ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
VII (1964)

A. ŚNIATYCKI (Sopot)

ZAGADNIENIE TRANSPORTOWE DLA ZMIENNYCH FUNKCYJ POPYTU I PODAŻY

Wstęp. F. L. Hitchcock w roku 1941 i T. C. Koopmans w roku 1947 sformułowali i rozwiązali następujące zagadnienie.

Mamy m dostawców oferujących jednorodny towar w ilościach $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ oraz n odbiorców odbierających ten towar w ilościach $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$. Zakłada się, że suma popytu odbiorców jest równa sumie podaży dostawców. Dane są liczby c_{ij} oznaczające koszty przewozu jednostki towaru od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy. Należy znaleźć liczby x_{ij}, gdzie x_{ij} oznacza ilość przewiezionego towaru od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy, takie, aby ogólny koszt transportu towaru był najmniejszy.

Problem ten nosi nazwę *zagadnienia transportowego*. Dotychczas ukazało się wiele prac, przeważnie matematyków amerykańskich, poświęconych temu ważnemu pod względem ekonomicznym zagadnieniu. Zajmowali się nim także matematycy radzieccy i polscy (por. np. [1]). W roku 1958 zostało wydane szersze opracowanie zagadnień programowania liniowego w postaci książkowej [3]. Autorom chodziło przede wszystkim o jak największe uproszczenie dość skomplikowanej metody rozwiązania. Problem uzmiennienia stałych występujących w zagadnieniu był rozważany w pracy [2] w przypadkach gdy wielkości c_{ij} zależą od jednego lub dwóch parametrów.

Od roku 1952 datuje się rozwój maszyn różnego typu, rozwiązujących ogólne zagadnienia programowania liniowego, a także maszyn specjalnie przystosowanych do rozwiązywania zagadnienia transportowego.

W niniejszej pracy, nawiązując do metody przedstawionej przez Szwarca w [1], podaję sposób wyznaczenia optymalnej macierzy przepływów w przypadku, gdy wielkości $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ oraz $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ zależą od jednego lub kilku parametrów. Zostały podane także dwa przykłady praktyczne. W jednym z nich parametrem ubocznym jest czas, w drugim dwa parametry opisują rozdział kredytów inwestycyjnych.

W pracy została podana nowa metoda wyznaczania wyjściowej macierzy przepływów, prostsza od metod podanych przez Gassa i Szwarca. Metoda ma jeszcze tę dodatkową zaletę, że ułatwia przejście od optymalnej macierzy przepływów dla danego zakresu parametrów do optymalnej macierzy przepływów dla innego zakresu parametrów.

Twierdzenia 1 i 8 podane w pracy są znane ([1], [3]), ale ich dowody są nowe. Twierdzenie 9, w podanym sformułowaniu, nie jest znane. Nowe są: twierdzenie 10 i algorytm wyznaczania bazy optymalnej.

Zagadnienie formułujemy następująco: Dana jest macierz kosztów $[c_{ij}]$ składająca się z nieujemnych liczb, zawierająca m wierszy i n kolumn. Dane są również dwa układy nieujemnych funkcyj a_i, b_j, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, zależnych od jednego lub paru parametrów, takich że

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Należy wyznaczyć taką macierz przepływów $[x_{ij}]$ zawierającą m wierszy i n kolumn, której elementy x_{ij} spełniać będą następujące warunki:

1) x_{ij} są takimi nieujemnymi funkcjami parametrów, że

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

2) funkcja $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ zwana funkcją kosztów osiąga dla wszelkich wartości parametrów najmniejszą wartość.

Macierze równoważne.

DEFINICJA 1. Macierz przepływów $[x_{ij}]$, zależną na ogół od parametrów, która dla danej macierzy kosztów $[c_{ij}]$ i dowolnych wartości parametrów daje minimalną funkcję kosztów, nazywamy *optymalną macierzą przepływów dla macierzy kosztów* $[c_{ij}]$.

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli macierz przepływów* $[x_{ij}]$ *jest optymalną macierzą przepływów dla macierzy kosztów* $[c_{ij}]$, *to jest ona również optymalną macierzą przepływów dla całej klasy macierzy kosztów równoważnych macierzy* $[c_{ij}]$.

Dowód. Z warunku, że macierz przepływów $[x_{ij}]$ jest macierzą optymalną dla macierzy kosztów $[c_{ij}]$ wynika, że dla każdej macierzy $[x'_{ij}]$, której elementami są nieujemne funkcje spełniające warunki

$$\sum_{i=1}^{m} x'_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad \sum_{j=1}^{n} x'_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

i dla każdych wartości argumentów funkcyj x_{ij}, x'_{ij} zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x'_{ij}c_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}c_{ij} \geqslant 0.$$

