

M. WNUK (Kraków)

O PEWNEJ TRANSFORMACJI WARUNKU BRZEGOWEGO
W ZAGADNIENIU ROZWIĄZYWANYM METODĄ
MAŁEGO PARAMETRU

1. Sformułowanie zagadnienia. W niniejszej pracy zajmiemy się przypadkiem, gdy mały parametr ε nie występuje, jak zwykle (por. [6]) w równaniu różniczkowym:

$$(1.1) \quad L[y, \varepsilon] = 0, \quad y = y(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

lecz w warunku brzegowym. Rozważania nasze dotyczyć będą zagadnienia brzegowego Dirichleta (wewnętrzznego), przy czym szukaną funkcją będzie funkcja naprężeń $\Phi = \Phi(x, y)$, rozwiązująca problem de Saint Venanta: swobodne skręcanie pręta pryzmatycznego w zakresie sprężystym. Funkcja Φ winna spełniać równanie $\nabla^2 \Phi = -2$ w obszarze D , ograniczonym konturem przekroju poprzecznego oraz warunek brzegowy $\Phi = 0$ wzdłuż konturu, [5].

Pośród rozmaitych kształtów przekroju poprzecznego pręta różnymi przekroje *podstawowe*, opisane równaniem $y = f(x)$ oraz przekroje *zaburzone* (rys. 1) opisywane równaniem

$$(1.2) \quad y = f(x) + \varepsilon g(x).$$

Przekrój podstawowy posiada pewną ważną własność: jeżeli równanie konturu przekroju podstawowego zapiszemy w postaci uwikłanej

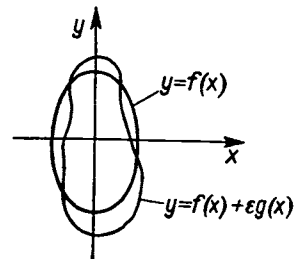
$$(1.3) \quad F[x, f(x)] = 0,$$

to laplasjan z funkcji $F(x, y)$ jest równy stałej:

$$(1.4) \quad \nabla^2 F(x, y) = \text{const.}$$

Wówczas, [5], konstrukcja szukanej funkcji naprężeń $\Phi(x, y)$ nie następuje żadnych trudności; wobec pełnej analogii równania $\nabla^2 \Phi = -2$ oraz równania (1.4) możemy napisać:

$$(1.5) \quad \Phi(x, y) = \frac{-2}{\nabla^2 F(x, y)} F(x, y).$$



ZM-457

Rys. 1

Znaczy to, że funkcja naprężeń jest proporcjonalna do lewej strony równania konturu (1.3), a stała wielkość $-2/\nabla^2 F(x, y)$ jest współczynnikiem proporcjonalności. Oczywiście, dla $y = f(x)$, a więc wzdłuż konturu, otrzymujemy $F[x, f(x)] = 0$, a zatem również $\Phi[x, f(x)] = 0$, jak być powinno.

Przekrój zaburzony, opisywany równaniem (1.2), nie ma takiej własności; tutaj laplasjan funkcji $F(x, y)$ jest różny od stałej: $\nabla^2 F(x, y) \neq \text{const}$, przy czym $y = f(x) + \varepsilon g(x)$, i funkcji naprężeń Prandtla $\Phi(x, y)$ nie można na ogół znaleźć w sposób łatwy. Do przekrojów podstawowych należą: przekrój kołowy, eliptyczny, przekrój w kształcie trójkąta równobocznego oraz kilka innych, rzadziej spotykanych w praktyce, omówionych w pracy L. S. Lejbenzona [3].

