ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
VII (1963)

S. ZUBRZYCKI (Wrocław)

O MINIMAKSOWYM SZACOWANIU LICZNOŚCI POPULACJI

1. Wynik Czen Pina. Z populacji o nieznanej liczności N zawierającej znaną liczbę t elementów znaczonych losujemy ze zwracaniem po jednym elemencie; gdy po raz s-ty pojawi się znaczony element, kończymy badanie. Niech m będzie potrzebną do tego liczbą losowań. Znając t, s i m, chcemy oszacować N.

Czen Pin [1] rozważał niezrandomizowaną grę statystyczną, związaną z tym zadaniem. W grze tej za strategie natury przyjmuje się możliwe wartości parametru N. Niech Ω oznacza zbiór tych możliwych wartości. Rolę strategii statystyka grają estymatory, czyli funkcje $\hat{N} = \hat{N}(k)$, $k = s, s+1, \ldots$; za stratę wynikającą z orzeczenia, że liczność populacji jest N', gdy naprawdę jest ona N, przyjmuje się $(N-N')^2/N^2$ i zgodnie z tym ryzyko określa się wzorem

$$r(N, \hat{N}) = \frac{1}{N^2} E_N(N-\hat{N})^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=s}^{\infty} \big(\hat{N}(k)-N\big)^2 f(k|N), \tag{1.1}$$

gdzie

$$f(k|N) = \Pr\{m = k|N\} = \binom{k-1}{s-1}\left(\frac{t}{N}\right)^s\left(1-\frac{t}{N}\right)^{k-s} \tag{1.2}$$

Wynik Czen Pina można sformułować tak:

TWIERDZENIE 1 (Czen Pin). *Niezrandomizowana gra statystyczna, w której zbiór Ω strategii natury, czyli możliwych wartości parametru N, jest nieskończony i N_0 jest jego najmniejszym elementem, zbiór estymatorów składa się z funkcji liniowych $\hat{N}(k) = ak+b$, a ryzyko określone jest przez* (1.1), *ma całą klasę estymatorów minimaksowych równoważnych pod względem minimaksowego ryzyka, które są określone przez*

$$\hat{N}(k) = \frac{t}{s+1} m + b, \tag{1.3}$$

gdzie

$$\frac{N_0}{s+1}\left(1-\sqrt{1+\frac{st}{N_0}}\right) \leqslant b \leqslant \frac{N_0}{s+1}\left(1+\sqrt{1+\frac{st}{N_0}}\right), \tag{1.4}$$

zaś minimaksowe ryzyko statystyka, czyli liczba $\inf\limits_{\hat{N}} \sup\limits_{N} r(N, \hat{N})$, *jest równe* $1/(s+1)$.

Dla kompletności wykładu powtórzymy tu dowód tego twierdzenia. Wykorzystamy następujący lemat (por. [4], str. 213):

LEMAT 1. *Jeśli rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej* ξ *przyjmującej tylko wartości całkowite jest określony wzorem*

$$\Pr\{\xi = k\} = \binom{k-1}{s-1} p^s (1-p)^{k-s} \quad (p > 0,\ k = s,\ s+1, \ldots),$$

to

$$E\xi = \frac{s}{p}, \quad E\xi^2 = s\left(\frac{s+1}{p^2} - \frac{1}{p}\right).$$

Skoro estymatory ograniczamy do funkcji liniowych, ryzyko staje się następującą funkcją zmiennych a, b, N:

$$r(N, \hat{N}) = W(N; a, b) = \frac{1}{N^2} E_N (am+b-N)^2 =$$

$$= \frac{1}{N^2}\left(a^2 E_N m^2 + 2a(b-N)E_N m + (b-N)^2\right).$$

Korzystając z (1.2) i z lematu 1 dla $p = t/N$ otrzymujemy po prostych rachunkach, że

$$W(N; a, b) = a^2 \frac{s(s+1)}{t^2} - 2a\frac{s}{t} + 1 + \frac{1}{N}\left\{\frac{2abs - a^2 s}{t} - 2b\right\} + \frac{1}{N^2} b^2.$$

