ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXI (1968)

Über einseitig beschränkte Lösungen linearer Funktionalgleichung

von J. Burek (Katowice)

Einleitung. Gegenstand dieser Abhandlung sind die durch eine gegebene Funktion (z.B. identisch verschwindende) einseitig beschränkten Lösungen der Funktionalgleichung

$$(1) \qquad \varphi[f(x)]+g(x)\varphi(x) = F(x) ,$$

wobei $f(x), F(x), g(x)$ bekannte Funktionen in einem Intervall I bedeuten, während $\varphi(x)$ unbekannt ist.

Dieses Problem ist von der Frage nach den im gewöhnlichen Sinne beschränkten Lösungen einer Funktionalgleichung unabhängig. Derartige Gleichungen können eine Menge beschränkter Lösungen, jedoch nur eine einzige durch eine gegebene Funktion einseitig beschränkte Lösung haben. Z.B. hat die Gleichung

$$(2) \qquad \varphi(x+1) = -\varphi(x) , \quad x \in (-\infty, \infty) ,$$

eine und nur eine nichtnegative Lösung $\varphi(x) \equiv 0$; um aber eine beschränkte Lösung zu erhalten, genügt es eine beliebige beschränkte Funktion im Intervall $\langle 0, 1)$ anzunehmen, und sie nach der Gleichung (2) auf das ganze Intervall $(-\infty, \infty)$ zu erweitern.

Es ist auch möglich, wie z.B. im Falle der Gleichung

$$(3) \qquad \varphi(x+1) = 2\varphi(x) , \quad x \in (-\infty, \infty)$$

daß es nur eine beschränkte Lösung $\varphi(x) = 0$ gibt. Anderseits aber jede beliebig im Intervall $\langle 0, 1)$ angenommene nichtnegative und gemäß (3) erweiterte Funktion, bietet eine nichtnegative Lösung der Gleichung (3).

Die folgenden Betrachtungen behandeln die Existenz und die Eindeutigkeit einseitig beschränkter Lösungen der Gleichung (1).

SATZ I. *Ist die Funktion $F(x)$ im Intervall I stets nichtnegativ, oder stets nichtpositiv, ist weiter $g(x) > 0$ in I, $f(I) \subset I$, und schließlich*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{F[f^i(x)]}{\prod\limits_{j=1}^{i} g[f^j(x)]} = 0 \quad \text{für jedes } x \in I, \tag{4}$$

dann gibt es höchstens eine Lösung der Gleichung (1) *mit konstantem Vorzeichen in I und zwar*

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{F[f^i(x)]}{\prod\limits_{j=0}^{i} g[f^j(x)]}. \tag{5}$$

Ist außerdem

$$g[f^{i+1}(x)]\,|F[f^i(x)]| \geqslant |F[f^{i+1}(x)]|, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \; x \in I, \tag{6}$$

dann ist eine nichtnegative, oder nichtpositive Lösung der Gleichung (1) *vorhanden.*

Beweis. Nehmen wir an, daß $F(x) \geqslant 0$ in I, Es ist offensichtlich, daß die Funktion $\varphi(x)$, falls sie in I ein konstantes Vorzeichen haben soll, nichtnegativ sein muß. (Ist dagegen $F(x) \leqslant 0$ in I, dann ist $\varphi(x)$ gleichfalls nichtpositiv).

Angenommen, daß die gesuchte Lösung der Gleichung (1) vorhanden ist, dann erfüllt sie die Bedindung

$$\varphi(x) = \frac{F(x) - \varphi[f(x)]}{g(x)} \leqslant \frac{F(x)}{g(x)}. \tag{7}$$

Dann ist

$$\varphi[f(x)] = \frac{F[f(x)] - \varphi[f^2(x)]}{g[f(x)]}.$$

Setzt man die obere Formel für $\varphi[f(x)]$ in (7) ein, so ist

$$\varphi(x) = \frac{F(x)g[f(x)] - F[f(x)] + \varphi[f^2(x)]}{g(x)g[f(x)]} \geqslant \frac{F(x)g[f(x)] - F[f(x)]}{g(x)g[f(x)]}.$$

Berechnen wir die Reihe nach $\varphi[f^2(x)]$, $\varphi[f^3(x)]$, ... so erhalten wir für jedes natürliches n

$$\varphi(x) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i F[f^i(x)] \prod\limits_{j=i+1}^{n} g[f^j(x)] + (-1)^{n+1} \varphi[f^{n+1}(x)]}{\prod\limits_{i=0}^{n} g[f^i(x)]}. \tag{8}$$