2. Transformacja współrzędnych. Obecnie zajmiemy się rozwiązaniem równania

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2$$

dla przekroju zaburzonego; żądamy więc, by szukana funkcja naprężeń $\Phi(x, y)$ spełniała warunek brzegowy:

$$(2.2) \quad \Phi = 0 \quad \text{wzdłuż} \quad y = f(x) + \varepsilon g(x).$$

Zagadnienie to rozwiążemy metodą małego parametru, dokonując przedtem pewnej modyfikacji zadania. Jej istotą jest usunięcie małego parametru ε z warunku brzegowego (2.2) i wprowadzenie go do równania (2.1). Dokonujemy transformacji współrzędnych $(x, y) \rightarrow (x, t)$, mianowicie:

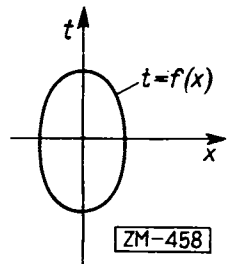
$$(2.3) \quad t = yf(x)/(f(x) + \varepsilon g(x)), \quad x = x.$$

Wzory transformacyjne (2.3) zostały tak zbudowane, by dla $y = f(x) + \varepsilon g(x)$, to znaczy wzdłuż konturu przekroju zaburzonego, zachodziło $t = f(x)$. Oznacza to, że na płaszczyźnie nowych zmiennych (t, x) przekrój zaburzony uzyskuje kształt przekroju podstawowego (rys. 2). Wprowadzenie transformacji (2.3) do równania (2.1) umożliwia napisanie go w postaci

$$(2.4) \quad L[\Phi(x, t), \varepsilon] = -2,$$

a więc postaci identycznej z równaniem (1.1). Operator różniczkowy L , po uwzględnieniu wzorów (2.3) oraz relacji

$$(2.5) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2,$$



Rys. 2

przyjmuje prostą postać

$$(2.6) \quad L = \kappa^2(x, t, \varepsilon) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \text{gdzie} \quad \kappa(x, t, \varepsilon) = \partial t / \partial y.$$

Szukana funkcja Prandtla $\Phi(x, t)$ powinna więc spełniać równanie (2.4) oraz warunek brzegowy:

$$(2.7) \quad \Phi = 0 \quad \text{wzdłuż} \quad t = f(x).$$

Widać stąd, że mały parametr ε został ostatecznie usunięty z warunku brzegowego. Równanie (2.4) można rozwiązać metodą małego parametru w jej normalnej postaci. Niech więc funkcja $\Phi(x, t)$ będzie przedstawiona szeregiem

$$(2.8) \quad \Phi(x, t) = \Phi_0(x, t) + \Phi_1(x, t)\varepsilon + \Phi_2(x, t)\varepsilon^2 + \dots$$

co, po wstawieniu do równania (2.4), da nieskończony układ równań typu Poissona:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \Phi_0(x, t) &= -2, \\ &\dots \\ \nabla^2 \Phi_n(x, t) &= f_n(x, t), \\ &\dots \end{aligned}$$

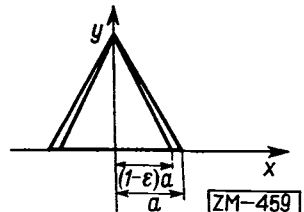
przy czym każda z funkcji $\Phi_n(x, t)$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$ winna spełniać warunek brzegowy (2.7). Rozwiązanie pierwszego spośród równań (2.9) jest znanym rozwiązaniem dla przekroju podstawowego; pozostałe natomiast równania mogą być rozwiązane jedną ze znanych metod przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych (L. Collatz [1]). Należy zaznaczyć, że postać funkcji $f_n(x, t)$ występujących po prawej stronie równań Poissona (2.9) zależy od rodzaju symetrii rozpatrywanego konturu (zob. przykład rozwiązany poniżej).

3. Przykład zastosowania. Korzystając z opisanej powyżej transformacji współrzędnych oraz stosując metodę małego parametru rozwiążemy problem de Saint Venanta dla pręta o przekroju w kształcie trójkąta równoramiennego. Przekrojem podstawowym dla rozpatrywanego obszaru jest trójkąt równoboczny o boku $2a$ (rys. 3). Szukana funkcja naprężeń $\Phi = \Phi(x, y)$ powinna spełniać równanie

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2$$

oraz warunek brzegowy

$$(3.2) \quad \Phi = 0 \quad \text{dla} \quad y = 0, \quad y = \sqrt{3} \left(a \pm \frac{x}{1 - \varepsilon} \right),$$



