ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
VII (1963)

CZ. WOŹNIAK (Gliwice)

O PEWNYM ZAGADNIENIU NIELINIOWEJ TERMOSPRĘŻYSTOŚCI

Wstęp. Zagadnienia termosprężystości są rozpatrywane, w znanym autorowi piśmiennictwie, przy założeniu małych odkształceń, tj. w ramach geometrycznie liniowej teorii sprężystości. Odkształcenia ośrodka wywołane zmianą jego temperatury są istotnie niewielkie, z uwagi na małe wartości współczynnika rozszerzalności termicznej; przy zmianach temperatury ośrodka dochodzących do 2000°C odkształcenia termiczne sięgają rzędu tylko 2-4 %.

Istnieją jednak rozwiązania teorii klasycznej odbiegające daleko od rozwiązań ścisłych, tj. opartych na teorii geometrycznie nieliniowej. W pracy tej wykazano, że zachodzić to może wtedy, gdy gradienty temperatury osiągają duże wartości, a więc np. w cienkich przegrodach rozdzielających ośrodki o różnych temperaturach.

Poniższe opracowanie omawia zagadnienie rozkładu temperatur nie wywołującego naprężeń. Problem ten w ujęciu klasycznym ma charakter elementarny i jest dobrze znany (por. np. [1]). W artykule rozwiązano go w ujęciu nieliniowym, przy założeniu stacjonarności pola temperatury, izotropowości materiału i jednorodności ośrodka w stanie nieodkształconym.

1. Niech dl oznacza element długości ciała o temperaturze t. Zmiana długości tego elementu wywołana zmianą dt jego temperatury, wyniesie

$$d(dl) = k(t)\,dl\,dt, \tag{1.1}$$

gdzie $k(t)$ jest współczynnikiem rozszerzalności termicznej w temperaturze t. Przyjmijmy([1]) temperaturę ośrodka nieodkształconego $°R_3$ za stałą $t = °T = \text{const}$ oraz oznaczmy przez T temperaturę ośrodka odkształconego R_3. Jeżeli elementy długości obu tych ośrodków oznaczymy odpowiednio przez $d°s$ i ds, to całkując (1.1) otrzymamy

$$ds = e^{\sigma} d°s, \tag{1.2}$$

([1]) Ze względów technicznych Redakcja musiała tu i w całej pracy zastąpić symbol $\overset{\circ}{T}$ symbolem $°T$. Analogiczne zmiany dotyczą innych symboli ośrodka nie odkształconego. *Redakcja.*

gdzie

$$\sigma \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int_{{}^\circ T}^{T} k(t)\,dt. \tag{1.3}$$

Ośrodki ${}^\circ R_3$ i R_3 są obszarami w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa.

Parametryzując ośrodek dowolnym układem krzywoliniowym współrzędnych materiałowych η_a (wszystkie wskaźniki przebiegać będą ciąg 1, 2, 3), otrzymamy dla ${}^\circ R_3$ i R_3 formy metryczne postaci

$$d{}^\circ s^2 = {}^\circ g_{\alpha\beta} d\eta^\alpha d\eta^\beta, \qquad ds^2 = g_{\alpha\beta} d\eta^\alpha d\eta^\beta, \tag{1.4}$$

przy czym ${}^\circ g_{\alpha\beta}$ i $g_{\alpha\beta}$ są tensorami metrycznymi obu tych przestrzeni, określonymi w jednej rozmaitości $D(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Z (1.2) i (1.4) wynika związek

$$g_{\alpha\beta} = e^{2\sigma}\,{}^\circ g_{\alpha\beta} \tag{1.5}$$

wyrażający, jak wiadomo, odwzorowanie konforemne dwóch przestrzeni; współczynnik tego odwzorowania określa tutaj relacja (1.3).

2. Przy odwzorowaniu konforemnym przestrzeni Riemanna o afinorze krzywiznowym ${}^\circ R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ na przestrzeń Riemanna o afinorze krzywiznowym $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, zachodzi związek ([2], str. 516)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = e^{2\sigma}({}^\circ R_{\alpha\beta\gamma\delta} + {}^\circ g_{\alpha\delta} S_{\beta\gamma} + {}^\circ g_{\beta\gamma} S_{\alpha\delta} - {}^\circ g_{\alpha\gamma} S_{\beta\delta} - {}^\circ g_{\beta\delta} S_{\alpha\gamma}), \tag{2.1}$$

w którym

$$S_{\alpha\beta} = {}^\circ\nabla_\alpha \sigma_{,\beta} - \sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta} + \tfrac{1}{2}\,{}^\circ g_{\alpha\beta}\,{}^\circ g^{\mu\nu} \sigma_{,\mu}\sigma_{,\nu}; \qquad \sigma_{,\alpha} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial\sigma}{\partial\eta_\alpha}. \tag{2.2}$$

Symbol ${}^\circ\nabla_\alpha$ oznacza tu pochodną kowariantną wrodzoną, tj. opartą na tensorze metrycznym ${}^\circ g_{\alpha\beta}$.