Es sind folglich für jedes natürliche k die Ungleichungen richtig

$$\sum_{i=0}^{2k-1}(-1)^i\frac{F[f^i(x)]}{\prod\limits_{j=0}^{i}g[f^j(x)]}\leqslant\varphi(x)\leqslant\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i\frac{F[f^i(x)]}{\prod\limits_{j=0}^{i}g[f^j(x)]}, \tag{9}$$

d.h.

$$\varphi(x)\in\langle S_{2k-1}(x),\ S_{2k-1}(x)+a_{2k}(x)\rangle=I_k, \tag{10}$$

wobei $S_{2k-1}(x)$, $a_{2k}(x)$ entsprechend die Teilsummen und die Glieder der Reihe (5) sind.

Da laut Voraussetzung (4)

$$\lim_{k\to\infty}|I_k|=0,$$

kann nur ein $\varphi(x)$ die Ungleichung (9) erfüllen, demnach kann es höchstens eine Lösung der Gleichung (1) geben. Gibt es ein $\varphi(x)$, das die Ungleichung (9) erfüllt, so ist leicht ersichtlich, daß die Reihe (5) konvergent ist und zwar gegen $\varphi(x)$.

Aus (10) folgt nämlich, daß die Teilsummen $S_{2k-1}(x)$ die Ungleichung

$$\varphi(x)-a_{2k}(x)\leqslant S_{2k-1}(x)\leqslant\varphi(x) \tag{11}$$

und entsprechend, die Teilsummen $S_{2k}(x)$ die Ungleichung

$$\varphi(x)\leqslant S_{2k}(x)\leqslant\varphi(x)+a_{2k-1}(x) \tag{12}$$

erfüllen.

Die Summen $S_{2k}(x)$, $S_{2k-1}(x)$ konvergieren also gegen $\varphi(x)$, d.h.

$$\varphi(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{F[f^i(x)]}{\prod\limits_{j=0}^{i}g[f^j(x)]}.$$

Es trete jetzt die Voraussetzung (6) ein, die die Ungleichung

$$\frac{F[f^i(x)]}{\prod\limits_{j=0}^{i}g[f^j(x)]}\geqslant\frac{F[f^{i+1}(x)]}{\prod\limits_{j=0}^{i+1}g[f^j(x)]} \tag{13}$$

nach sich zieht. Die Glieder der Reihe (5) bilden also eine nach Null abnehmende Folge, und die Reihe selbst, als die Summe von gegen Null strebenden Gliedern mit wechselndem Vorzeichen, ist konvergent.

Es bleibt noch zu beweisen, daß die Reihe (5) eine stets nichtnegative Funktion und eine Lösung der Gleichung (1) ist. Bekanntlich ist:

$$\varphi(x)\geqslant\frac{F(x)}{g(x)}-\frac{F[f(x)]}{g(x)g[f(x)]}\geqslant 0.$$

Nach Einsetzen der durch (5) gegebenen $\varphi(x)$ in die linke Seite der Gleichung (1) erchalten wir:

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{F[f^{i+1}(x)]}{\prod_{j=0}^{i} g[f^{j+1}(x)]} + g(x)\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{F[f^i(x)]}{\prod_{j=0}^{i} g[f^j(x)]}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{F[f^{i+1}(x)]}{\prod_{j=1}^{i+1} g[f^j(x)]} + \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{F[f^i(x)]}{\prod_{j=1}^{i} g[f^j(x)]} = F(x) .$$

Die Reihe (5) ist folglich eine Lösung der Gleichung (1).

Bei $F(x) \leqslant 0$ verfahren wir analog.

B e m e r k u n g. Bei $F(x) \not\equiv 0$ wird die Lösung der Gleichung (1) nichttrivial sein, ist dagegen $F(x) \equiv 0$, so ist eine Lösung stets vorhanden, und zwar $\varphi(x) \equiv 0$.