Rys. 3

gdzie ε jest małym parametrem, określonym na rysunku 3. Dla $\varepsilon \rightarrow 0$ przekrój zaburzony (trójkąt równoramienny) przekształca się w przekrój podstawowy (trójkąt równoboczny). W celu wyeliminowania parametru ε z warunku brzegowego (3.2) należy dokonać transformacji współrzędnych według relacji (2.8). Wygodnie jest przedtem napisać równanie prawej krawędzi trójkąta równobocznego $x = f(y)$ w postaci

$$(3.3) \quad x = a - \frac{y}{\sqrt{3}} = f(y)$$

oraz prawej krawędzi trójkąta równoramiennego

$$(3.4) \quad x = a - \frac{y}{\sqrt{3}} + \left(-a + \frac{y}{\sqrt{3}}\right)\varepsilon = f(y) + g(y)\varepsilon.$$

Porównując (3.3) oraz (3.4) otrzymujemy

$$(3.5) \quad f(y) = -g(y).$$

Wobec dokonanej zamiany zmiennej niezależnej ($x \rightarrow y$), równanie transformacyjne (2.3) przyjmie postać

$$(3.6) \quad t = xf(y)/(f(y) + \varepsilon g(y)), \quad y = y,$$

a po uwzględnieniu relacji (3.5) postać

$$(3.7) \quad t = x/(1 - \varepsilon), \quad y = y.$$

Korzystając ze wzorów (2.6) oraz (3.7) przekształcamy równanie różniczkowe (3.1), wprowadzając doń nowe zmienne (t, y). Otrzymujemy wówczas

$$(3.8) \quad \frac{1}{(1 - \varepsilon)^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi(t, y)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi(t, y)}{\partial y^2} = -2,$$

przy czym rozpatrywany obszar — trójkąt równoramienny — przekształca się na płaszczyźnie (t, y) w trójkąt równoboczny. Funkcja Prandtla $\Phi = \Phi(t, y)$ winna więc spełniać obecnie następujący warunek brzegowy:

$$(3.9) \quad \Phi = 0 \quad \text{dla} \quad y = 0, \quad y = \sqrt{3}(a \pm t).$$

Warunek ten łatwo otrzymać z równań (3.2) wstawiając doń wzory transformacyjne (3.7). Poszukujemy funkcji $\Phi = \Phi(t, y)$ w postaci szeregu:

$$(3.10) \quad \Phi(t, y) = \Phi_0(t, y) + \Phi_1(t, y)\varepsilon + \Phi_2(t, y)\varepsilon^2 + \dots$$

Szereg (3.10) wstawiamy do równania (3.8), rozwijając równocześnie wyrażenie $1/(1 - \varepsilon)^2$ w szereg potęgowy w otoczeniu punktu $\varepsilon = 0$.

Otrzymujemy

$$(3.11) \quad (1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \dots) \left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} \varepsilon + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} \varepsilon^2 + \dots \right) + \\ + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \varepsilon + \dots = -2.$$

Stąd, po wymnożeniu oraz porównaniu współczynników przy tych samych potęgach parametru ε , otrzymujemy nieskończony układ równań różniczkowych typu Poissona

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \Phi_0 &= -2, \\ \nabla^2 \Phi_1 &= -2\Phi_0'', \\ \nabla^2 \Phi_2 &= -3\Phi_0'' - 2\Phi_1'', \\ &\dots \\ \nabla^2 \Phi_n &= -\sum_{i=1}^n (i+1)\Phi_{n-i}'', \\ &\dots \end{aligned}$$

gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$, natomiast $'$, $''$ oznaczają pochodne cząstkowe względem zmiennej t , np. $\Phi_0'' = \partial^2 \Phi_0 / \partial t^2$. Wszystkie funkcje $\Phi_n(t, y)$ oraz funkcja $\Phi_0(t, y)$ winny spełniać warunek brzegowy (3.9).