Niech macierz $[d_{ij}]$ będzie dowolną macierzą równoważną macierzy $[c_{ij}]$. Na podstawie definicji macierzy równoważnych istnieją takie liczby u_i, v_j, gdzie $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, że $d_{ij} = c_{ij} + u_i + v_j$. Obliczymy różnicę r funkcyj kosztów obliczonych dla macierzy kosztów $[d_{ij}]$ i macierzy przepływów $[x'_{ij}]$ i $[x_{ij}]$:

$$r = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x'_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (c_{ij}+u_i+v_j)x'_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (c_{ij}+u_i+v_j)x_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x'_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_i x'_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_j x'_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} -$$

$$- \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} u_i x_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_j x_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x'_{ij} + \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x'_{ij} + \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x'_{ij} -$$

$$- \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x'_{ij} + \sum_{i=1}^{m} u_i a_i + \sum_{j=1}^{n} v_j b_j -$$

$$- \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} u_i a_i - \sum_{j=1}^{n} v_j b_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x'_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

Otrzymana różnica jest identyczna z różnicą funkcyj kosztów obliczonych dla macierzy kosztów $[c_{ij}]$ i macierzy przepływów $[x_{ij}]$, $[x'_{ij}]$; stąd, wobec założenia i definicji optymalnej macierzy przepływów, wynika teza.

Przestrzeń macierzowa, graf.

DEFINICJA 3. *Punktem* p_{ij} nazywamy parę liczb naturalnych i, j. Jeżeli dana jest macierz $[c_{ij}]$, to każdemu jej elementowi c_{ij} można przyporządkować punkt p_{ij}. Zbiór punktów przyporządkowanych wszystkim elementom macierzy $[c_{ij}]$ nazywamy *przestrzenią macierzową* i oznaczamy przez P.

DEFINICJA 4. O dwóch punktach p_{ij} i p_{kl} mówimy, że *leżą w jednej linii*, wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony co najmniej jeden z warunków: 1) $i = k$, 2) $j = l$.

Definicja 5. Mówimy, że punkt p_{ij} *leży między punktami* p_{kl} *i* p_{st} wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi bądź 1) $i = k = s$ i liczba j jest zawarta między liczbami l i t, bądź 2) $j = l = t$ i liczba i jest zawarta między liczbami k i s.

Definicja 6. *Wagą punktu* p_{ij} nazywamy element c_{ij} macierzy $[c_{ij}]$.

Definicja 7. Jeżeli ustalimy pewien podzbiór Q zbioru P, to parę jego punktów nazwiemy *odcinkiem zbioru* Q wtedy i tylko wtedy, gdy: 1) punkty te leżą na jednej linii, 2) żaden punkt zbioru Q nie leży między nimi. Zbiór wszystkich odcinków zbioru Q nazywamy *grafem* i oznaczamy przez G. Punkty należące do Q nazywamy *węzłami grafu* G. W szczególności jeżeli podzbiór Q jest jednoelementowy, to odpowiedni graf nie posiada odcinków i ma tylko jeden węzeł.

Definicja 8. Mówimy, że graf G_1 jest *podgrafem* grafu G, jeżeli zbiór Q_1 wyznaczający graf G_1 jest podzbiorem zbioru Q wyznaczającego graf G. (Może się zdarzyć, że podgraf G_1 ma odcinki, które nie należą do grafu G.)

Definicja 9. Węzeł grafu należący tylko do jednego odcinka nazywać będziemy *węzłem brzegowym*. Jeżeli w grafie są dwa węzły brzegowe, a w każdym z pozostałych węzłów spotykają się dokładnie dwa odcinki, to graf nazywamy *łamaną*.

Definicja 10. Jeżeli w każdym węźle grafu spotykają się dwa odcinki, to graf nazywamy *cyklem*.

Definicja 11. Cykl nazywamy *cyklem prostym*, jeżeli w każdym węźle cyklu spotkają się odcinki leżące na różnych liniach.

Definicja 12. Graf nazywamy *grafem spójnym*, jeżeli dla każdych dwóch węzłów grafu istnieje łamana należąca do grafu łącząca te węzły.

Definicja 13. Mówimy, że *graf zawiera cykl*, jeżeli istnieje podgraf tego grafu, który jest cyklem.

Dla grafów wyznaczonych przez podzbiory punktów przestrzeni P są prawdziwe następujące twierdzenia:

Twierdzenie 2. *Graf posiadający* $m+n$ *węzłów zawiera cykl.*

Twierdzenie 3. *Graf posiadający cykl ma cykl prosty.*

Twierdzenie 4. *Graf nie posiadający cyklu ma co najwyżej* $m+n-1$ *węzłów.*

Twierdzenie 5. *Jeżeli ustalimy graf o* $m+n-1$ *węzłach, nie mający cykli, to każdemu punktowi przestrzeni* P *nie należącemu do grafu jest przyporządkowany jeden i tylko jeden cykl prosty wyznaczony przez dany punkt i węzły grafu.*

Twierdzenie 6. *Jeżeli graf nie ma cykli, to ma* $m+n-1$ *węzłów wtedy i tylko wtedy, gdy na każdej linii przestrzeni* P *leżą jego węzły.*

Baza.

