigma)} = \|y(T_n+\vartheta)\|^{(\sigma)} \leqslant r_n . \tag{2.4}$$

En vertu de (2.2) on peut poser

$$r_0 = k\varrho < \varrho , \tag{2.5}$$

$$\|y(t+\vartheta)\|^{(\sigma)} \leqslant \|y(t+\vartheta) - x^n(t+\vartheta)\|^{(\sigma)} + \|x^n(t+\vartheta)\|^{(\sigma)} \quad \text{pour } t \geqslant 0 \tag{2.6}$$

d'où, en vertu de (1.5) et (2.5)

$$\|y(t+\vartheta)\|^{(\sigma)} \leqslant \|y(t+\vartheta) - x^n(t+\vartheta)\|^{(\sigma)} + r_n \varphi(T_n, t) \quad \text{pour } t \geqslant T_n . \tag{2.7}$$

Il reste à évaluer $\|y(t+\vartheta) - x^n(t+\vartheta)\|^{(\sigma)}$. De l'équation (5), (4) et (2.3) il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \|y(t) - x^n(t)\| &< \int_{T_n}^{t} \Big\{ \big\| X\big(s, y(s+\vartheta)\big) - X\big(s, x^n(s+\vartheta)\big) \big\|^{(\sigma)} + \\ &\qquad + \big\| R\big(s, y(s+\vartheta)\big) \big\|^{(\sigma)} \Big\} ds \\ &< \int_{T_n}^{t} L \|y(s+\vartheta) - x^n(t+\vartheta)\|^{(\sigma)} ds + \int_{T_n}^{t} \|y(s+\vartheta)\|^{(\tau)} \psi(s)\, ds \quad \text{pour } t \geqslant T_n \end{aligned} \tag{2.8}$$

d'où, en vertu de (2.6),

$$\begin{aligned} \|y(t+\vartheta) - x^n(t+\vartheta)\|^{(\sigma)} &\leqslant \int_{T_n}^{t} L \|y(s+\vartheta) - x^n(s+\vartheta)\|^{(\sigma)} ds + \\ &+ \int_{T_n}^{t} \psi(s) \|y(s+\vartheta) - x^n(s+\vartheta)\|^{(\sigma)} ds + \int_{T_n}^{t} \|x^n(s+\vartheta)\|^{(\sigma)} \psi(s)\, ds \\ &\text{pour } t \geqslant T_n + \tau . \end{aligned} \tag{2.9}$$

En vertu de (1.5) et (2.4) on a donc

$$\|y(t+\vartheta)-x^n(t+\vartheta)\|^{(\sigma)} \leqslant \int_{T_n} [L+\psi(s)]\,\|y(s+\vartheta)-x^n(s+\vartheta)\|^{(\sigma)}\,ds + \tag{2.10}$$
$$+r_n\gamma_n \quad \text{pour } t \geqslant T_n+\tau.$$

Pour $T_n-\tau \leqslant t+\vartheta \leqslant T_n$ on a

$$\|y(t+\vartheta)-x^n(t+\vartheta)\| = 0 < \int_{T_n}^{t} [L+\psi(s)]\,\|y(s+\vartheta)-x^n(s+\vartheta)\|^{(\tau)}\,ds +$$
$$+r_n\gamma_n.$$

On a donc l'inégalité (2.10) pour tout $t \in [T_{n+1}, T_n]$. De l'inégalité (2.10) il résulte que

$$\|y(t+\vartheta)-x^n(t+\vartheta)\|^{(\sigma)} < r_n\gamma_n \exp\int_{T_n}^{t} [L+\psi(s)]\,ds \leqslant r_n\gamma_n e^{L(T_{n+1}-T_n)+\gamma_n}$$
$$\text{pour } T_{n+1} \geqslant t \geqslant T_n$$

et, en vertu de (2.7),

$$\|y(t+\vartheta)\|^{(\sigma)} \leqslant r_n\gamma_n e^{\gamma_n+L(T_{n+1}-T_n)} + r_n\varphi(T_n, t) \quad \text{pour } T_{n+1} \geqslant t \geqslant T_n, \tag{2.11}$$
$$\|y(t+\vartheta)\|^{(\sigma)} \leqslant r_n[\gamma_n e^{\gamma_n+L(T_{n+1}-T_n)} + \varphi(T_n, t)]$$
$$\leqslant r_n(\gamma_n e^{\gamma_n+L(T_{n+1}-T_n)} + c) \quad \text{pour } T_n \leqslant t \leqslant T_{n+1}$$

et, par suite, pour $t = T_{n+1}$ on a

$$\|y(T_{n+1}+\vartheta)\|^{(\tau)} \leqslant r_n\big(\gamma_n e^{\gamma_n+L(T_{n+1}-T_n)} + \varphi(T_n, T_{n+1})\big).$$