Wobec tego, że zbiór Ω jest nieskończony, można z niego wyjąć ciąg wartości N rosnący do nieskończoności, a że przy $N \to \infty$ wyrazy zawierające $1/N$ i $1/N^2$ dążą do 0, przeto $\sup\limits_{N} W(N; a, b)$ jest nie mniejsze niż wyraz nie zawierający N. Wyrazy zawierające N można odczytać jako trójmian kwadratowy względem $1/N$, którego jeden pierwiastek jest 0, a drugi $\left(a^2 s + 2b(t-as)\right)/tb^2$. Trójmian ten ma przy $1/N^2$ dodatni współczynnik b^2, przeto jest między pierwiastkami ujemny. Widać, że przez wybór dostatecznie małego b można zawsze uczynić drugi pierwiastek dowolnie dużym. Wówczas zaś w całym przedziale możliwych wartości N suma wyrazów zawierających N będzie ujemna, a $\sup\limits_{N} W(N; a, b)$ będzie równe wyrazowi nie zawierającemu N. Wyraz ten osiąga najmniejszą wartość $1/(s+1)$ dla $a = t/(s+1)$. Otrzymujemy wówczas

$$W\left(N; \frac{t}{s+1}, b\right) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{N}\left[\frac{2b}{s+1} + \frac{ts}{(s+1)^2}\right] + \frac{1}{N^2} b^2.$$

Gdy wartość a jest już tak wyznaczona, od b trzeba żądać tylko tyle, żeby była spełniona nierówność $\big(a^2s+2b(t-as)\big)/tb^2 \geqslant 1/N_0$, czyli nierówność $tb^2-2bN_0(t-as)-N_0a^2s \leqslant 0$. Po uwzględnieniu równości $a = t/(s+1)$ otrzymujemy jako jej rozwiązanie przedział (1.4). To kończy dowód twierdzenia 1.

Z kolei Czen Pin próbował w oparciu o nierówność Craméra-Rao (musiał w tym celu potraktować N jako parametr ciągły) udowodnić, że estymatory określone przez (1.3) i (1.4) pozostają estymatorami minimaksowymi wśród szerszej klasy estymatorów regularnych.

Moim celem jest uzupełnić wynik Czen Pina następującym twierdzeniem:

TWIERDZENIE 2. *W niezrandomizowanej grze statystycznej, w której N traktujemy jako parametr ciągły przebiegający zbiór $\Omega = \{N: N_0 \leqslant N < \infty\}$, jako estymatory dopuszczamy wszelkie funkcje $\hat{N} = \hat{N}(k)$, $k = s, s+1, \ldots$, a ryzyko definiujemy przez* (1.1), *estymatory opisane przez warunki* (1.3) *i* (1.4) *są minimaksowe.*

2. Gra zrandomizowana. Wykażemy, że estymatory określone przez (1.3) i (1.4) są minimaksowe w klasie wszystkich funkcji $\hat{N}(k)$, $k = s, s+1, \ldots$, jeśli w porównaniu z zadaniem rozpatrywanym przez Czen Pina rozszerzymy zbiór strategii natury o wszelkie rozkłady a priori parametru N w przedziale $N_0 \leqslant N < \infty$, traktując przy tym N jako parametr ciągły. Zachodzi mianowicie

TWIERDZENIE 3. *W zrandomizowanej po stronie natury grze statystycznej, w której strategiami natury są wszelkie rozkłady a priori ciągłego parametru N przebiegającego przedział $N_0 \leqslant N < \infty$, strategiami statystyka są wszelkie funkcje $\hat{N}(k)$, $k = s, s+1, \ldots$, a ryzyko jest określone przez*

$$r(H, \hat{N}) = \int_{N_0}^{\infty} E_N \frac{(N-\hat{N})^2}{N^2}\, dH(N),$$

gdzie H jest dystrybuantą apriorycznego rozkładu parametru N, estymatory określone przez (1.3) *i* (1.4) *są minimaksowe.*

Sformułowane poprzednio twierdzenie 2 wynika z twierdzenia 3 i stąd, że ryzyko statystyka, związane z jakimś estymatorem, nie zależy od tego, czy gra jest zrandomizowana po stronie natury czy też nie (porównaj niżej (2.8)).