Rozwiązanie pierwszego spośród równań (3.12) jest znane, jest to rozwiązanie dla przekroju podstawowego, a zatem funkcja Prandtla jest tutaj proporcjonalna do lewej strony równania konturu $f(t, y) = 0$, mianowicie

$$(3.13) \quad \Phi_0 = Cy [(y - a\sqrt{3})^2 - 3t^2],$$

przy czym stałą C należy tak dobrać, aby $\nabla^2 \Phi_0 = -2$. Wykonując proste przeliczenie, otrzymujemy

$$(3.14) \quad C = 1/2\sqrt{3}a.$$

Zajmiemy się obecnie rozwiązaniem drugiego równania w układzie (3.12). Uwzględniając (3.13), mamy

$$(3.15) \quad \Phi_0 = -6Cy,$$

wskutek czego rozpatrywane równanie ma kształt

$$(3.16) \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = 12Cy.$$

Znalezienie funkcji $\Phi_1 = \Phi_1(t, y)$, spełniającej równanie (3.16) oraz warunek brzegowy (3.9) umożliwi uwzględnienie wpływu zakłócenia przekroju (odstępstwo od przekroju podstawowego) na funkcję naprężeń $\Phi(t, y)$.

Nie potrafimy w sposób ścisły rozwiązać równania (3.16) wraz z warunkiem brzegowym (3.9). Założymy więc z góry postać rozwiązania przybliżonego, pozostawiając swobodnymi tylko pewne parametry, a następnie określimy ich wartości metodą najmniejszej sumy kwadratów.

Niech funkcja $\bar{\Phi}_1$ ma postać

$$(3.17) \quad \bar{\Phi}_1 = \Phi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} y^i t^j = \Phi_0 (a_{00} + a_{10}y + a_{01}t + a_{20}y^2 + a_{11}yt + \dots).$$

Łatwo przewidzieć, że $a_{01} = a_{11} = \dots = a_{i,2j+1} = 0$, ze względu na wymaganą parzystość wobec zmiennej t (symetria przekroju). Poprzez stając na wyrazach liniowych w szeregu (3.17) otrzymujemy

$$(3.18) \quad \bar{\Phi}_1 = Cy [(y - a\sqrt{3})^2 - 3t^2](\alpha_1 + \beta_1 y),$$

gdzie dla wygody wprowadzono oznaczenia $\alpha_1 = a_{00}$, $\beta_1 = a_{10}$. Kreska u góry nad symbolem $\bar{\Phi}_1$ oznacza, że rozpatrywana funkcja⁽¹⁾ jest jedynie pewnym przybliżeniem szukanej funkcji $\Phi_1(t, y)$. Aby wyznaczyć współczynniki α_1, β_1 należy zażądać minimum funkcjonału

$$(3.19) \quad \Omega = \iint_{D_0} \Psi^2(t, y, \alpha_1, \beta_1) dt dy$$

gdzie $\Psi(t, y, \alpha_1, \beta_1)$ oznacza tak zwany defekt, natomiast obszar całkowania D_0 ze względu na symetrię przekroju jest rozpostarty tylko na połowę trójkąta równobocznego na płaszczyźnie (t, y)

$$(3.20) \quad 0 \leq t \leq a, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{3}(a-t).$$

Obliczamy defekt:

$$(3.21) \quad \Psi(t, y, \alpha_1, \beta_1) = V^2 \bar{\Phi}_1 - 12Cy = \\ = [6\beta_1(y^2 - 2a\sqrt{3}y + a^2 - t^2) - 12y - 4\sqrt{3}a\alpha_1]C$$

oraz żądamy, aby

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1} = 0.$$

Wstawiając (3.21) do wyrażeń (3.19) oraz wykonując różniczkowanie pod znakiem całki, otrzymujemy układ równań:

$$\iint_{D_0} [3\beta_1(y^2 - 2a\sqrt{3}y + a^2 - t^2) - 6y - 2\sqrt{3}a\alpha_1] dt dy = 0, \\ \iint_{D_0} [3\beta_1(y^2 - 2a\sqrt{3}y + a^2 - t^2) - 6y - 2\sqrt{3}a\alpha_1](y^2 - 2a\sqrt{3}y + a^2 - t^2) dt dy = 0.$$

⁽¹⁾ Funkcja $\bar{\Phi}_1$ spełnia warunek brzegowy (3.9), nie spełnia natomiast równania różniczkowego (3.16).