Supposons que

$$r_n \leqslant k^{n+1}\varrho.$$

En vertu de (1.8) et (2.5) on a donc

$$\|y(T_{n+1}+\vartheta)\|^{(\sigma)} \leqslant k^{n+2}\varrho, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.12}$$

et, par suite, on peut poser pour tous les $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$r_n = k^{n+1}\varrho.$$

On a dans l'intervalle $T_n \leqslant t \leqslant T_{n+1}$

$$\|y(t+\vartheta)\|^{(\tau)} \leqslant k^{n+1}\varrho\big(k+\varphi(T_n, T_n)\big) \leqslant k^{n+1}\varrho(k+c). \tag{2.13}$$

et, par suite, pour $t \to \infty$, $\|y(t+\vartheta)\|^{(\sigma)} \to 0$.

D'une façon analogue on peut évaluer la solution $y(t)$ définie pour $t \geqslant t_0 > 0$. Posons

$$\|y(t_0+\vartheta)\|^{\tau} \leqslant k\varrho.$$

On obtient pour $T_{n_0} \leqslant t_0 \leqslant T_{n_0+1}$

$$\|y(t+\vartheta)-x^{n_0+n}(t+\vartheta)\|^{(\tau)} \leqslant r_0\gamma_{n_0}\exp\Big\{\int_{t_0}^{t}\big(L+\psi(s)\big)ds\Big\}$$

$$\leqslant r_0\gamma_{n_0}\exp\int_{T_{n_0}}^{T_{n_0}+1}\big(L+\psi(s)\big)ds \leqslant r_0\gamma_0 e^{\gamma_{n_0}+L(T_{n_0+1}-T_{n_0})},$$

$$\|y(t+\vartheta)\|^{(\tau)} \leqslant r_n\gamma_{n_0+n}\exp\{\gamma_{n_0+n}+L(T_{n_0+n+1}-T_{n_0+n})\}+r_n\varphi(T_{n_0+n}+t)$$

$$\text{pour } T_{n_0+n} \leqslant t \leqslant T_{n_0+n+1}$$

et par suite

$$\|y(t+\vartheta)\|^{(\sigma)} \leqslant k^{n+1}\varrho(k+c) \qquad \text{pour } T_{n_0+n} \leqslant t \leqslant T_{n_0+n+1}$$

et en vertu de (1.8),

$$\|y(T_{n_0+n}+\vartheta)\|^{(\sigma)} \leqslant k^{n+2}\varrho \qquad \text{pour } n = 0, 1, \ldots$$

3. THÉORÈME 2. *Sous les hypothèses* H_1, H_2 *il existe pour chaque* k, $0 < k < 1$ *une suite* $\{T_n\}$ *et une suite* $\{\gamma_n\}$ *satisfaisant à l'inégalité* (1.8) *et, par suite, il existent des fonctions* $\psi(t)$ *telles que pour les perturbations* $R\big(t, y(\vartheta)\big)$ *satisfaisant à* (1.6) *l'équation* (4) *reste asymptotiquement stable.*

Démonstration. On a

$$\varphi(0,0) \geqslant 1 > k, \qquad \text{et} \qquad \varphi(0,t) \to 0 \qquad \text{pour } t \to \infty.$$

Choisissons $T_1 \geqslant 0$ tel que

$$\varphi(0, T_1) = \frac{k}{2}$$

et γ_0 tel que

$$\gamma_0 e^{\gamma_0} \leqslant \frac{k}{2}e^{-LT_1} = \eta_0,$$

par exemple

$$\gamma_0 = \eta_0 e^{-\eta_0} < \eta_0, \qquad \gamma_0 e^{\gamma_0} < \eta_0 e^{-\eta_0}e^{\eta_0} = \eta_0.$$

Supposons que nous ayons défini $T_1, T_2, \ldots, T_n, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$. On peut définir T_{n+1} et γ_n en posant

$$\varphi(T_n, T_{n+1}) = \frac{k}{2}, \quad T_{n+1} = \varphi^{-1}\left(T_n, \frac{k}{2}\right), \quad \gamma_n e^{\gamma_n} \leqslant \frac{k}{2}e^{-L(T_{n+1}-T_n)} = \eta_n > 0,$$

par exemple

$$\gamma_n = \eta_n e^{-\eta_n} < \eta_n.$$

Les suites T_n et γ_n étant ainsi définies, les hypothèses (1.8) sont satisfaites et, par suite, pour $\psi(t)$ satisfaisant à (1.7) $y \equiv 0$ est une solution asymptotiquement stable.