Nim przystąpimy do dowodu twierdzenia 3, zmienimy jego sformułowanie tak, żeby w dowodzie uwypuklić podobieństwo do rozumowań używanych w pracach [2] i [3]. Przez podstawienie

$$p = t/N \tag{2.1}$$

wzór (1.2) można przekształcić na

$$\Pr\{m = k|p\} = f(k|p) = \binom{k-1}{s-1} p^s (1-p)^{k-s} \tag{2.2}$$

$$(p > 0,\ k = s,\ s+1, \ldots)$$

i można go przeczytać jako wzór na prawdopodobieństwo tego, że trzeba będzie k losowań (według schematu losowania ze zwracaniem) dla wyciągnięcia po raz s-ty elementu znaczonego, jeśli prawdopodobieństwo wylosowania znaczonego elementu w jednym losowaniu wynosi p. W ten sposób możemy zadanie Czen Pina przetłumaczyć na zadanie szacowania funkcji $N = t/p$ prawdopodobieństwa p na podstawie obserwacji zmiennej losowej m, której rozkład prawdopodobieństwa zależy od p zgodnie z wzorem (2.2). Przy użyciu prawdopodobieństwa p ryzyko (1.1) przekształca się następująco:

$$r(p, \hat{N}) = \frac{p^2}{t^2} E_p \left(\hat{N} - \frac{t}{p}\right)^2.$$

Jeśli teraz wprowadzimy estymatory $\hat{p} = \hat{p}(k)$, $k = s, s+1, \ldots$, przez związek

$$\hat{N} = \hat{p}t, \tag{2.3}$$

to otrzymamy ryzyko postaci

$$r(p, \hat{p}) = \frac{p^2}{t^2} E_p \left(\frac{t\hat{p}(m)p - t}{p}\right)^2 = E_p\big(\hat{p}(m)p - 1\big)^2 = \tag{2.4}$$

$$= \sum_{k=s}^{\infty} \big(\hat{p}(k)p - 1\big)^2 \Pr\{m = k|p\}.$$

Przy użyciu tych nowych oznaczeń możemy twierdzenie 1 wysłowić w postaci formalnie nieco słabszej tak:

TWIERDZENIE 1'. *Niezrandomizowana gra statystyczna, w której strategiami natury są prawdopodobieństwa p z przedziału $0 < p \leqslant p_0$, gdzie $p_0 \leqslant 1$ jest dane, strategiami statystyka są estymatory postaci $\hat{p}(k) = ck + d$, a ryzyko jest określone przez* (2.4), *gdzie m jest zmienną losową o rozkładzie prawdopodobieństwa danym przez* (2.2), *ma jako estymatory minimaksowe, równoważne w sensie minimaksowego ryzyka, estymatory*

$$\hat{p}(k) = \big(k/(s+1)\big) + d, \tag{2.5}$$

gdzie

$$\frac{1}{p_0(s+1)}\big(1 - \sqrt{1+sp_0}\big) \leqslant d \leqslant \frac{1}{p_0(s+1)}\big(1 + \sqrt{1+sp_0}\big), \tag{2.6}$$

zaś minimaksowe ryzyko statystyka, czyli liczba $\inf_{\hat{p}} \sup_{p} r(p, \hat{p})$, *jest równe* $1/(s+1)$.

Analogon twierdzenia 3 udowodnimy w następującym sformułowaniu:

