ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXIII (1976)
CONFERENCE ON ANALYTIC FUNCTIONS

Théorèmes d'identité en dimension infinie

par JAN CHMIELOWSKI (Katowice)

Résumé. On étudie ici les théorèmes d'identité pour les fonctions G-analytiques et pour les fonctions analytiques. On donne en particulier une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des ensembles dénombrables (de suites convergentes) qui ne peuvent pas être des zéros d'une fonction analytique non identiquement nulle.

I. Soient E, F des espaces vectoriels topologiques (e.v.t.) sur le corps $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$), localement convexe. Soit $P(E, F)$ l'espace des polynômes homogènes continus. Si U est un ouvert dans E, on note $\mathscr{A}(U, F)$ (resp. $\mathscr{A}_G(U, F)$) l'espace des fonctions analytiques (resp. G-analytiques) dans U à valeurs dans F (cf. [1]).

DÉFINITION. Un ensemble $A \subset E$ est appelé *localement déterminant* en $a \in E$ pour les fonctions analytiques (pour les fonctions G-analytiques, pour les polynômes homogènes continus respectivement) si pour tout voisinage connexe U de $a \in E$ et pour tout $f \in \mathscr{A}(U, F)$ ($f \in \mathscr{A}_G(U, F)$, $f \in P(E, F)$ respectivement), on a l'implication suivante:

$$f|_{A \cap U} = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Nous allons supposer que $a = 0 \in E$. D'abord nous allons donner quelques remarques:

Remarque 1. La propriété „être un ensemble localement déterminant en $a \in E$ pour les familles considerées" ne dépend pas de l'espace des valeurs F ([2], Proposition 1). Nous pouvons donc remplacer F par le corps $\boldsymbol{K}$.

Remarque 2. Si $A_i \subset E_i$ ($i = 1, 2$) sont des ensembles localement déterminants en $a_i \in E_i$ pour les fonctions analytiques, le produit $A_1 \times A_2$ est un ensemble localement déterminant en $(a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$ pour les fonctions analytiques dans des ouverts de $E_1 \times E_2$.

Remarque 3 (Proposition 6.6.I, [1]). Un ouvert $A \subset E$ est un ensemble localement déterminant (en tout point $a \in \bar{A}$, où $\bar{A}$ désigne l'adhérence de A) pour les fonctions analytiques.

La démonstration de la remarque 3 donnée dans [1] pour les fonctions analytiques et pour un ouvert s'étend sans aucun changement aux applications G-analytiques et à un ensemble absorbant [1], c'est-à-dire un ensemble absorbant $A \subset E$ est localement déterminant en $0 \in E$ pour les fonctions G-analytiques, d'autant plus A est localement déterminant (en $0 \in E$) pour les fonctions analytiques.

Remarque 4 ([1], Proposition 6.6. II). Soit E un e.v.t. réel. Un ouvert $A \subset E$ est localement déterminant en tout point $a \in \bar{A}$ pour les fonctions analytiques dans des ouverts de la complexification $\tilde{E} = E + iE$.

En répétant la démonstration de la remarque 4 on peut dire que tout ensemble A absorbant dans un e.v.t. réel E est localement déterminant en $0 \in \tilde{E}$ pour les fonctions G-analytiques définies dans des ouverts de la complexification $\tilde{E}$, d'autant plus pour les fonctions analytiques définies dans des ouverts de $\tilde{E}$.

II. On sait bien que dans le cas où la dimension de E est finie, il existe des suites convergentes (p.ex. vers $0 \in E$) qui sont localement déterminantes (en $0 \in E$) pour les fonctions analytiques, mais lorsque la dimension de E est infinie la situation est différente. En effet, nous allons rappeler ici sans démonstration [2] le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit E un e.v.t. sur $\boldsymbol{K}$, localement convexe, métrisable. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des suites convergentes (p.ex. vers $0 \in E$) localement déterminantes (en $0 \in E$) pour les fonctions analytiques est que E soit séparable.*

THÉORÈME 2. *Soit E un e.v.t. sur $\boldsymbol{C}$. Si $A \subset E$ est un ensemble localement déterminant en $0 \in E$ pour les polynômes homogènes continus, tel que*

$$a \in A, \quad t \in \boldsymbol{C}, \quad |t| = 1 \Rightarrow ta \in A, \tag{1}$$

alors A est localement déterminant en $0 \in E$ pour les fonctions analytiques.