4. Exemple 1. Envisageons l'équation différentielle

$$x'(t) = \frac{-1}{1+t}x(t)+r\big(t, x(t+\vartheta)\big) \quad \text{où } -\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0, \ t \geqslant 0. \tag{4.1}$$

Supposons que

$$\big\|r\big(t, y(\vartheta)\big)\big\|^{(\sigma)} \leqslant \psi(t)\,\|y(\vartheta)\|^{(\sigma)} \quad \text{pour } t \geqslant 0 \tag{4.2}$$

où la fonction $\psi(t)$ satisfait à la condition

$$\int_{T_n}^{T_{n+1}} \psi(\xi)\,d\xi \leqslant \gamma_n, \tag{4.3}$$

où

$$T_n = 3\left(\frac{2}{k}\right)^n + \tau\,\frac{\left[1-\left(\frac{2}{k}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{k}}, \qquad T_0 = 2,$$

$$\gamma_n e^{\gamma_n} \leqslant \frac{k}{2} e^{-3\left(\frac{2}{k}\right)^n\cdot\left(\frac{2}{k}-1\right)-\tau\left(\frac{2}{k}\right)^{n+1}}, \tag{4.4}$$

par exemple

$$\gamma_n \leqslant \lambda_n e^{-\lambda_n},$$

où

$$\lambda_n = \frac{k}{2} e^{\left[3\left(\frac{2}{k}\right)^n\left(\frac{2}{k}-1\right)-\tau\left(\frac{2}{k}\right)^{n+1}\right]}.$$

De notre théorème 1 il résulte que $x \equiv 0$ est une solution asymptotiquement stable de l'équation (4.1). Il suffit de poser

$$\tilde{\varphi}(t_0, t) = \begin{cases} \dfrac{1+t_0}{1+t} & \text{pour } t \geqslant t_0, \\ 1 & \text{pour } t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0 \end{cases} \tag{4.5}$$

et

$$\varphi(t_0, t) = \tilde{\varphi}(t_0, t-\tau) \quad \text{pour } t_0 \leqslant t.$$

Dans notre exemple l'équation (5) a la forme

$$x'(t) = -\frac{1}{1+t}x(t) \tag{4.6}$$

et chaque solution de (4.6) est de la forme

$$x(t) = x^{(0)}\frac{1+t_0}{1+t} \quad \text{pour } t \geqslant t_0 \geqslant 0,$$

c'est-à-dire

$$|x(t)| \leqslant \|x_0(\vartheta)\|^{(\sigma)}\,\tilde{\varphi}(t_0, t) \qquad \text{pour } t \geqslant t_0.$$

Pour $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ on a

$$x(t) = x_0(t) \qquad \text{pour } t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$$

et par suite

$$|x(t)| \leqslant \|x_0(t_0 + \vartheta)\|^{\tau}\,\varphi(t_0, t) \qquad \text{pour } t_0 - \tau_1 \leqslant t \leqslant t_0,$$

$\tilde{\varphi}(t_0, t)$ étant décroissante on a

$$|x(t+\vartheta)| \leqslant \|x_0(t_0+\vartheta)\|^{(\sigma)}\,\tilde{\varphi}(t_0, t+\vartheta) \leqslant r_0\tilde{\varphi}(t_0, t-\vartheta) = r_0\varphi(t_0, t),$$

c'est-à-dire

$$\|x(t+\vartheta)\|^{(\sigma)} \leqslant \|x_0(t_0+\vartheta)\|^{\tau}\,\varphi(t_0, t).$$