DEFINICJA 14. *Bazą* nazywamy $m+n-1$ punktów przestrzeni P wyznaczających graf spójny, bez cykli. Bazę oznaczamy przez B.

TWIERDZENIE 7. *Istnieje jedna i tylko jedna macierz równoważna macierzy $[c_{ij}]$, która dla ustalonej bazy B przyporządkowuje punktom należącym do bazy wagi zerowe.*

Dowód. Niech B będzie dowolną bazą. Załóżmy, że macierz $[d_{ij}]$ równoważna macierzy $[c_{ij}]$ przyporządkowuje punktom należącym do bazy B wagi zerowe. Przypuśćmy, że punkt $p_{i_1j_k}$ jest dowolnym punktem nie należącym do bazy B. Na podstawie twierdzenia 5 punktowi $p_{i_1j_k}$ jest przyporządkowany jeden i tylko jeden cykl prosty wyznaczony przez punkt $p_{i_1j_k}$ i węzły bazy.

Załóżmy, że cykl jest wyznaczony przez punkty $p_{i_1j_k}, p_{i_1j_2}, p_{i_2j_2}, p_{i_2j_3}, p_{i_3j_3}, \ldots, p_{i_{k-1}j_{k-1}}, p_{i_{k-1}j_k}$ (na podstawie definicji cyklu prostego, na każdej prostej przechodzącej przez węzły cyklu leżą dwa i tylko dwa węzły).

Z definicji macierzy równoważnych i z warunku, że z wyjątkiem punktu $p_{i_1j_k}$ wszystkie inne punkty cyklu są węzłami bazy B, oraz z warunku, że cykl ma parzystą ilość węzłów, otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
c_{i_1j_k}+u_{i_1}+v_{j_k} &= d_{i_1j_k},\\
-c_{i_1j_2}-u_{i_1}-v_{j_2} &= 0,\\
c_{i_2j_2}+u_{i_2}+v_{j_2} &= 0,\\
-c_{i_2j_3}-u_{i_2}-v_{j_3} &= 0,\\
c_{i_3j_3}+u_{i_3}+v_{j_3} &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\\
+c_{i_{k-1}j_{k-1}}+u_{i_{k-1}}+v_{j_{k-1}} &= 0,\\
-c_{i_{k-1}j_k}-u_{i_{k-1}}-v_{j_k} &= 0.
\end{aligned}$$

Dodając je stronami otrzymujemy

$$d_{i_1j_k} = c_{i_1j_k}-c_{i_1j_2}+c_{i_2j_2}-c_{i_2j_3}-\ldots+c_{i_{k-1}j_{k-1}}-c_{i_{k-1}j_k}.$$

Z jednoznaczności rozwiązania wynika teza.

Ostatni wzór pozwala sformułować następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 8. *Jeżeli punkt $p_{i_1j_1}$ nie należy do bazy B_1, to wagę punktu $p_{i_1j_1}$ w macierzy zerowej dla bazy B_1 można obliczyć w następujący sposób: Punktowi $p_{i_1j_1}$ jest przyporządkowany w bazie B_1 cykl Γ. Do wagi punktu $p_{i_1j_1}$ dodajemy wagi tych węzłów cyklu Γ, które są połączone z punktem $p_{i_1j_1}$ łamaną należącą do cyklu i składającą się z parzystej ilości odcin-*

ków. Od otrzymanej sumy odejmujemy sumę wag tych węzłów cyklu Γ, które są połączone z punktem $p_{i_1 j_1}$ łamaną należącą do cyklu i składającą się z nieparzystej ilości odcinków.

Z powyższego wynika, że wagi punktów w macierzy zerowej dla bazy B_1 mogą być liczbami ujemnymi.

Wprowadzimy pojęcie baz sąsiednich.

DEFINICJA 15. Dwie bazy B_1, B_2 nazywamy *sąsiednimi*, gdy różnią się jednym punktem.

TWIERDZENIE 9. *Jeżeli są spełnione następujące warunki:*

1) *bazy B_1, B_2 są bazami sąsiednimi,*

2) *macierze $[c_{ij}]$, $[d_{ij}]$ są macierzami równoważnymi i odpowiednio macierzami zerowymi dla baz B_1, B_2,*

3) *punkt $p_{i_1 j_1}$ należy do bazy B_1 i nie należy do bazy B_2,*

4) *punkt $p_{i_2 j_2}$ należy do bazy B_2 i nie należy do bazy B_1,*

to jest spełniony także warunek:

punkt $p_{i_2 j_2}$ jest węzłem cyklu Γ przyporządkowanego punktowi $p_{i_1 j_1}$ w bazie B_2, oraz

1) *jeżeli punkt $p_{i_1 j_1}$ jest połączony z punktem $p_{i_2 j_2}$ łamaną należącą do cyklu Γ i składającą się z parzystej ilości odcinków, to $d_{i_1 j_1} = c_{i_2 j_2}$,*