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{A}(U, \boldsymbol{C})$ une fonction s'annulant sur $A \cap U$, où U est un voisinage connexe de $0 \in E$. Sans diminuer la généralité nous pouvons supposer que U est un voisinage balancé tel que $A \subset U$. Si $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ est un développement de f en série de polynômes homogènes continus, alors pour tout $a \in A$ la fonction d'une variable complexe

$$g(t) = f(ta) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k f_k(a)$$

s'annule pour $\{|t| = 1\}$. Ainsi pour tout $a \in A$ et pour tout $k \geqslant 0$, on a $f_k(a) = 0$. Donc $f_k = 0$ pour tout $k \geqslant 0$ C.Q.F.D.

---

(1) On peut trouver dans [5] la définition d'un ensemble absorbant.

(2) Voir la démonstration dans [2].

Remarque 5. Soit E un e.v.t. sur C. En raisonnant comme pour le théorème 2, on démontre qu'un ensemble $A \subset E$ localement déterminant en $0 \in E$ pour $P(E, C)$ et satisfaisant à la condition suivante:

(2) pour tout $a \in A$ correspond un ensemble de complexes $\{t_j : |t_j| = 1\}$ dénombrable tel que $t_j a \in A$ pour $j \geqslant 1$, est localement déterminant

en $0 \in E$ pour les fonctions analytiques.

J. P. Ramis ([4], Proposition II.1.1.3) a prouvé le théorème suivant (bien connu dans le cas où $E = C^n$):

THÉORÈME I ([4]). *Soit U un ouvert connexe dans un espace de Banach complexe. Si S est un ensemble analytique dans U, alors $U-S$ est vide, ou bien $U-S$ est un ouvert connexe et dense dans U.*

Ce théorème, d'ailleurs valable dans les e.v.t. localement convexes sur C, implique la propriété siuvante:

COROLLAIRE. *Soit A un ensemble d'un e.v.t. sur C, localement convexe, tel qu'il existe un ouvert connexe $W \neq \emptyset$ et tel que $W-A$ n'est pas connexe* (³). *Alors A est localement déterminant en un point $a \in \bar{A}$ pour les fonctions analytiques.*

Démonstration. Sans diminuer la généralité on peut supposer que l'intérieur de A est vide. Comme $W-A$ n'est pas connexe, il existe dans $W-A$ des ouverts W_1 et W_2, non vides, tels que $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ et $W-A = W_1 \cup W_2$. Alors $\overline{W}_1 \cup \overline{W}_2 = \overline{W-A} = W$, où $\overline{W}_i$ $(i = 1, 2)$ désignent les adhérences par rapport à W. La connexité de W implique qu'il existe un point $a \in \overline{W}_1 \cap \overline{W}_2 \neq \emptyset$. Remarquons que $a \in A$, car $\overline{W}_1 \cap W_2 = W_1 \cap \overline{W}_2 = \emptyset$. Puisque pour tout voisinage connexe V de a l'ensemble $(V-A) \cap W = (W_1 \cap V) \cup (W_2 \cap V)$ n'est pas connexe, en vertu du théorème I l'ensemble A est localement déterminant en a pour les fonctions analytiques. C.Q.F.D.

Bibliographie

[1] J. Bochnak and J. Siciak, *Analytic functions in topological vector spaces*, Studia Math. 39 (1971), p. 77–112.

[2] J. Chmielowski, *Ensembles déterminants pour les fonctions analytiques*, C. R. Acad. Sci. Paris 279 (1974), Sér. A, p. 639–641.

[3] M. Hervé, *Several complex variables* (*Local theory*), Oxford University Press, Bombay 1963.

[4] J. P. Ramis, *Sous-ensembles analytiques d'une variété banachique complexe*, Erg. d. Math. Bd. 53 (1970).

[5] A. P. Robertson and W. Robertson, *Topological vector spaces*, Cambridge University Press, 1964.

(³) Cf. [3], Chap. III, § 1.