TWIERDZENIE 3'. *Zrandomizowana po stronie natury gra statystyczna, w której strategiami natury są wszelkie rozkłady a priori prawdopodobieństwa p takie, że* $\Pr\{p=0\}=0$, $\Pr\{p\leqslant p_0\}=1$, *gdzie* $p_0\leqslant 1$ *jest dane, strategiami statystyka są wszelkie możliwe funkcje* $\hat{p}=\hat{p}(k)$, $k=s, s+1, \ldots$, *ryzyko jest określone wzorem*

$$r(G, \hat{p}) = \int_0^1 E_p(\hat{p}(m)p-1)^2 dG(p),$$

gdzie m jest zmienną losową o rozkładzie prawdopodobieństwa zależnym od p w sposób podany przez wzór (2.2), *a* $G(x)$ *jest dystrybuantą rozkładu a priori prawdopodobieńtwa p, jest zamknięta w tym sensie, że*

$$\inf_{\hat{p}}\sup_{G} r(G, \hat{p}) = \sup_{G}\inf_{\hat{p}} r(G, \hat{p}) = \frac{1}{s+1}, \tag{2.7}$$

a estymatory opisane warunkami (2.5) *i* (2.6) *są w tej grze minimaksowe.*

Dowód. Ponieważ (zobacz [5], str. 277, wzór (14)) dla dowolnego estymatora $\hat{p}$

$$\sup_{p} r(p, \hat{p}) = \sup_{G} r(G, \hat{p}), \tag{2.8}$$

więc na podstawie twierdzenia 1' możemy twierdzić, że w grze opisanej w twierdzeniu 3' mamy

$$\inf_{\hat{p}}\sup_{G} r(G, \hat{p}) = \frac{1}{s+1},$$

jeśli inf jest wzięte w stosunku do estymatorów liniowych, a

$$\inf_{\hat{p}}\sup_{G} r(G, \hat{p}) \leqslant \frac{1}{s+1}, \tag{2.9}$$

jeśli inf jest wzięte w stosunku do wszystkich estymatorów.

Zajmijmy się najpierw przypadkiem $p_0=1$. Aby zakończyć dowód twierdzenia 3', pokażemy rozkłady a priori prawdopodobieństwa p o dystrybuantach $G_a(x)$ zależne od dodatniego parametru a w taki sposób, że będzie

$$\lim_{a\to 0}\inf_{\hat{p}} r(G, \hat{p}) = \frac{1}{s+1}. \tag{2.10}$$

Wobec (2.9), (2.10), tego, że

$$\lim_{a\to 0}\inf_{\hat{p}} r(G_a, \hat{p}) \leqslant \sup_{G}\inf_{\hat{p}} r(G, \hat{p}),$$

i tego, że zawsze

$$\sup_G \inf_{\hat{p}} r(G, \hat{p}) \leqslant \inf_{\hat{p}} \sup_G r(G, \hat{p}),$$

otrzymujemy (2.7), czyli zamkniętość gry statystycznej, oraz to, że estymatory określone przez (2.5) i (2.6) są minimaksowe.

Zauważmy, że

(a) *jeżeli zmienna losowa* ξ *ma wartość oczekiwaną* $E\xi$ *i wartość oczekiwaną kwadratu* $E\xi^2$, *to* $E(t\xi-1)^2$ *przyjmuje najmniejszą wartość dla* $t = E\xi/E\xi^2$.

Istotnie, $E(t\xi-1)^2 = t^2E\xi^2-2tE\xi+1$ i $t = E\xi/E\xi^2$ jest punktem, w którym ten trójmian kwadratowy ze względu na t przyjmuje najmniejszą wartość.

Wykażmy teraz, że

(b) *jeżeli prawdopodobieństwo* p *ma a priori rozkład beta o gęstości prawdopodobieństwa*

$$g_{a,\beta}(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(a, \beta)}, \quad a > 0, \ \beta > 0, \tag{2.11}$$

to najlepszą odpowiedzią statystyka jest estymator

$$\hat{p}_{a,\beta}(k) = \frac{k+a+\beta+1}{s+a+1}.$$

Istotnie, gdy rozkład a priori prawdopodobieństwa p dany jest przez (2.11), to pod warunkiem $m = k$ prawdopodobieństwo p ma rozkład a posteriori o gęstości

$$g(x|k) = \frac{g_{a,\beta}(x)f(k|x)}{\int_0^1 g_{a,\beta}(x)f(k|x)\,dx} = \frac{x^{s+a-1}(1-x)^{k-s+\beta-1}}{B(s+a, k-s+\beta)}.$$

Wobec (a) najlepszą odpowiedzią statystyka jest

$$\hat{p}_{a,\beta}(k) = \frac{\int_0^1 x g(x|k)\,dx}{\int_0^1 x^2 g(x|k)\,dx} = \frac{\int_0^1 x^{s+a}(1-x)^{k-s+\beta-1}\,dx}{\int_0^1 x^{s+a+1}(1-x)^{k-s+\beta-1}\,dx}, \tag{2.12}$$

a to, po prostym rachunku uwzględniającym związki

$$B(a, \beta) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(\beta)}{\Gamma(a+\beta)}, \quad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a),$$

daje (b).