2) *jeżeli punkt $p_{i_2 j_2}$ jest połączony z punktem $p_{i_1 j_1}$ łamaną należącą do cyklu Γ i składającą się z nieparzystej ilości odcinków, to $d_{i_1 j_1} = -c_{i_2 j_2}$.*

Dowód. Gdyby $p_{i_2 j_2}$ nie należał do cyklu Γ przyporządkowanego punktowi $p_{i_1 j_1}$ w bazie B_2, to do bazy B_1 należałby cykl Γ, co wobec definicji bazy jest niemożliwe. Wynika stąd, że jeden węzeł cyklu Γ, a mianowicie punkt $p_{i_1 j_1}$, należy wyłącznie do bazy B_1 i jeden węzeł cyklu Γ, a mianowicie punkt $p_{i_2 j_2}$, należy wyłącznie do bazy B_2. Pozostałe węzły cyklu Γ należą jednocześnie do obu baz. Punkty należące do obu baz mają w obu bazach wagi zerowe. Jeżeli punkty $p_{i_1 j_1}$, $p_{i_2 j_2}$ łączy łamana należąca do cyklu Γ składająca się z parzystej ilości odcinków, to na podstawie twierdzenia poprzedniego $d_{i_1 j_1} = c_{i_2 j_2}$; jeżeli punkty $p_{i_1 j_1}$, $p_{i_2 j_2}$ łączy łamana należąca do cyklu składająca się z nieparzystej ilości odcinków, to $d_{i_1 j_1} = -c_{i_2 j_2}$.

Bazy optymalne.

DEFINICJA 16. Bazę B nazywamy *optymalną* dla macierzy $[c_{ij}]$, jeżeli istnieje taka macierz $[d_{ij}]$ równoważna macierzy $[c_{ij}]$, która przyporządkowuje punktom należącym do bazy B wagi zerowe, a punktom nie należącym do bazy B wagi nieujemne. Macierz $[d_{ij}]$ będziemy także nazywali *macierzą optymalną*.

TWIERDZENIE 10. *Jeżeli:*

1) *baza B_1 jest bazą optymalną,*

2) *macierz* $[c_{ij}]$ *jest macierzą zerową dla bazy* B_1 *i jest macierzą optymalną,*

3) *graf* G *jest grafem wyznaczonym przez punkty bazy* B_1,

4) $w_{i_1j_1}$ *jest węzłem grafu* G *należącym do dwóch odcinków leżących na dwóch różnych liniach,*

to istnieje baza optymalna B_2, *taka że* B_1 *i* B_2 *są sąsiednie i* B_2 *nie zawierają punktu* $p_{i_1j_1} = w_{i_1j_1}$.

Dowód. Usuńmy z grafu G węzeł w_{ij}. Graf G został podzielony na dwa spójne, rozłączne podgrafy G_1, G_2. Linie przechodzące przez punkty przestrzeni P dzielimy na dwa podzbiory Z_1, Z_2. Do Z_1 zaliczamy linie przestrzeni P przechodzące przez węzły podgrafu G_1, a do Z_2 zaliczamy linie przestrzeni P przechodzące przez węzły podgrafu G_2. Na podstawie założenia dotyczącego węzła w_{ij} i twierdzenia 6 każda linia przestrzeni P została zaliczona do jednego ze zbiorów Z_1, Z_2. Ponieważ podgrafy są rozłączne, więc i zbiory Z_1, Z_2 są rozłączne. Zajmiemy się tylko przypadkiem, gdy istnieje w Z_1 linia pozioma przechodząca przez węzeł $w_{i_1j_1}$, bo w przypadku istnienia w Z_1 linii pionowej przechodzącej przez węzeł $w_{i_1j_1}$ dowód jest analogiczny.

Oznaczmy przez A zbiór punktów przecięcia linii pionowych należących do zbioru Z_1 z liniami poziomymi należącymi do zbioru Z_2. Wobec rozłączności zbiorów Z_1, Z_2 żaden punkt zbioru A nie pokrywa się z węzłami podgrafów G_1, G_2.

Niech d będzie najmniejszą wagą w macierzy $[c_{ij}]$ punktów należących do zbioru A. Przypuśćmy, że punkt $p_{i_2j_2}$ należący do zbioru A ma wagę d. Do wag punktów leżących na liniach poziomych zbioru Z_1 dodajemy d, a od wag punktów leżących na liniach pionowych zbioru Z_1 odejmujemy d. Wagi punktów, w których przecinają się linie poziome zbioru Z_1 z liniami pionowymi zbioru Z_1, nie uległy zmianie, zatem wobec założenia 2) węzły podgrafu G_1 mają wagi równe zeru. Wagi punktów leżących na przecięciu linii poziomych zbioru Z_2 z liniami pionowymi zbioru Z_2 również nie uległy zmianie. Zatem na podstawie założenia 2) wagi węzłów podgrafu G_2 są również równe zeru. Wagi punktów, w których przecinają się linie poziome zbioru Z_1 z liniami pionowymi zbioru Z_2, wzrosły o d. Takim punktem jest punkt $p_{i_1j_1} = w_{i_1j_1}$, a więc otrzymał on wagę d. Wagi punktów, w których przecinają się linie pionowe zbioru Z_1 z liniami poziomymi zbioru Z_2, zmalały o d. Ponieważ takim punktem jest punkt $p_{i_2j_2}$ i punkt ten miał wagę równą d, to otrzymał on wagę równą 0. Żaden punkt nie otrzymał wagi ujemnej, gdyż zmniejszyła się o d waga punktów należących do zbioru A, a d jest najmniejszą wagą punktów należących do tego zbioru.

