ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
VII (1964)

B. KOPOCIŃSKI i L. ZUBRZYCKA (Wrocław)

UWAGA O PODZIALE ZESPOŁU CECH NA PODZESPOŁY ZGODNE

Praca niniejsza nawiązuje do prac [3] i [4], a zwłaszcza do pracy [4], gdzie rozpatruje się sposób dzielenia zespołu cech przyrodniczych na podzespoły zgodne. Takiego podziału cech na podzespoły zgodne wymaga się przy analizie cech przyrodniczych metodą wskaźników Perkala [2]. Można rozważać optymalność podziału ze względu na liczbę podzespołów (zobacz [4]) albo ze względu na sumę wag. Celem tej pracy jest wskazanie rozbieżności między żądaniem podziału na najmniejszą ilość podzespołów zgodnych, a żądaniem podziału o największej sumie wag wyróżnionych podzespołów zgodnych. Warto zwrócić uwagę na probabilistyczny sens drugiego żądania polegający na tym, że jeśli unormujemy cechy tak, żeby wszystkie one miały wariancje równe 1, to waga zespołu zgodnego cech określona poniżej w definicji 3 jest równa wariancji sumy cech tak unormowanych. Wydaje się naturalne uważać zespół cech za tym zgodniejszy, im większa jest ta wariancja.

*

* *

DEFINICJA 1. O zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będziemy mówili, że stanowią *układ zgodny*, jeżeli wszystkie współczynniki korelacji między tymi zmiennymi losowymi są nieujemne.

DEFINICJA 2. O zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będziemy mówili, że stanowią *układ słabo zgodny*, jeżeli można znaleźć układ liczb $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, takich że $\varepsilon_i = \pm 1$, a zmienne losowe $\varepsilon_1 X_1, \varepsilon_2 X_2, \ldots, \varepsilon_n X_n$ stanowią układ zgodny.

DEFINICJA 3. *Wagą* układu zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ stanowiących układ zgodny nazywamy wyrażenie

$$W = W(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij},$$

gdzie r_{ij} jest współczynnikiem korelacji między zmiennymi losowymi X_i i X_j.

Definicja 4. Dla słabo zgodnego układu zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ przez jego *wagę* rozumieć będziemy określoną w definicji 3 wagę układu zmiennych losowych $\varepsilon_1 X_1, \varepsilon_2 X_2, \ldots, \varepsilon_n X_n$, który już jest zgodny.

Twierdzenie 1. *Nie jest prawdą, że podział zespołu zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ na najmniejszą ilość podzespołów zgodnych, dla których suma wag wyróżnionych podzespołów jest największa, daje najmniejszą sumę wag wyróżnionych zgodnych podzespołów wśród wszystkich możliwych podziałów na podzespoły zgodne.*

Twierdzenie 2. *Nie jest prawdą, że podział zespołu zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ na najmniejszą ilość podzespołów słabo zgodnych, dla którego suma wag wyróżnionych podzespołów jest największa, daje największą sumę wag wyróżnionych podzespołów wśród wszystkich możliwych podziałów na podzespoły słabo zgodne.*

Nim sformułujemy przykłady z których wynikają te dwa twierdzenia, udowodnimy

Lemat 1. *Niech I będzie macierzą jednostkową stopnia n. Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą symetryczną stopnia n, taką że $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 0$. Wówczas znajdzie się liczba $\eta > 0$, taka że $R = I + \eta A$ będzie macierzą współczynników korelacji*[1].

Dowód. Niech $K = \{(i,j)\colon 1 \leqslant i < j,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Dla $(i,j)\in K$ oznaczmy przez $B_{ij}^{(+1)}$ macierz symetryczną o elementach b_{rs} taką, że $b_{11} = b_{22} = \ldots = b_{nn} = b_{ij} = b_{ji} = 1$, a wszystkie pozostałe elementy są równe 0, a przez $B_{ij}^{(-1)}$ macierz symetryczną o elementach b_{rs}, taką że $b_{11} = b_{22} = \ldots = b_{nn} = -b_{ij} = -b_{ji} = 1$ a wszystkie pozostałe elementy są równe 0.