Stąd, po wykonaniu całkowania, otrzymujemy

$$(3.22) \quad \begin{aligned} 6,9284a\beta_1 + 12\alpha_1 + 12 &= 0, \\ 4,5035a\beta_1 - 7\alpha_1 + 3,9 &= 0 \end{aligned}$$

i wreszcie

$$(3.23) \quad \alpha_1 = -0,2640, \quad \beta_1 = -\frac{1}{a}1,2757.$$

Ostatecznie szukana funkcja $\bar{\Phi}_1$ wyraża się wzorem

$$(3.24) \quad \bar{\Phi}_1 = -Cy[(y - a\sqrt{3})^2 - 3t^2] \left(0,2640 + \frac{y}{a}1,2757 \right).$$

Analogiczna budowa wszystkich równań układu (3.12), dla $n = 1, 2, 3, \dots$, narzuca myśl, aby w podobny sposób znaleźć wszystkie pozostałe funkcje $\bar{\Phi}_2, \bar{\Phi}_3, \dots, \bar{\Phi}_n$. Mieliśmy poprzednio $\bar{\Phi}_1 = \Phi_0(\alpha_1 + \beta_1 y)$. Niech zatem

$$(3.25) \quad \bar{\Phi}_n = \Phi_0(\alpha_n + \beta_n y) = \Phi_0 \varphi_n(y), \quad n = 1, 2, \dots$$

Wówczas funkcja naprężeń $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}(t, y)$ daje się zapisać w postaci

$$(3.26) \quad \bar{\Phi} = \Phi_0 + \bar{\Phi}_1 \varepsilon + \bar{\Phi}_2 \varepsilon^2 + \dots = \Phi_0 [1 + \varphi_1(y)\varepsilon + \varphi_2(y)\varepsilon^2 + \dots].$$

Dobór funkcji φ_n sprowadza się do znalezienia współczynników α_n oraz β_n metodą najmniejszej sumy kwadratów. Przedtem wykonamy kilka niezbędnych przekształceń. Uwzględniając (3.25) oraz (3.15), obliczamy

$$(3.27) \quad \Phi_n'' = \Phi_0'' \varphi_n(y) = -6Cy \varphi_n(y).$$

Z (3.27) i (3.12)

$$(3.28) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \Phi_0 &= -2, \\ \nabla^2 \bar{\Phi}_n &= 6Cy \sum_{i=1}^n (i+1) \varphi_{n-i}(y), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Prawą stronę równań (3.28) oznaczmy przez $F_n(y)$ i przekształcimy, jak następuje:

$$(3.29) \quad F_n(y) = 6Cy \sum_{i=1}^n (i+1) [\alpha_{n-i} + \beta_{n-i} y] = 6Cy (A_{n-1} + B_{n-1} y),$$

gdzie współczynniki

$$(3.30) \quad A_{n-1} = \sum_{i=1}^n (i+1) \alpha_{n-i}, \quad B_{n-1} = \sum_{i=1}^n (i+1) \beta_{n-i}$$

nie zależą od α_n i β_n . Jest mianowicie:

$$(3.31) \quad \begin{aligned} A_{n-1} &= A_{n-1}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}), \\ B_{n-1} &= B_{n-1}(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}). \end{aligned}$$

Dzięki własności (3.31) współczynników A_{n-1} oraz B_{n-1} w istotny sposób upraszcza się dalszy tok obliczeń. Zauważmy ponadto, że $\varphi_0 = 1$, bo $\Phi_0 = \Phi_0 \cdot \varphi_0$. Dla przykładu, korzystając ze wzorów (3.29) oraz (3.30), napiszemy kilka pierwszych funkcji $F_n(y)$ oraz odpowiadających im współczynników A_{n-1} i B_{n-1}

$$(3.32) \quad \begin{aligned} F_1(y) &= 6Cy \cdot 2\varphi_0 = 6Cy(2 + 0 \cdot y), \\ F_2(y) &= 6Cy(2\varphi_1 + 3) = 6Cy[2\alpha_1 + 3 + 2\beta_1 y], \\ &\dots \end{aligned}$$

oraz

$$(3.33) \quad \begin{aligned} A_0 &= 2, & B_0 &= 0, \\ A_1 &= 2\alpha_1 + 3, & B_1 &= 2\beta_1, \\ &\dots \end{aligned}$$

Należy teraz rozwiązać równanie:

$$(3.34) \quad \nabla^2 \bar{\Phi}_n = 6Cy(A_{n-1} + B_{n-1}y), \quad n = 1, 2, \dots,$$

z warunkiem brzegowym (3.9).