Punkt $p_{i_2j_2}$ leży na przecięciu linii zbioru Z_1 i linii zbioru Z_2, więc graf $G_1+p_{i_2j_2}+G_2$ jest grafem spójnym. Ponieważ graf G nie zawierał cykli, więc i graf $G_1+p_{i_2j_2}+G_2$ nie zawiera cykli. Zatem zbiór $B-p_{i_1j_1}+$ $+p_{i_2j_2}$ jest bazą optymalną.

Algorytm. Następujące postępowanie prowadzi do otrzymania bazy optymalnej:

1) Zaliczamy do bazy B ten punkt z każdej kolumny, który w danej kolumnie posiada najmniejszą wagę. Znajdujemy macierz zerową dla punktów zaliczonych do bazy, odejmując od odpowiednich kolumn wagi tych punktów znajdujących się w kolumnach, które do bazy zostały włączone. Z określenia punktów włączonych do bazy wynika, że otrzymana macierz nie ma wag ujemnych.

2) Jeżeli istnieją wiersze, z których żaden punkt nie został zaliczony do bazy, to z wierszy tych zaliczamy do bazy te punkty, które w macierzy zerowej, otrzymanej w wyniku poprzedniego postępowania, mają w tych wierszach najmniejsze wagi.

3) Wyznaczamy macierz zerową dla punktów zaliczonych do bazy sposobem 1) i 2). W tym celu bierzemy pod uwagę macierz zerową dla punktów zaliczonych do bazy sposobem 1). Od wierszy tej macierzy, w których znajdują się punkty zaliczone do bazy sposobem 2), odejmujemy najmniejszą wagę występującą w danym wierszu. Z określenia punktów włączonych do bazy sposobem 2) wynika, że otrzymana macierz nie będzie zawierała wag ujemnych, oraz że będzie macierzą zerową dla punktów włączonych do bazy sposobem 1) i 2).

4) Jeśli czynności 1) i 2) nie wyznaczyły bazy i punkty zaliczone już do bazy utworzyły podgrafy rozłączne, to wybieramy jeden z podgrafów i linie przechodzące przez jego węzły zaliczamy do zbioru Z_1. Do zbioru Z_2 zaliczamy linie przechodzące przez wszystkie pozostałe punkty zaliczone już do bazy. Wobec 1) i 2) każda linia przestrzeni P została zaliczona do jednego ze zbiorów Z_1, Z_2. Weźmy pod uwagę macierz zerową dla punktów zaliczonych do bazy sposobem 1) i 2). Na przecięciu linii zaliczonych do zbioru Z_1 i linii zaliczonych do zbioru Z_2 znajdujemy punkt $p_{i_1j_1}$ o najmniejszej wadze. Punkt $p_{i_1j_1}$ zaliczamy do bazy. Przypuśćmy, że punkt $p_{i_1j_1}$ znajduje się na linii poziomej należącej do zbioru Z_1. Od wag punktów znajdujących się na liniach poziomych należących do zbioru Z_1 odejmujemy wagę punktu $p_{i_1j_1}$, a do wag punktów znajdujących się na liniach pionowych należących do zbioru Z_1 dodajemy wagę punktu $p_{i_1j_1}$. W ten sposób otrzymamy macierz zerową dla punktów zaliczonych do bazy, nie zawierającą wag ujemnych.

5) Jeżeli jeszcze nie otrzymaliśmy bazy, zbiór punktów zaliczonych do bazy tworzy podgrafy rozłączne. W tym przypadku powtarzamy postępowanie opisane w punkcie 4).

Opisane postępowanie nie może powtórzyć się wtedy, gdy otrzymamy graf spójny. Ponieważ graf spójny, bez cykli, mający węzły na każdej linii przestrzeni jest bazą, postępowanie nasze kończy się wyznaczeniem bazy i macierzy optymalnej.