Wybierzmy dodatnie β_0 tak, żeby była spełniona nierówność

$$\frac{1+\beta_0}{s+1} \leqslant \frac{1}{s+1}(1+\sqrt{1+s}) \leqslant \frac{1}{p_0(s+1)}(1+\sqrt{1+sp_0}).$$

Wówczas estymator $\hat{p}_0(k) = (k+1+\beta_0)/(s+1)$ spełnia warunki (2.5) i (2.6) i mamy dla niego $\lim\limits_{p\to 0} r(p, \hat{p}_0) = 1/(s+1)$. Teraz najlepszą odpowiedzią statystyka przeciwko rozkładowi a priori prawdopodobieństwa p o gęstości

$$g_a(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{\beta_0-1}}{B(a, \beta_0)} \tag{2.13}$$

jest estymator

$$\hat{p}_a(k) = \frac{k+1+\beta_0}{s+a+1} + \frac{a}{s+a+1} = A\hat{p}_0(k)+B,$$

gdzie $A = (s+1)/(s+a+1)$, $B = a/(s+a+1)$. Porównajmy

$$r(p, \hat{p}_0) = E_p(\hat{p}_0(m)-1)^2 = p^2E_p\hat{p}_0^2-2pE_p\hat{p}_0+1$$

oraz

$$r(p, \hat{p}_a) = E_p\big((A\hat{p}_0+B)p-1\big)^2 = A^2p^2E_p\hat{p}_0^2+2Ap(Bp-1)E_p\hat{p}_0+(Bp-1)^2.$$

Wobec tego, że jednostajnie ze względu na p

$$\lim_{a\to 0} A^2 = 1, \quad \lim_{a\to 0} A(Bp-1) = -1, \quad \lim_{a\to 0} (Bp-1)^2 = 1,$$

mamy również jednostajnie ze względu na p

$$\lim_{a\to 0} r(p, \hat{p}_a) = r(p, \hat{p}_0). \tag{2.14}$$

Ryzyko $r(p, \hat{p}_0)$ jest ciągłą funkcją p i $\lim\limits_{p\to 0} r(p, \hat{p}_0) = 1/(s+1)$. Ponieważ dla każdego $\varepsilon > 0$ jest $\lim\limits_{a\to 0} \int\limits_0^{\varepsilon} g_a(x)dx = 1$, więc

$$\lim_{a\to 0} r(G_a, \hat{p}_0) = \lim_{a\to 0} \int_0^1 r(p, \hat{p}_0)g_a(p)dp = \frac{1}{s+1}.$$

Stąd i z (2.14) wynika

$$\lim_{a\to 0} r(G_a, \hat{p}_a) = \frac{1}{s+1},$$

czyli (2.10). To kończy dowód twierdzenia 3' w przypadku $p_0 = 1$.

Aby uzyskać pełny dowód, rozpatrzmy rozkłady a priori prawdopodobieństwa p o gęstości

$$g_{a,u}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{a-1}(1-x)^{\beta_0-1}}{\int_0^u x^{a-1}(1-x)^{\beta_0-1}dx} & \text{dla} \quad 0 < x < u < 1, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Wówczas gęstość prawdopodobieństwa rozkładu a posteriori prawdopodobieństwa p pod warunkiem $m = k$ wyrażona jest wzorem postaci:

$$g_{a,u}(x|k) = \frac{g_{a,u}(x)f(k|x)}{\int_0^u g_{a,u}(x)f(k|x)dx} = \frac{x^{s+a-1}(1-x)^{k-s+\beta_0-1}}{\int_0^u x^{s+1-a}(1-x)^{k-s+\beta_0-1}dx},$$

a w myśl (a) najlepszą odpowiedzią statystyka jest estymator

$$\hat{p}_{a,u}(k) = \frac{\int_0^u x^{s+a}(1-x)^{k-s+\beta_0-1}dx}{\int_0^u x^{s+a+1}(1-x)^{k-s+\beta_0-1}dx}. \tag{2.15}$$