Wobec przyjętej poprzednio relacji $\bar{\Phi}_n = \Phi_0 \varphi_n$

$$(3.35) \quad \nabla^2 \bar{\Phi}_n = \nabla^2 [\Phi_0 \varphi_n] = \varphi_n \nabla^2 \Phi_0 + \Phi_0 \nabla^2 \varphi_n + 2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} + 2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial y}.$$

Drugi oraz trzeci wyraz prawej strony równania (3.35) znikają, wobec

$$(3.36) \quad \nabla^2 \varphi_n = 0, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = 0.$$

Uwzględniając ponadto równości

$$(3.37) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} &= C[(y - a\sqrt{3})^2 + 2y(y - a\sqrt{3}) - 3t^2], \\ \nabla^2 \Phi_0 &= -2, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} = \beta_n, \end{aligned}$$

otrzymujemy

$$(3.38) \quad \nabla^2 \bar{\Phi}_n = 6C\beta_n(y^2 - 2a\sqrt{3}y + a^2 - t^2) - 4\sqrt{3}Ca\alpha_n.$$

Stąd już można łatwo obliczyć defekt

$$(3.39) \quad \Psi(t, y, a_n, \beta_n) = \nabla^2 \Phi_n - F_n = \\ = 6C\beta_n(y^2 - 2a\sqrt{3}y + a^2 - t^2) - 6Cy(A_{n-1} + B_{n-1}y) - 4\sqrt{3}Ca a_n.$$

Żądając minimum błędu

$$(3.40) \quad \Omega = \int \int_{D_0} \Psi^2 dt dy$$

otrzymujemy układ równań

$$\int \int_{D_0} [3\beta_n(y^2 - 2a\sqrt{3}y + a^2 - t^2) - 3y(A_{n-1} + B_{n-1}y) - 2\sqrt{3}a a_n] dt dy = 0, \\ (3.41) \quad \int \int_{D_0} [3\beta_n(y^2 - 2a\sqrt{3}y + a^2 - t^2) - 3y(A_{n-1} + B_{n-1}y) - 2\sqrt{3}a a_n] \times \\ \times (y^2 - 2a\sqrt{3}y + a^2 - t^2) dt dy = 0.$$

Stąd, po wykonaniu całkowania

$$(3.42) \quad 6,9284a\beta_n + 12a_n + 6A_{n-1} + 5,1963aB_{n-1} = 0, \\ 4,5035a\beta_n - 7a_n + 1,9500A_{n-1} + 3,2044aB_{n-1} = 0$$

i wreszcie

$$(3.43) \quad a_n = -0,1320A_{n-1} - 0,0124aB_{n-1}, \\ \beta_n = -\frac{1}{a}0,6378A_{n-1} - 0,7297B_{n-1}.$$

Wzory rekurencyjne (3.43) umożliwiają określenie dowolnej n -tej funkcji $\bar{\Phi}_n = \bar{\Phi}_0(a_n + \beta_n y)$ w szeregu (3.26).

W szczególności dla $n = 1$ ($A_0 = 2$, $B_0 = 0$, zob. (3.33)), otrzymujemy:

$$(3.44) \quad \alpha_1 = -0,2640, \quad \beta_1 = -\frac{1}{a}1,2757,$$

co jest identyczne ze znalezionymi poprzednio wartościami (3.23).