PRZYKŁAD 1. Przypuśćmy, że funkcje podaży są następującymi funkcjami czasu:

$$a_1 = 300+4t, \quad a_2 = 400+t, \quad a_3 = 200+2t, \quad a_4 = 100+3t,$$

oraz że funkcje popytu są funkcjami czasu:

$$b_1 = 100+t, \quad b_2 = 50+t, \quad b_3 = 150+t, \quad b_4 = 400+2t, \quad b_5 = 300+2t.$$

Macierz kosztów jest następująca:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 6 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Stosując opisany algorytm, znajdujemy optymalną bazę i macierz kosztów. Zaliczamy do bazy punkty, które mają w kolejnych kolumnach następujące wagi: 2, 1, 2, 2, 3. Odejmując od pierwszej, trzeciej i czwartej kolumny 2, od drugiej kolumny 1, a od piątej kolumny 3 otrzymujemy zerową macierz kosztów dla punktów zaliczonych do bazy. Jest nią macierz następująca:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Punkty zaliczone do bazy tworzą cztery rozłączne podgrafy. Do zbioru Z_1 zaliczymy linie wyznaczone przez pierwszy podgraf, a więc pierwszy wiersz i dwie pierwsze kolumny macierzy. Do zbioru Z_2 zaliczymy pozostałe linie macierzy.

Najmniejszą wagę w ostatniej macierzy ma punkt znajdujący się w trzecim wierszu i drugiej kolumnie.

Do pierwszego wiersza dodajemy 1, a od dwóch pierwszych kolumn odejmujemy 1. Otrzymujemy nową macierz kosztów:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zera macierzy tworzą trzy podgrafy. Do zbioru Z_1 zaliczymy drugi wiersz i trzecią kolumnę macierzy, a do zbioru Z_2 pozostałe linie macierzy. Najmniejszym elementem leżącym w przecięciu się linii zbioru Z_1 z liniami zbioru Z_2 jest jedynka znajdująca się w drugim wierszu i w drugiej kolumnie. Od drugiego wiersza odejmujemy 1 i do trzeciej kolumny dodajemy 1. Otrzymujemy macierz zerową dla punktów zaliczonych już do bazy.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zera macierzy tworzą dwa podgrafy. Do zbioru Z_1 zaliczymy czwarty wiersz i piątą kolumnę, a do zbioru Z_2 wszystkie pozostałe linie macierzy. Najmniejszym elementem leżącym w przecięciu się linii należących do zbioru Z_1 z liniami należącymi do zbioru Z_2 jest jedynka znajdująca się w czwartym wierszu i czwartej kolumnie macierzy. Od ostatniego wiersza odejmujemy 1 i do ostatniej kolumny dodajemy 1. Znajdujemy nową, już optymalną macierz kosztów

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dla powyższej macierzy wyznaczamy optymalną macierz przepływów. Wyznaczamy przede wszystkim funkcje transportu przyporządkowane tym punktom bazy, które są jedyne w wierszach lub kolumnach.

Dwa zera w powyższej macierzy kosztów nie wyznaczają punktów należących do bazy. Są nimi: zero znajdujące się w drugim wierszu i pierwszej kolumnie, oraz zero znajdujące się w czwartym wierszu i drugiej kolumnie.

Szukaną macierzą przepływu jest macierz:

$$\begin{bmatrix} 100+t & 200+3t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 250 & 150+t & 0 & 0 \\ 0 & t-400 & 0 & 600+t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-200 & 300+2t \end{bmatrix}.$$

Funkcje wypisane w macierzy są dodatnie dla t spełniającego nierówność $t \geqslant 400$.

Aby wyznaczyć optymalną macierz przepływów dla innego przedziału czasowego, należy wyznaczyć bazę optymalną, sąsiednią bazie określającej w powyższej macierzy funkcje przepływu, nie zawierającą punktu znajdującego się w trzecim wierszu i drugiej kolumnie. Usunięcie tego punktu dzieli graf na dwa podgrafy. Węzły pierwszego podgrafu leżą w dwóch pierwszych wierszach i trzech pierwszych kolumnach. Węzły drugiego podgrafu leżą w dwóch ostatnich wierszach i dwóch ostatnich kolumnach. Ponieważ usunięty węzeł leży w wierszu drugiego podgrafu, więc przez A oznaczymy zbiór punktów przecięcia się wierszy należących do pierwszego podgrafu i kolumn należących do drugiego podgrafu. Z punktów należących do zbioru A najmniejszą wagę ma punkt znajdujący się w drugim wierszu i czwartej kolumnie. Waga tego punktu wynosi 1, odejmujemy więc 1 od dwóch ostatnich kolumn i dodajemy 1 do dwóch ostatnich wierszy. Otrzymujemy nową optymalną macierz kosztów:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczamy macierz przepływu odpowiadającą nowej bazie:

$$\begin{bmatrix} 100+t & 200+3t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t-150 & 150+t & 400-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200+2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-200 & 300+2t \end{bmatrix}.$$

Funkcje wypisane w macierzy są dodatnie dla t spełniających nierówność $200 < t < 400$.