Evaluons $\varphi(T_n, T_{n+1})$:

$$\varphi(T_n, T_{n+1}) = \frac{1+T_n}{1+T_{n+1}-\tau} \tag{4.9}$$

et par suite, en vertu de (4.8), pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\varphi(T_n, T_{n+1}) = \frac{1+T_n}{1+T_{n+1}-\tau}$$

$$= \frac{3\left(\dfrac{2}{k}\right)^n + \tau\,\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{k}\right)^n}{1-\dfrac{2}{k}}}{3\left(\dfrac{2}{k}\right)^{n+1} + \tau\,\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{k}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{2}{k}-\tau}} = \frac{3\left(\dfrac{2}{k}\right)^n + \tau\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{2}{k}\right)^j}{3\left(\dfrac{2}{k}\right)^{n+1} + \tau\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2}{k}\right)^j}$$

$$= \frac{1}{\left(\dfrac{2}{k}\right)} \cdot \frac{3\left(\dfrac{2}{k}\right)^n + \tau\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{2}{k}\right)^j}{3\left(\dfrac{2}{k}\right)^n + \tau\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{2}{k}\right)^j} = \frac{k}{2}.$$

On vérifie facilement que la fonction $X\big(t, x(t+\vartheta)\big) = -\dfrac{1}{1+t}\,x(t)$ satisfait à la condition de Lipschitz pour $t \geqslant 0$ avec $L = 1$

$$\gamma_n e^{\gamma_n + L(T_{n+1}-T_n)} + \varphi(T_n, T_{n+1}) \leqslant \frac{k}{2} + \gamma_n e^{\gamma_n + 3\left(\frac{2}{k}\right)^n\left(\frac{2}{k}-1\right) + \tau\left(\frac{2}{k}\right)^{n+1}} \leqslant \frac{k}{2} + \frac{k}{2} = k.$$

5. EXEMPLE 2. Envisageons le cas où

$$\varphi(t_0, t) = e^{-a(t-t_0)}, \qquad a > 0 \tag{5.1}$$

et supposons que

$$0 \leqslant \psi(s) \leqslant b.$$

Dans ce cas la condition (1.8) prend la forme suivante: il existe un $T > 0$ et un k, $0 < k < 1$ tels que

$$\Gamma(T) = bTe^{(b+L)T} + e^{-aT} \leqslant k. \tag{5.2}$$

On démontre facilement que dans le cas où

$$b < a$$

il existe $T > 0$ et $0 < k < 1$ tels qu'on a (5.2) et par suite (1.8) avec $\gamma_n = Tb$ En effet:

$$\Gamma(0) = 1$$

et

$$\Gamma'(0) = b - a < 0$$

d'où l'on tire que $\Gamma(T) < 1$ pour T suffisamment petit.

EXEMPLE 3. Un cas particulier de l'exemple 2 est l'équation

$$x'(t) = -ax(t) + r\big(t, x(t+\vartheta)\big), \tag{5.3}$$

où

$$\big\|r\big(t, x(t+\vartheta)\big)\big\|^{(\sigma)} \leqslant b\,\|x(t+\vartheta)\|^{(\sigma)},$$

$0 < b < a$.

Remarque 1. Le théorème donné par l'exemple 1 ne peut pas être obtenu du théorème de Schimanow et Judajew, car il n'existe pas de constante $\beta > 0$ telle que

$$\frac{1+t_0}{1+t} \leqslant e^{-\beta(t-t_0)} \quad \text{pour } t \geqslant t_0.$$

6. Remarque 2. Dans le cas où l'on a (5.1) et $T_n = t_0 + nT$ la condition (1.8) prend la forme

$$\gamma_n e^{\gamma_n + LT} + e^{-aT} \leqslant k,$$

d'où

$$\gamma_n e^{\gamma_n} \leqslant (k - e^{-aT})e^{-LT}$$

et, par suite, pour $T > \ln\dfrac{1}{k}$ il existe un $\gamma > 0$ tel que

$$\gamma_n e^{\gamma_n} \leqslant \gamma e^{\gamma} \leqslant (k - e^{-aT})e^{-aT} \quad \text{pour } n = 1, 2, \ldots \tag{6.1}$$

d'où il vient

$$\int_{\tau}^{\tau+T} \psi(s)\,ds \leqslant \gamma \quad \text{pour tout le } \tau \geqslant 0 \tag{6.2}$$

pour chaque fonction $\psi(s)$ satisfaisant à (1.7) et (1.8) avec $T_n = t_0 + nT$. On obtient ainsi les hypothèses du théorème de Shimanow et Judajew avec l'hypothèse (6.1) au lieu de l'hypothèse que γ est suffisamment petit.