W przypadku rozważanym w pracy obie przestrzenie są euklidesowe (tj. ${}^\circ R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$), a relacja (2.1) sprowadza się do

$${}^\circ g_{\alpha\delta} S_{\beta\gamma} + {}^\circ g_{\beta\gamma} S_{\alpha\delta} - {}^\circ g_{\alpha\gamma} S_{\beta\delta} - {}^\circ g_{\beta\delta} S_{\alpha\gamma} = 0. \tag{2.3}$$

Afinor $S_{\alpha\beta}$ jest symetryczny ($S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$), gdyż z uwagi na $\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} = \left\{ {\gamma \atop \beta\alpha} \right\}$, zachodzi

$${}^\circ\nabla_\alpha \sigma_{,\beta} = \sigma_{,\alpha\beta} + \left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\} \sigma_{,\gamma} = {}^\circ\nabla_\beta \sigma_{,\alpha}; \qquad \sigma_{,\alpha\beta} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial^2\sigma}{\partial\eta_\alpha \partial\eta_\beta}. \tag{2.4}$$

Zapis (2.3) przedstawia układ równań jednorodnych dla sześciu składowych tensora $S_{\alpha\beta}$. Łatwo wykazać, że równania te są spełnione tylko wtedy, gdy $S_{\alpha\beta} = 0$, tj. gdy

$${}^\circ\nabla_\alpha \sigma_{,\beta} - \sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta} + \tfrac{1}{2}\,{}^\circ g_{\alpha\beta}\,{}^\circ g^{\mu\nu} \sigma_{,\mu}\sigma_{,\nu} = 0. \tag{2.5}$$

Sześć równań (2.5) stanowi warunki konieczne i dostateczne, by przestrzeń R_3 stanowiła odwzorowanie konforemne przestrzeni $°R_3$. Są to jednocześnie warunki konieczne, jakie musi spełniać funkcja $\sigma = \sigma(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, by odkształceniom termicznym nie towarzyszyło pole naprężeń. Dodatkowy warunek dla σ wynika z równania przewodnictwa cieplnego, które będzie poniżej przedstawione.

3. Równanie przewodnictwa cieplnego $\operatorname{div}(a \operatorname{grad} T) = U$ (por. np. [3]) ma w zapisie tensorowym postać

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha(aT_{,\beta}) = U, \tag{3.1}$$

przy czym $a = a(T)$ jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego, U — wydajnością źródeł ciepła. Pochodna kowariantna ∇_α jest określona tutaj w przestrzeni odkształconej R_3. Wprowadzając afinor $T^\gamma_{\alpha\beta}$ odwzorowania konforemnego przestrzeni $°R_3$ na przestrzeń R_3 (jest to różnica symboli Christoffela dla metryk $g_{\alpha\beta}$ i $°g_{\alpha\beta}$), równanie (3.1) można doprowadzić do postaci

$$g^{\alpha\beta}[°\nabla_\alpha(aT_{,\beta}) - aT^\gamma_{\alpha\beta}T_{,\gamma}] = U. \tag{3.2}$$

Przy odwzorowaniu konforemnym zachodzą ([2], str. 514-515) związki:

$$g^{\alpha\beta} = e^{-2\sigma}\,°g^{\alpha\beta}, \qquad T^\gamma_{\alpha\beta} = \delta^\gamma_\alpha\sigma_{,\beta} + \delta^\gamma_\beta\sigma_{,\alpha} - °g_{\alpha\beta}\,°g^{\gamma\delta}\sigma_{,\delta}. \tag{3.3}$$

Podstawiając prawe strony (3.3) do (3.2), po przeprowadzeniu prostych przekształceń, otrzymuje się

$$°g^{\alpha\beta}\,°\nabla_\alpha(aT_{,\beta}) + a\,°g^{\alpha\beta}\sigma_{,\alpha}T_{,\beta} = Ue^{2\sigma}. \tag{3.4}$$

Aby wyrugować z powyższej relacji pochodne temperatury, zauważmy, że zgodnie z (1.3) zachodzi

$$\sigma_{,\beta} = T_{,\beta}k(T). \tag{3.5}$$

Wprowadzając funkcję $\mu = \mu(T)$, określającą własności termiczne ośrodka w temperaturze T

$$\mu \stackrel{\text{df}}{=} \frac{a(T)}{k(T)}, \tag{3.6}$$

można napisać równanie przewodnictwa (3.4) w postaci

$$°g^{\alpha\beta}\,°\nabla_\alpha(\mu\sigma_{,\beta}) + \mu\,°g^{\alpha\beta}\sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta} = Ue^{2\sigma}, \tag{3.7}$$

skąd, po zróżniczkowaniu, otrzymuje się ostatecznie

$$\mu\,°g^{\alpha\beta}\,°\nabla_\alpha\sigma_{,\beta} + \left(\mu + \frac{1}{k(T)}\cdot\frac{d\mu}{dT}\right)°g^{\alpha\beta}\sigma_{,\alpha}\sigma_{,\beta} = Ue^{2\sigma}. \tag{3.8}$$