Niech $Y_1^{(ij)}, Y_2^{(ij)}, \ldots, Y_n^{(ij)}$ dla $(i,j)\in K$ będą $n^2(n-1)/2$ niezależnymi zmiennymi losowymi o wartości oczekiwanej 0 i wariancji 1. Wówczas dla $(i,j)\in K$ zmienne losowe $X_1^{(ij)} = \sqrt{|a_{ij}|}\, Y_1^{(ij)}, \ldots, X_{j-1}^{(ij)} = \sqrt{|a_{ij}|}\, Y_{j-1}^{(ij)}$, $X_j^{(ij)} = (\operatorname{sgn} a_{ij})\sqrt{|a_{ij}|}\, Y_i^{(ij)}$, $X_{j+1}^{(ij)} = \sqrt{|a_{ij}|}\, Y_{j+1}^{(ij)}$, $X_n^{(ij)} = \sqrt{|a_{ij}|}\, Y_n^{(ij)}$ mają macierz kowariancji

$$[a_{ij}] B_{ij}^{(\operatorname{sgn} a_{ij})},$$

a zatem zmienne losowe

$$Z_k = \sum_{(i,j)\in K} X_k^{(ij)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

[1] Nie znaleźliśmy tego lematu w literaturze, choć jest on bardzo bliski niektórym znanym sformułowaniom. Wiadomo np. (por. [1], str. 40, ćwiczenie 2), że jeśli A jest macierzą symetryczną, to istnieje liczba η, taka że macierz $I + \eta A$ jest dodatnio określona.

mają macierz kowariancji

$$\sum_{(i,j)\in K} [a_{ij}] B_{ij}^{(\operatorname{sgn} a_{ij})} = \Big(\sum_{(i,j)\in K} |a_{ij}|\Big) I + A,$$

czyli macierz współczynników korelacji

$$I+\eta A, \quad \text{gdzie} \quad \eta = \frac{1}{\sum\limits_{(i,j)\in K} |a_{ij}|} = \frac{2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|}.$$

To kończy dowód lematu 1.

D o w ó d   t w i e r d z e n i a 1. Wobec lematu 1 i tego, że waga zgodnego układu zmiennych losowych jest co najmniej równa n, gdyż suma określająca jej wartość ma co najmniej n składników równych 1, wystarczy przy budowaniu przykładu dowodzącego twierdzenia 1 rozważyć macierz symetryczną mającą na głównej przekątnej same zera i potraktować ją tak, jakby była macierzą współczynników korelacji.

Rozważmy macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & -\varepsilon & 1 \\ \varepsilon & 0 & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 1 & -\varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix}$$

stopnia 4, gdzie ε jest dostatecznie małą liczbą dodatnią. Widzimy, że jedynym możliwym podziałem na dwie grupy zgodne jest podział na (X_1 i X_2) i (X_3 i X_4). Daje on sumę wag równą 4ε. Natomiast podział na trzy grupy (X_1 i X_4), (X_2) i (X_3) daje sumę wag równą 2.

To dowodzi twierdzenia 1.

D o w ó d   t w i e r d z e n i a 2. Przykład ten nie dowodzi twierdzenia 2 bo, jak zauważył J. Łukaszewicz, przez zmianę znaku cechy X_3 uzyskalibyśmy podział na słabo zgodne grupy (X_1 i X_4) i (X_2 i X_3) o sumie wag $2+2\varepsilon$.

Rozpatrzmy więc macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & 0 & 1 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & 1 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & 0 \end{bmatrix}$$

stopnia 5, w której ε jest dostatecznie małą liczbą dodatnią. Można łatwo sprawdzić, że tu najmniejsza ilość podzespołów słabo zgodnych, jakie można wyróżnić, jest równa 2, i że wśród takich podziałów na dwa podzespoły słabo zgodne największą sumę wag, równą $2+6\varepsilon$, daje podział na podzespoły (X_1 i X_5) i (X_2, X_3 i X_4). Natomiast podział na trzy słabo zgodne podzespoły (X_1 i X_2), (X_3 i X_4) i (X_5) daje sumę wag równą 4. To dowodzi twierdzenia 2.