Funkcja naprężeń Prandtla $\Phi(y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\Phi}_i \varepsilon^i$ została znaleziona w postaci przybliżonej i jest przedstawiona szeregiem (3.26), mianowicie $\bar{\Phi}(y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\Phi}_i \varepsilon^i$, przy czym $\bar{\Phi}_0 \equiv \Phi_0$. Jeżeli poprzestaniemy na pierwszym przybliżeniu, otrzymamy:

$$(3.45) \quad \bar{\Phi} = \Phi_0[1 + (\alpha_1 + \beta_1 y)\varepsilon] = Cy[(y - a\sqrt{3})^2 - 3t^2][1 + (\alpha_1 + \beta_1 y)\varepsilon],$$

przy czym dwie kreski nad symbolem Φ zostały użyte dla zaznaczenia, że w szeregu (3.26) uwzględniamy tylko wyraz zawierający ε w potęgę pierwszej.

Dla sprawdzenia przeprowadzonych wyżej obliczeń, wyprowadzimy wzory na naprężenia styczne τ_{zx} oraz τ_{zy} , a w szczególności obliczymy maksymalne naprężenie styczne τ_{\max} , które w praktyce inżynierskiej ma największe znaczenie. Korzystając ze znanych relacji

$$(3.46) \quad \tau_{zx} = G\vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{zy} = -G\vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{G\vartheta}{1-\varepsilon} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

(gdzie G oznacza moduł Kirchoffa, a ϑ – jednostkowy kąt skręcenia) oraz z wyrażenia (3.45), otrzymujemy

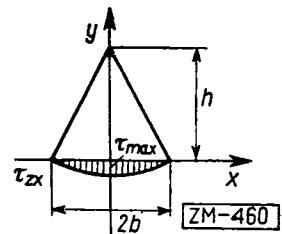
$$(3.47) \quad \begin{aligned} \tau_{zx} = \frac{G\vartheta}{2\sqrt{3}a} \{ & 2(y - a\sqrt{3})y[1 + (\alpha_1 + \beta_1 y)\varepsilon] + \\ & + [(y - a\sqrt{3})^2 - 3t^2][1 + (\alpha_1 + 2\beta_1 y)\varepsilon] \}, \\ \tau_{zy} = \frac{G\vartheta\sqrt{3}}{a(1-\varepsilon)^2} & xy[1 + (\alpha_1 + \beta_1 y)\varepsilon]. \end{aligned}$$

Największe naprężenie styczne τ_{\max} obliczamy z pierwszego ze wzorów (3.47), podstawiając doń $x = y = 0$ (rys. 4)

$$(3.48) \quad \tau_{\max} = \tau_{zx} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \frac{\sqrt{3}G\vartheta a}{2} (1 + \alpha_1 \varepsilon)$$

lub w postaci bezwymiarowej:

$$(3.49) \quad \begin{aligned} t = \frac{\tau_{\max}}{G\vartheta h} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{h} (1 + \alpha_1 \varepsilon) = \\ &= \frac{1}{2} (1 + \alpha_1 \varepsilon) \end{aligned}$$



Rys. 4

przy czym uwzględniliśmy, że dla trójkąta równobocznego $a/h = 1/\sqrt{3}$ (a jest połową boku trójkąta równobocznego).

Wzór (3.49) odznacza się dużą prostotą. Dla porównania przytoczymy jeden z wzorów spotykanych w nowszym piśmiennictwie technicznym (A. Conway [2])

$$(3.50) \quad t = \frac{b^2(69b^4 + 50b^2h^2 - 3h^4)}{b^4(81b^2 + 89h^2) + h^4(7b^2 - h^2)}.$$

Wzór (3.50) jest tylko nieznacznie dokładniejszy od wzoru (3.49), uzyskanego na drodze stosowania metody małego parametru i przy uwzględnieniu pierwszego tylko przybliżenia. Wartości liczbowe bezwymiarowego naprężenia $\tau_{\max}/G\vartheta h$, obliczonego według A. Conway'a [2] (metodą

kolokacji), ze wzoru (3.49) oraz w sposób ścisły (metody relaksacji, H. Nuttall [4]) zestawiono w tablicy 1. Związek między stosunkiem b/h a małym parametrem ε określa prosta relacja: $\varepsilon = 1 - \sqrt{3}b/h$.