W przedziale $0 < a > 1$ zachodzi jednostajna zbieżność ze względu na a:

$$\lim_{k\to\infty} \hat{p}_{a,u}(k)/\hat{p}_a(k) = 1. \tag{2.16}$$

To, wraz z uwagą, że dla dowolnie dużego K i dowolnego $\eta > 0$ dla dostatecznie małych p zachodzi nierówność $\Pr\{m \leqslant K|p\} < \eta$, wynikająca bezpośrednio z postaci wzoru (2.2), pozwala twierdzić, że

$$\lim_{p\to 0} r(p, \hat{p}_{a,u}) = \lim_{p\to 0} r(p, \hat{p}_a).$$

Stąd, podobnie jak poprzednio, otrzymujemy relację

$$\lim_{a\to 0} \inf_{\hat{p}} r(G_{a,u}, \hat{p}) = \frac{1}{s+1},$$

z której wynika twierdzenie 3'.

Pozostaje udowodnić (2.16). Otóż

(c) *dla dowolnych* $0 < u$ *i* $0 < w$ *mamy*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_0^u x^k(1-x)^w dx}{\int_0^1 x^k(1-x)^w dx} = 0, \tag{2.17}$$

czyli

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_u^1 x^k(1-x)^w dx}{\int_0^1 x^k(1-x)^w dx} = 1,$$

a zbieżność jest tym lepsza, im mniejsze w.

Istotnie, biorąc ustalone v z przedziału $u < v < 1$ i zastępując funkcję $(1-x)^w$ w całce licznika w (2.17) przez 1, a w całce mianownika przez $(1-v)^w$, mamy

$$\frac{\int_0^u x^k(1-x)^w dx}{\int_0^1 x^k(1-x)^w dx} < \frac{\int_0^u x^k(1-x)^w dx}{\int_0^v x^k(1-x)^w dx} < \frac{\int_0^u x^k dx}{(1-v)^w \int_0^v x^k dx} < \frac{1}{(1-v)^w}\left(\frac{u}{v}\right)^{k+1},$$

a stąd wynika (c).

Na podstawie (c), porównując licznik z licznikiem i mianownik z mianownikiem w wyrażeniach (2.15) i (2.12) i przyjmując $\beta = \beta_0$, otrzymujemy (2.16).

Udowodniliśmy twierdzenie 3′ w całej ogólności.

3. Dopuszczalność. Okazało się w naszych rozważaniach, że istnieje cała klasa estymatorów minimaksowych. Pozostaje do rozpatrzenia pytanie, czy wszystkie one są dopuszczalne. Pokażemy, że tak nie jest.

Przypomnijmy definicję dopuszczalności.

DEFINICJA. Estymator $\hat{p}_0$ nazywa się *dopuszczalny* w klasie $\mathscr{C}$ estymatorów wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje w $\mathscr{C}$ estymator $\hat{p}$ taki, dla którego przy wszystkich p z rozpatrywanego zakresu zachodziłaby nierówność $r(p, \hat{p}) \leqslant r(p, \hat{p}_0)$, a dla przynajmniej jednego takiego p nierówność ta byłaby ostra; w przeciwnym przypadku estymator jest *niedopuszczalny*.