Dla większej konkretności podajemy poniżej dwie macierze współczynników korelacji skonstruowane według przepisu zawartego w lemacie 1.

PRZYKŁAD 1. Niech

$$\begin{bmatrix} 1{,}00 & 0{,}10 & -0{,}10 & 0{,}50 \\ 0{,}10 & 1{,}00 & -0{,}10 & -0{,}10 \\ -0{,}10 & -0{,}10 & 1{,}00 & 0{,}10 \\ 0{,}50 & -0{,}10 & 0{,}10 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

będzie macierzą współczynników korelacji cech X_1, X_2, X_3 i X_4. Suma wag jedynego możliwego podziału na dwie grupy zgodne jest $W(X_1, X_2)+W(X_3, X_4) = 4{,}4$. Natomiast $W(X_1, X_4)+W(X_2)+W(X_3) = 5$.

PRZYKŁAD 2. Niech

$$\begin{bmatrix} 1{,}0000 & 0{,}2500 & -0{,}0625 & -0{,}0625 & 0{,}0625 \\ 0{,}2500 & 1{,}0000 & 0{,}0625 & 0{,}0625 & -0{,}0625 \\ -0{,}0625 & 0{,}0625 & 1{,}0000 & 0{,}2500 & -0{,}0625 \\ -0{,}0624 & 0{,}0625 & 0{,}2500 & 1{,}0000 & 0{,}0625 \\ 0{,}0625 & -0{,}0625 & -0{,}0625 & 0{,}0625 & 1{,}0000 \end{bmatrix}$$

będzie macierzą współczynników korelacji cech X_1, X_2, X_3, X_4 i X_5. Najmniejszą ilością podzespołów słabo zgodnych jest tu 2, a wśród nich największą sumę wag mamy $W(X_1, X_5)+W(X_2, X_3, X_4) = 5{,}5$. Natomiast $W(X_1, X_2)+W(X_3, X_4)+W(X_5) = 6$.

Prace cytowane

[1] R. Bellman, *Introduction to matrix analysis*, New York 1960.

[2] J. Perkal, *On the analysis of a set of characteristics*, Zastosow. Mat. 5 (1960), str. 35-45.

[3] W. Szwarc, *O pewnym macierzowym zagadnieniu Perkala*, Zastosow. Mat. 5 (1960), str. 289-297.

[4] — *Rozbicie macierzy symetrycznej na najmniejszą ilość minorów głównych o elementach nieujemnych*, Zastosow. Mat. 7 (1963), str. 105–117.

Praca wpłynęła 5. 4. 1963

Б. КОПОЦИНСКИ и Л. ЗУБЖИЦКА (Вроцлав)

ЗАМЕЧАНИЕ О РАЗДЕЛЕНИИ СИСТЕМЫ ПРИЗНАКОВ НА СХОДНЫЕ ПОДСИСТЕМЫ

РЕЗЮМЕ

В работе [2] рассматривается разделение системы естественных признаков на сходные подсистемы. В настоящей заметке авторы показывают расхождение между требованием разделения на наименьшее количество сходных подсистем и требованием разделения, в котором сумма весов отмеченных сходных подсистем есть наибольшей.

B. KOPOCIŃSKI and L. ZUBRZYCKA (Wrocław)

REMARK ON DIVISION OF SYSTEMS OF FEATURES INTO HARMONIZED SUBSYSTEMS

SUMMARY

The question of dividing a system of random variables into harmonized subsystems has been considered in [2]. In this note it is shown by counter example that the division of a system into the minimal number of harmonized subsystems can be different from a division for which the sum of the weights of the subsystems is maximum.