SATZ II. *Es erfülle: die Funktion $f(x)$ im Interval $I = (a, b)$, oder $I = \langle a, b)$ die Bedingungen*

$$f(x) > x , \quad f(I) \subset I , \tag{14}$$

die Funktion $g(x)$ die Bedingung

$$g(x) \geqslant 1 \quad \textit{in } I \tag{15}$$

und es sei $F(x)$ eine in I monotone Funktion für die

$$\lim_{x\to b^-} F(x) = 0 \quad \textit{gilt} . \tag{16}$$

In diesem Fall hat die Gleichung (1) *stets genau eine Lösung mit konstanten Vorzeichen, die durch die Formel* (5) *gegeben ist.*

B e w e i s. Nach Voraussetzung (14) ist für jedes $x \in I$ $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = b$. Nehmen wir weiter in Betracht die Voraussetzungen (15) und (16) so bekommen wir

$$\prod_{j=0}^{i} g[f^j(x)] \geqslant 1 \quad \text{für jedes natürliche } i ,$$

und

$$\lim_{i\to\infty} F[f^i(x)] = 0 .$$

Somit ist die Bedingung (4) erfüllt.

Aus (14) und aus der Monotonie der Funktion $F(x)$ folgt

$$|F[f^i(x)]| \geqslant |F[f^{i+1}(x)]|$$

und nach Berücksichtigung der Voraussetzung (15) ergibt sich die Ungleichung

$$g[f^{i+1}(x)]|F[f^i(x)]| \geqslant |F[f^{i+1}(x)]| .$$

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes I erfüllt, es gibt also tatsächtlich genau eine Lösung der Gleichung (1) mit konstantem Vorzeichen in I.

Wir kommen zum gleichen Ergebnis, wenn $f(x) < x$ in I und $\lim\limits_{x\to a^+} F(x) = 0$ bei monotonem $F(x)$.

Das obige Problem kann verallgemeinert werden, wenn wir Lösungen der Gleichung (1) suchen, die z.B. von unten durch eine gegebene Funktion $Q(x)$ beschränkt sind:

$$\varphi(x) \geqslant Q(x) . \tag{17}$$

Die Funktion $\psi(x) = \varphi(x) - Q(x)$ müsste somit nichtnegativ sein und die Gleichung

$$\psi[f(x)] + g(x)\psi(x) = G(x) , \tag{18}$$

wobei $G(x) = F(x) - Q[f(x)] - g(x)Q(x)$, erfüllen.

Sobald $g(x)$, $G(x)$, $f(x)$ die Voraussetzungen des Satzes I oder II erfüllen, so wird die Gleichung (18) genau eine Lösung mit konstanten Vorzeichen haben, und folglich wird Gleichung (1) gleichfalls genau eine Lösung, die der Bedingung (17) genügt, haben.

SATZ III. *Es sei*

$$g(x) < 0 \quad \text{in } I , \tag{19}$$

und es habe $F(x)$ einen konstanten Vorzeichen in I.

Damit die Gleichung (1) *eine Lösung mit dem von $F(x)$ entgegensetzten Vorzeichen habe, ist es notwendig und hinreichend, daß die Reihe* (5) *konvergiere.*

Beweis. Ist die Reihe (5) konvergent, so erfüllt bekanntlich ihre Summe die Gleichung (1). Aus (19) folgt, daß

$$\operatorname{sgn}(-1)^i \frac{F[f^i(x)]}{\prod\limits_{j=0}^{i} g[f^j(x)]} = -\operatorname{sgn} F(x) .$$

Somit besitzt auch die Summe der Reihe ein anderes Vorzeichen als $F(x)$.

Es sei nun z.B. $F(x) \geqslant 0$ und es gebe die Funktion $\varphi(x) \leqslant 0$, die eine Lösung der Gleichung (1) darstellt. Aus (8) ergibt sich

$$0 \geqslant S_n(x) = \varphi(x) - \frac{\varphi[f^{n+1}(x)]}{\left|\prod_{i=0}^{n} g[f^i(x)]\right|} \geqslant \varphi(x) .$$

$S_n(x)$ ist eine fallende und von unten beschränkte, folglich konvergente Folge, die Reihe (5) ist somit konvergent.

Ebenso verhält man, wenn $F(x) \leqslant 0$.

Um die Lösung der Gleichung (1) des gleichen wie bei $F(x)$ Vorzeichens im Falle wo $g(x) < 0$ und $\lim_{n\to\infty} f^{-n}(x) = a$, zu finden, so genügt es eine belibige Funktion mit bestimmtem Vorzeichen im Intervall $\langle x_0, f(x_0)\rangle$ anzunehmen, und sie dann auf das ganze Intervall I derart zu erweitern, daß die Gleichung

$$\varphi[f(x)] = -g(x)\varphi(x) + F(x)$$

erfüllt wird.

Reçu par la Rédaction le 9. 8. 1967