W celu wyznaczenia optymalnego planu dla $t \leqslant 200$, powtarzamy poprzednie postępowanie. Usuwamy z bazy punkt, któremu jest przyporządkowana funkcja $t-200$. Graf wyznaczony przez ostatnią bazę rozpadnie się na dwa podgrafy. Jednym z podgrafów jest element znajdujący się w ostatnim wierszu i ostatniej kolumnie. Usunięty punkt znajduje się w wierszu tego podgrafu. Przez A należy więc oznaczyć punkty, w których kolumna przechodząca przez graf jednowęzłowy przecina wiersze przechodzące przez węzły drugiego podgrafu. Najmniejszą wagę ma punkt o wadze 1 znajdujący się w drugim wierszu i ostatniej kolumnie. Odejmujemy 1 od ostatniej kolumny i dodajemy 1 do ostatniego wiersza. Otrzymujemy trzecią z kolei optymalną macierz kosztów

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odpowiada jej następująca macierz przepływów:

$$\begin{bmatrix} 100+t & 200+3t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t-150 & 150+t & 200 & 200-t \\ 0 & 0 & 0 & 200+2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100+3t \end{bmatrix}.$$

Funkcje występujące w macierzy są nieujemne dla t: $150 \leqslant t \leqslant 200$. Dla t mniejszych od 150 należy wyznaczyć bazę optymalną nie zawierającą węzła znajdującego się w drugim wierszu i drugiej kolumnie. Powtarzając poprzednie rozumowanie dostrzegamy, że węzeł ten należy zastąpić punktem znajdującym się w pierwszym wierszu i czwartej kolumnie. Po wykonaniu odpowiednich działań otrzymujemy czwartą optymalną macierz kosztów

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odpowiada jej następująca macierz przepływów:

$$\begin{bmatrix} 100+t & 50+4t & 0 & 150-t & 0 \\ 0 & 0 & 150+t & 50+t & 200-t \\ 0 & 0 & 0 & 200+2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100+3t \end{bmatrix}.$$

Funkcje występujące w macierzy są dodatnie dla t nieujemnych i spełniających nierówność $t \leqslant 150$.

Wyznaczyliśmy optymalne macierze przepływów dla wszystkich przedziałów czasowych.

Przykład 2. Dwa zakłady produkcyjne produkują w ustalonej jednostce czasu odpowiednio 1000 i 500 jednostek pewnego towaru. Towar odbierają cztery centrale w ilościach 200, 400, 700, 200 jednostek.

Przewidziana jest modernizacja zakładu II. Załóżmy, że jest ustalona jednostka inwestycyjna. Może nią być 100000 zł lub 1000000 zł. Przypuśćmy, że każda jednostka inwestycyjna włożona w zakład II powiększy produkcję zakładu o 50 jednostek towarowych w przyjętej jednostce czasu.

Przewidziana jest także budowa nowego zakładu produkcyjnego. Przypuśćmy, że jednostka inwestycyjna włożona w nowy zakład da 40 jednostek towarowych w przyjętej jednostce czasu.

Macierz kosztów transportu jest następująca:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Należy ustalić optymalną macierz przepływów w zależności od liczby x jednostek zainwestowanych w zakład II i liczby y jednostek zainwestowanych w nowy zakład III, jeżeli wiadomo, że:

1) dodatkowa produkcja ma być rozdzielona między centrale w stosunku 3:1:2:2;

2) liczba jednostek inwestycyjnych jest nie większa od 100.

Pytamy również, jaki maksymalnie fundusz można włożyć w modernizację zakładu II ze względu na optymalność macierzy kosztów.

Optymalną macierzą kosztów jest macierz

$$[c_{ij}]_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Odpowiada jej następująca macierz przepływów

$$[x_{ij}]_1 = \begin{bmatrix} 0 & 400+10x & 600-10x & 0 \\ 200+30x & 0 & 100-10x & 200+30x \\ 0 & 0 & 40y & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ na podstawie założenia argumenty x i y są dodatnie, funkcje wypisane w macierzy są dodatnie dla $x < 10$. Dla $x > 10$ funkcja znajdująca się w drugim wierszu i trzeciej kolumnie jest ujemna. Usunięcie z bazy B_1 punktu p_{23} dzieli graf wyznaczony przez punkty bazy B_1 na dwa podgrafy. Węzły jednego podgrafu leżą w pierwszym i trzecim wierszu, a drugiego w drugim wierszu. Należy szukać punktu o najmniejszej wadze w zbiorze wyznaczonym przez przecięcie się wierszy przechodzących przez węzły pierwszego podgrafu i kolumn przechodzących przez węzły drugiego podgrafu. Najmniejszą wagę, równą 3 ma punkt p_{34}. Od pierwszej i ostatniej kolumny macierzy $[c_{ij}]_1$ odejmujemy 3, a do drugiego wiersza dodajemy 3. Otrzymujemy optymalną macierz kosztów

$$[c_{ij}]_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odpowiada jej następująca macierz przepływów:

$$[x_{ij}]_2 = \begin{bmatrix} 0 & 400+10x & 600-10x & 0 \\ 200+30x & 0 & 0 & 300+20x \\ 0 & 0 & 100-10x+40y & 10x-100 \end{bmatrix}.$$

Macierz $[x_{ij}]_2$ jest optymalna dla x i y spełniających nierówności $10 \leqslant x \leqslant 60$, $4y-x+10 \geqslant 0$.