TABLICA 1

b/h	ε	$\tau_{\max}/G\delta h$			błąd	
		metoda małego parametru	A. Conway	ściśle (metoda relaksacji)	wzoru (3.49)	wzoru (3.50)
$1/\sqrt{3}$	0,000	0,500	0,500	0,500	0%	0%
1,0	-0,732	0,597	0,659	0,649	-8,02%	+1,54%
$\sqrt{3}$	-2,000	0,764	0,766	0,767	-0,39%	-0,13%

W zakończeniu pragnę wyrazić podziękowanie prof. dr Michałowi Życzkowskiemu za pomocne dyskusje i wiele cennych uwag, które znacznie ułatwiły wykonanie niniejszej pracy.

Prace cytowane

- [1] L. Collatz, *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych*, Warszawa 1960.
- [2] A. Conway, *Torsion of prismatical rods with isosceles-triangle and other cross sections*, J. Appl. Mech., March 1960.
- [3] Л. С. Леибензон, *Собрание трудов I*, Москва 1951.
- [4] H. Nuttall, *Torsion of uniform rods with particular reference to rods of triangular cross section*, J. Appl. Mech. 79 (1952).
- [5] S. P. Timoshenko, *Theory of elasticity*, New York - London 1934.
- [6] H. S. Tsien, *The Poincaré-Lighthill-Kuo method*, Advances in Appl. Mech. 4 (1956), str. 281-349.
- [7] M. Wnuk, *Skrećanie prętów przyrmatycznych o przekrojach niekołowych*, Czas. Techn., Kraków (1962), str. 8-13.

KATEDRA FIZYKI, POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca wpłynęła 4. 5. 1963

М. ВНУК (Краков)

О НЕКОТОРОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ В ВОПРОСЕ, РЕШЕННЫМ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе рассмотрен случай, когда малый параметр ε не выступает непосредственно в дифференциальном уравнении $L[\Phi(x, y)] = 0$, но входит в граничное условие (например, в задаче Дирихлета). Приведённое преобра-

зование координат разрешает записать граничное условие в форме свободной от ε . С другой стороны дифференциальное уравнение после преобразования включает малый параметр $L[\Phi(x, t), \varepsilon] = 0$. Поэтому функцию Φ можно представить в виде ряда, используя метод малого параметра $\Phi(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i(x, t) \varepsilon^i$.

Наиболее подробно решен граничный вопрос $\Phi = 0$ по контуру $y = f(x) + \varepsilon g(x)$ для уравнения Пуассона $\nabla^2 \Phi = \text{const}$.

Приведена также геометрическая интерпретация примененного преобразования $(x, y) \rightarrow (x, t)$, т. е. переход *возмущенного* контура в *основной* и наоборот.

В заключении, этим методом решена задача из теории упругости (свободное скручивание призматического стержня с сечением в форме равностороннего треугольника).

M. WNUK (Kraków)

ON A CERTAIN TRANSFORMATION OF THE BOUNDARY CONDITION
IN THE PROBLEM SOLVED BY THE SMALL PARAMETER METHOD

SUMMARY

The author considers the case where the small parameter ε does not occur directly in the differential equation $L[\Phi(x, y)] = 0$ but in the boundary condition (e.g. in the Dirichlet problem). The proposed transformation of the coordinates permits putting the boundary condition in a form free from the parameter ε , while the differential equation contains after the transformation the small parameter: $L[\Phi(x, t), \varepsilon] = 0$, whence the required function Φ can be represented, as usually happens with the use of the small parameter method, in the form of the series $\Phi(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i(x, t) \varepsilon^i$.

In particular, the author solves the boundary problem $\Phi = 0$ along the contour $y = f(x) + \varepsilon g(x)$ for the Poisson equation $\nabla^2 \Phi = \text{const}$. He also gives the geometrical interpretation of the transformation in question: $(x, y) \rightarrow (x, t)$ — passing of the *perturbed* contour into the *basic* one and vice versa.

Finally, to illustrate the method, a certain problem in the theory of elasticity is solved (free torsion of a prismatic bar whose cross-section is an isosceles triangle).