Remarque 3. Posons $g(T) = (k - e^{-aT})e^{-LT}$. On vérifie facilement que chaque $\gamma > 0$ satisfaisant à (6.1) doit satisfaire à l'inégalité

$$\gamma e^{\gamma} \leqslant k\frac{a}{a+L}\left(\frac{Lk}{a+L}\right)^{\frac{L}{a}} = g(\tilde{T}), \tag{6.3}$$

où

$$\tilde{T} = \frac{1}{a}\ln\frac{a+L}{Lk}.$$

Il suffit d'évaluer $g'(T)$. On a

$$g'(T) = e^{-LT}\{(a+L)e^{-aT} - kL\}$$

et par suite

$$g'(\tilde{T}) = 0.$$

$$g'(T) > 0 \quad \text{pour } r < \tilde{T} \quad \text{et} \quad g'(T) < 0 \quad \text{pour } T > \tilde{T}$$

d'où il s'ensuit que la fonction $g(T)$ admet un maximum pour $T = \tilde{T}$.

Exemple 4. Pour $L = a$ on obtient

$$\gamma e^{\gamma} \leqslant k^2 \cdot \tfrac{1}{4}, \quad \tilde{T} = \frac{1}{a}\ln\frac{2}{k},$$

c'est-à-dire dans le cas de l'équation

$$x'(t) = -x(t) + r\big(t, x(t+\vartheta)\big) \tag{6.4}$$

où la fonction $r\big(t, x(t+\vartheta)\big)$ satisfait à l'inégalité (1.6)

$$\big\|r\big(t, y(\vartheta)\big)\big\|^{(\sigma)} \leqslant \psi(t)\,\|y(\vartheta)\|^{(\sigma)} \quad \text{pour } t \geqslant 0 \tag{6.5}$$

et

$$\int_{t}^{t+\frac{1}{a}\ln 2} \psi(s)\,ds \leqslant \gamma_0 < \tfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}}, \tag{6.6}$$

$\psi(s)$ etant supposée uniformément continue dans l'intervalle $[0, \infty)$. De notre théorème il découle que la solution $x(t) \equiv 0$ de l'équation (6.4) est asymptotiquement stable pour $t \geqslant 0$.

Démonstration. Dans le cas envisagé on a

$$\varphi(t_0, t) = e^{-a(t-t_0)}, \quad L = a.$$

Pour $T = \frac{1}{a} \ln 2$ on a

$$\int_t^{t+\frac{1}{a}\ln 2} \psi(s)\,ds \leqslant \gamma_0 < \tfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}},$$

$\psi(s)$ étant uniformément continue il existe un k_0, $0 < k_0 < 1$ tel que

$$\int_t^{t+\frac{1}{a}\ln\frac{2}{k_0}} \psi(s)\,ds \leqslant \tilde{\gamma} = \frac{k_0^2 e^{-k_0/4}}{4} < \frac{k_0^2}{4} \quad \text{pour } 0 \leqslant t < \infty$$

et

$$\tilde{\gamma} e^{\tilde{\gamma}} < \frac{k_0^2}{4}$$

c'est-à-dire pour l'équation (6.4), (6.1) est vérifiée avec

$$\tilde{T} = \frac{1}{a} \ln \frac{2}{k_0} \quad \text{et} \quad \tilde{\gamma} = \frac{k_0^2}{4} e^{-\frac{k_0^2}{4}}.$$

(Il est évident que dans (6.6) le nombre $\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}}$ peut être remplacé par un autre nombre γ^* tel que $\gamma^* e^* < \frac{1}{4}$). La région d'attraction dans le cas envisagé est tout l'espace des fonctions $x_0(t)$ continues dans l'intervalle $-\tau \leqslant t \leqslant 0$. C'est une conséquence du théorème 1, car pour chaque $\varrho > 0$ les solutions de l'équation

$$x'(t) = -ax(t)$$

telles que $x(t) = x_0(t)$ pour $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$, $\|x_0(t_0+\vartheta)\|^{(\tau)} \leqslant \varrho$ tendent vers zéro pour $t \to \infty$ et $\|x(t+\vartheta)\|^{(\tau)} \leqslant \|x_0(t_0+\vartheta)\|^{(\tau)} e^{-a(t-t_0)}$ d'où il resulte que chaque solution de l'équation (6.4) telle que $x(t) = x_0(t)$ pour $-\tau \leqslant t \leqslant 0$, $\|x_0(\tau)\|^{(\tau)} \leqslant k_0\varrho$, tend vers zero pour $t \to \infty$. Comme ϱ est quelconque, toute solution de (6.4) tend vers zéro pour $t \to \infty$.