Jeżeli $4y-x+10 < 0$, to w punkcie p_{33} pojawi się funkcja ujemna. Usuwając z ostatniej bazy B_2 punkt p_{33} znajdziemy, powtarzając poprzednie rozumowanie, nową bazę optymalną $B_3 = B_2-p_{33}+p_{14}$. Optymalną macierzą kosztów dla bazy B_3 jest macierz $[c_{ij}]_3$:

$$[c_{ij}]_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odpowiada jej macierz przepływów

$$[x_{ij}]_3 = \begin{bmatrix} 0 & 400+10x & 700-20x+40y & 10x-40y-100 \\ 200+30x & 0 & 0 & 300+20x \\ 0 & 0 & 0 & 40y \end{bmatrix}.$$

Macierz $[x_{ij}]_3$ jest optymalna, gdy są spełnione nierówności: $70-2x+4y \geqslant 0$, $x-4y-10 \geqslant 0$.

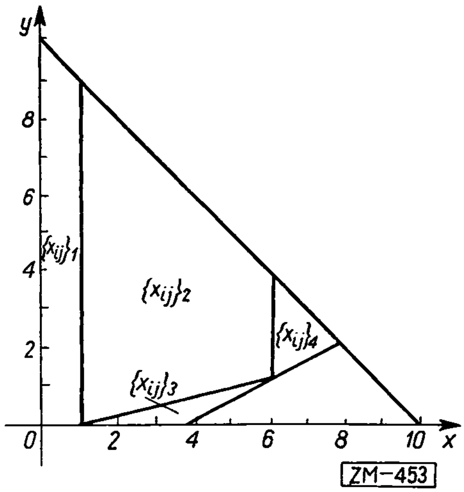
Jeżeli $x > 60$, to w macierzy $[x_{ij}]_2$ w punkcie p_{13} pojawi się funkcja ujemna. W tym przypadku należy zastąpić bazę B_2 przez bazę $B_4 = B_2-p_{13}+p_{22}$.

Optymalną macierzą kosztów dla bazy B_4 jest macierz

$$[c_{ij}]_4 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odpowiada jej macierz przepływów

$$[x_{ij}]_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 200+30x & 10x-100 & 0 & 900+10x \\ 0 & 0 & 700-20x+40y & 20x-700 \end{bmatrix}.$$



Rys. 1

Ostatnia macierz jest optymalna dla x i y spełniających nierówności $x \geqslant 60$, $70-2x+4y \geqslant 0$. Baz B_3, B_4 nie można zastąpić sąsiednimi bazami optymalnymi takimi, by nie należał do nich odpowiednio punkt p_{13} i punkt p_{33}. Wymienione punkty nie są węzłami narożnymi w grafach zbudowanych dla odpowiednich baz. Uwzględniając warunek $x < 100$, $y < 100$ można przedstawić uzyskane wyniki na rysunku 1. W polach są wpisane macierze przepływów dające rozwiązania. Z rysunku można m. in. odczytać maksymalną wartość współrzędnej x, a więc wysokość kapitału, który można włożyć w modernizację zakładu II.

Prace cytowane

[1] W. Szwarc, *Zagadnienie transportowe*, Zastosow. Mat. 6 (1962), str. 149-182.

[2] S. I. Gass and T. L. Saaty, *Parametric objective function, II, Generalization*, Jour. Operat. Res. Soc. of America 3 (1955), str. 395-401.

[3] — *Linear programming: methods and applications*, New York 1958 (tłum. polskie: *Programowanie liniowe*, Warszawa 1963).

Praca wpłynęła 4. 12. 1962

А. СНЯТЫЦКИ (Сопот)

ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЙ СПРОСА И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

РЕЗЮМЕ

Вообще, транспортная задача решается в случае, когда спрос и предложение являются постоянными величинами. В настоящей работе приводится решение транспортной задачи в случае зависимости спроса и предложения от таких параметров как, например, время, при условии, что сумма спроса равна сумме предложений. Одна матрица поставок не даёт решений для всех значений параметров. В настоящей работе доказано утверждение 10, позволяющее перейти от матрицы поставок к другой матрице поставок, которая даёт решение для следующего предела параметров. Приведён также простой метод определения оптимальной матрицы поставок.

A. ŚNIATYCKI (Sopot)

TRANSPORT PROBLEMS FOR VARIABLE FUNCTIONS OF DEMAND AND SUPPLY

SUMMARY

Transport problems are usually solved for the case where the demand and the supply are constant quantities. The paper contains a solution of the transport problem when the supply and the demand are dependent on parameters, e.g. on time, under the assumption that the sum of the demand is equal to the sum of the supply. Generally, one matrix of flow does not give a solution for all values of the parameters. The author proves theorem 10, enabling him to pass from a flow matrix giving the solution for one range of parameters to another flow matrix giving the solution for the next range. The paper contains also a simple method of determining the optimal flow matrix.