Udowodnimy teraz

TWIERDZENIE 4′. *Przy założeniach twierdzenia* 1′ *w klasie estymatorów spełniających warunki* (2.5) *i* (2.6) *dopuszczalne są tylko te, dla których* d *zawarte jest w przedziale*

$$\frac{1}{p_0(s+1)} \leqslant d \leqslant \frac{1}{p_0(s+1)}\left(1+\sqrt{1+sp_0}\right). \tag{3.1}$$

Dowód. Obliczając ryzyko $r(p, \hat{p})$ dla estymatora postaci (2.5) i uwzględniając lemat 1 znajdujemy, że

$$r(p, \hat{p}) = d^2p^2 - \left[\frac{2d}{s+1} + \frac{s}{(s+1)^2}\right]p + \frac{1}{s+1}.$$

Niech $\hat{p}_1(k) = k/(s+1)+d_1$ i $\hat{p}_2(k) = k/(s+1)+d_2$ będą dwoma estymatorami. Wówczas mamy

$$r(p,\hat{p}_1)-r(p,\hat{p}_2) = (d_1^2-d_2^2)p^2-\frac{2(d_1-d_2)}{s+1}p. \tag{3.2}$$

Jeżeli $d_1^2 = d_2^2$ i $d_1 \neq d_2$, to różnica ta okazuje się liniowa względem p. Jeżeli ponadto $d_1 = -d_2 > 0$, to jest ona ujemna w całym przedziale $0 < p \leqslant p_0$, a zatem estymator $\hat{p}_2$ jest niedopuszczalny. To dowodzi, że estymatory postaci (2.5), dla których $d < 0$, są niedopuszczalne.

Przypuśćmy teraz, że $0 < d_1 < d_2$. Różnica (3.2) okazuje się wtedy trójmianem kwadratowym względem p, którego jednym pierwiastkiem jest 0, a drugim liczba

$$2(d_1-d_2)/(s+1)(d_1^2-d_2^2) = 2/(s+1)(d_1+d_2). \tag{3.3}$$

Gdyby się teraz okazało, że $p_0 \leqslant 2/(s+1)(d_1+d_2)$, to w całym przedziale $0 < p \leqslant p_0$ różnica (3.2) byłaby dodatnia, a zatem estymator $\hat{p}_1$ byłby niedopuszczalny. Wynika stąd, że estymatory postaci (2.5), dla których $0 \leqslant d < 1/p_0(s+1)$, są niedopuszczalne.

Niech w końcu $d_1 < d_2$ będą dwiema liczbami z przedziału (3.1). Wówczas pierwiastek (3.3) leży wewnątrz przedziału $0 < p \leqslant p_0$, a więc różnica (3.2) zmienia znak wewnątrz tego przedziału i estymatory $\hat{p}_1$ i $\hat{p}_2$ okazują się nieporównywalne.

To kończy dowód twierdzenia 4'.

Warto na tle tego twierdzenia przyjrzeć się jeszcze raz propozycji Czen Pina z [1], aby przez wybór d zminimizować $r(p,\hat{p})$ dla $p = p_0$. Prowadzi to do wyboru $d = 1/p_0(s+1)$ i do estymatora

$$\hat{p}(k) = \frac{k+(1/p_0)}{s+1},$$

który dla $p = p_0$ daje ryzyko

$$\frac{1}{s+1}-\frac{1+sp_0}{(s+1)^2}.$$

Tłumacząc to poprzez (2.1) i (2.3) na oznaczenia pierwotnego zadania otrzymujemy następujące sformułowania:

TWIERDZENIE 4. *Przy założeniach twierdzenia* 1 *w klasie estymatorów* $\hat{N}(k)$ *spełniających warunki* (1.3) *i* (1.4) *dopuszczalne są tylko te, dla których* b *zawarte jest w przedziale*

$$\frac{N_0}{s+1} \leqslant b \leqslant \frac{N_0}{s+1}\left(1+\sqrt{1+\frac{st}{N_0}}\right).$$

Czen Pin proponuje wybrać $b = N_0/(s+1)$, przez co otrzymujemy estymator $(tm+N_0)/(s+1)$, który minimizuje ryzyko dla $N = N_0$ i czyni je wówczas równym

$$\frac{1}{s+1} - \frac{1+(st/N_0)}{(s+1)^2}.$$

Prace cytowane

[1] Czen Pin, *O minimaksowym estymatorze liczności populacji*, Zastosow. Mat. 6 (1962), str. 137-148.