7. Application du théorème 1 au problème du pilotage. Envisageons l'équation

$$y'(t) = X\big(t, y(t+\vartheta)\big) + r\big(t, y(t+\vartheta), u\big). \tag{7.1}$$

Supposons que $x = 0$ soit une solution asymptotiquement stable de l'équation

$$x'(t) = X\big(t, x(t+\vartheta)\big) \tag{7.2}$$

et que la région d'attraction de l'équation (7.2) contienne la boule

$$\|x(\vartheta)\|^{(\sigma)} \leqslant r.$$

Admettons les hypothèses H_1 et H_2. De notre théorème 1 il découle que pour conserver la stabilité asymptotique pour l'équation (7.1) il suffit de choisir la fonction $u(t, x, y)$ de telle façon que

$$\left\|r\big(t, y(t+\vartheta), u\big(t, y(t), y(t+\vartheta)\big)\big)\right\|^{(\sigma)} \leqslant \psi(t)\,\|y(t+\vartheta)\|^{(\sigma)}$$

pour $t \geqslant 0$, $\|y(t+\vartheta)\|^{(\sigma)} \leqslant \varrho$, où $\psi(t)$ satisfait à l'hypothèse H_4.

8. Exemple 5. Envisageons l'équation

$$x'(t) = -ax(t) + bx(t-h) + u, \qquad a > 0. \tag{8.1}$$

Pour obtenir le cas de l'exemple 3 il suffit de choisir $u = u(t, x, y)$ telle qu'on ait

$$\left\|bx(t-h) + u\big(t, x(t), x(t-h)\big)\right\|^{(h)} \leqslant c\,\|x(t-\vartheta)\|^{(h)},$$

d'où il vient

$$\left\|u\big(t, x(t), x(t-h)\big)\right\|^{(h)} \leqslant \beta\,\|x(t-\vartheta)\|^{(h)},$$

par exemple

$$u(t, x, y) = a(t)x + \beta(t)y, \tag{8.2}$$

où

$$|b+\beta(t)| + |a(t)| \leqslant c < a. \tag{8.3}$$

Une autre condition suffisante pour la stabilité asymptotique de l'équ ation (8.1) s'obtient de l'exemple 4. On voit que la fonction $u(t, x, y)$ de la forme (8.2) peut être prise quelconque telle que

$$|b+\beta(t)| + |a(t)| \leqslant \psi(t), \tag{8.4}$$

où $\psi(t)$ satisfait à la condition (6.6).

Dans le cas de l'équation

$$x'(t) = -ax(t) + b_1x(t-h_1) + \ldots + b_nx(t-h_n) + u, \tag{8.5}$$

où $a > 0$, $0 \leqslant h_1 \leqslant h_2 \leqslant \ldots \leqslant h_n$ on peut utiliser la fonction $u = u(t, x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de la forme

$$u(t, x_0, x_1, \ldots, x_n) = a(t)x_0 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j(t)x_j, \tag{8.6}$$

où

$$|a(t)| + \sum_{j=1}^{n} |b_j + \beta_j(t)| \leqslant c < a \tag{8.7}$$

ou bien

$$|a(t)| + \sum_{j=1}^{n} |b_j + \beta_j(t)| \leqslant \psi(t) \tag{8.8}$$

et $\psi(t)$ satisfait à (6.6).

Pour chaque fonction u de la forme (8.6) satisfaisant à (8.7) ou à (8.8) la solution $x \equiv 0$ de l'équation (8.5) est asymptotiquement stable et la région d'attraction est tout l'espace des fonctions $x_0(t)$ continues dans l'intervalle $-h \leqslant t \leqslant 0$.

Travaux cités

[1] А. М. Летов, *Некоторые нерешенные задачи теории автоматического управления*, Дифф. уравнения 6, 4 (1970), p. 592-615.

[2] С. Н. Шиманов и Г. С. Юдаев, *Некоторые вопросы устойчивости дифференциальных уравнений с последействием*, ibidem 4 (1970), p. 9-562.

Reçu par la Rédaction le 31. 5. 1971