[2] S. Trybuła, *On some loss functions*, Colloq. Math. 7 (1960), str. 297-305.

[3] H. Steinhaus i S. Zubrzycki, *O porównywaniu dwu procesów produkcyjnych i zasadzie dualizmu*, Zastosow. Mat. 3 (1958), str. 229-257.

[4] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa i jego zastosowań*, przekład z angielskiego, Warszawa 1960.

[5] A. Špaček, *Note on minimax solutions of statistical decision problems*, Colloq. Math. 2 (1951), str. 275-281.

Praca wpłynęła 12. 11. 1962

С. ЗУБЖИЦКИ (Вроцлав)

О МИНИМАКСНОМ ОЦЕНИВАНИИ ЧИСЛЕННОСТИ СОВОКУПНОСТИ

РЕЗЮМЕ

Пусть в совокупности о неизвестной численности N есть t назначённых элементов. Мы выбираем из этой совокупности случайную выборку штука по штуке, с возвращением, пока не получим в s-тый раз назначенную штуку. Пусть m есть объём выборки полученной этим образом. Зная t, s и m мы желаем оценить N.

Рассмотрим нерандомизированную статистическую игру связанную с этой задачей. В этой игре множество Ω возможных значений численности N есть множеством стратегии природы. Оценки $\hat{N}(k)$, $k = s, s+1, \ldots$, являются стратегиями статистика. Если предположим, кроме того, что $(N-N')^2/N^2$ — потеря вызванная решением, что численность совокупности N', когда она в дейсвительности N и определим риск формулой:

$$r(N, \hat{N}) = E_N(\hat{N}-N)^2/N^2,$$

статистическая игра будет определенной.

Чен Пин [1] доказал для этой игры, что если ограничиться линейными оценками и если множество Ω бесконечное, тогда оценки, определенные условиями (1.3) и (1.4), где N_0 есть наименьшее число в Ω, являются минимаксными.

Цель настоящей работы двойная.

Во-первых, в отличие от попыток Чен Пина в [1], здесь доказано посредственно, рассматривая игру рандомизированную со строны природы, что если N считать непрерывным параметром пробегающим полупрямую $N_0 < N < \infty$, тогда оценки описанные через (1.3) и (1.4) будут минимаксные в классе всех функции $\hat{N}(k)$. Во-вторых, оценки описанные формулами (1.3) и (1.4) рассмотрены с точки зрения допустимости (*admissibility*) и обнаружено, что оценки с $b < N_0/s+1$ — недопустимы.

S. ZUBRZYCKI (Wrocław)

ON MINIMAX ESTIMATION OF POPULATION SIZE

SUMMARY

Let there be t marked elements in a population of unknown size N. We choose a sample from that population item by item with replacement until we get for the s-th time a marked item. Let m be the resulting number of drawings. We know t, s and m, and we want to estimate N on the basis of this knowledge.

Consider a non-randomized statistical game connected with this problem. In this game the set Ω of possible values of N plays the rôle of the set of nature's strategies. Estimators $\hat{N}(k)$, $k = s, s+1, \ldots$ are statisticians' strategies. Moreover, if we admit $(N-N')^2/N^2$ to be the loss resulting from a decision that the population size is N' when it is N and define risk by

$$r(N, \hat{N}) = \frac{1}{N^2} E_N(\hat{N}-N)^2,$$

we have a completely defined statistical game.

Czen Pin [1] has proved for this game that, if we restrict ourselves to estimators linear in m and if Ω contains infinitely many values, then minimax estimators are described by relations (1.3) and (1.4), where N_0 is the smallest value in Ω.

The aim of this paper is twofold.

First, in contradistinction to Czen Pin's attempts in [1], it is proved indirectly, by considering a statistical game randomized on nature's part, that if N is regarded as a continuous parameter, ranging in the interval $N_0 < N < \infty$, then the estimators described by (1.3) and (1.4) are minimax in the class of all functions $\hat{N}(k)$.

Second, the minimax estimators given by (1.3) and (1.4) are discussed from the point of view of admissibility. It is found that the estimators with $b < N_0/(s+1)$ are inadmissible.