Jeżeli odkształcenie ośrodka $°R_3$ jest określone związkami (1.5), to warunki (2.5) i (3.8) są konieczne i wystarczające, by w ośrodku odkształconym R_3 nie występowało pole naprężeń.

4. Pomijając przypadek banalny $\sigma = \text{const}$ ($U = 0$), przyjmijmy w ośrodku $°R_3$ taki ortogonalny układ współrzędnych (²) η_1, η_2, η_3, w którym na powierzchniach $\eta_1 = \text{const}$ funkcja σ posiada wartość stałą, tj. zachodzi $\sigma = \sigma(\eta_1)$. Równania (2.5) przyjmą wtedy postać

$$\sigma_{,11} - \left\{ {1 \atop 1\ 1} \right\} \sigma_{,1} - \tfrac{1}{2}(\sigma_{,1})^2 \stackrel{*}{=} 0, \tag{4.1}$$

$$\left\{ {1 \atop 1\ 2} \right\} \stackrel{*}{=} 0, \tag{4.2}$$

$$\left\{ {1 \atop 1\ 3} \right\} \stackrel{*}{=} 0, \tag{4.3}$$

$$\left\{ {1 \atop 2\ 3} \right\} \stackrel{*}{=} 0, \tag{4.4}$$

$$\left\{ {1 \atop 2\ 2} \right\} - \tfrac{1}{2} {}^\circ g_{22} {}^\circ g^{11} \sigma_{,1} \stackrel{*}{=} 0, \tag{4.5}$$

$$\left\{ {1 \atop 3\ 3} \right\} - \tfrac{1}{2} {}^\circ g_{33} {}^\circ g^{11} \sigma_{,1} \stackrel{*}{=} 0. \tag{4.6}$$

Znak $\stackrel{*}{=}$ oznacza, że równość zachodzi tylko w układzie współrzędnych η_1, η_2, η_3. Wyrażając symbole Christofella przez składowe tensora metrycznego przestrzeni $°R_3$, otrzymujemy z (4.2) i (4.3) zależność

$$ {}^\circ g_{11} \stackrel{*}{=} {}^\circ g_{11}(\eta_1). \tag{4.7}$$

Równanie (4.4) jest spełnione tożsamościowo, równania (4.5) i (4.6) prowadzą natomiast do

$$\begin{aligned} {}^\circ g_{22,1} + {}^\circ g_{22}\sigma_{,1} &\stackrel{*}{=} 0, \\ {}^\circ g_{33,1} + {}^\circ g_{33}\sigma_{,1} &\stackrel{*}{=} 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Z warunku (4.7) wynika, że powierzchnie $\eta_1 = \text{const}$ są do siebie równoległe. Bez wpływu na ogólność rozważań możemy więc położyć ${}^\circ g_{11} = \text{const} = 1$, traktując $|\eta_1|$ jako odległość dowolnego punktu w ośrodku $°R_3$ od powierzchni $\eta_1 = 0$. Równanie (4.1) przyjmie teraz postać

$$\sigma_{,11} - \tfrac{1}{2}(\sigma_{,1})^2 \stackrel{*}{=} 0. \tag{4.9}$$

Dobierając tak powierzchnię $\eta_1 = 0$, by na niej $\sigma = 0$, otrzymamy z (4.9)

$$\sigma \stackrel{*}{=} \ln\left(1 - \frac{\eta_1}{\varrho}\right)^{-2}, \tag{4.10}$$

(²) Ze względów technicznych Redakcja musiała tu i w całej pracy zastąpić symbole typu $\eta_{\bar{1}}$, $\sigma_{,\bar{1}\bar{1}}$ i podobne prostszymi symbolami η_1, $\sigma_{,11}$. *Redakcja.*

gdzie ϱ jest dowolną stałą. Z równań (4.8) otrzymamy następnie

$$
\begin{aligned}
{}^{\circ}g_{22} &\stackrel{*}{=} \left(1-\frac{\eta_1}{\varrho}\right)^2 {}^{\circ}a_{22}(\eta_2, \eta_3),\\
{}^{\circ}g_{33} &\stackrel{*}{=} \left(1-\frac{\eta_1}{\varrho}\right)^2 {}^{\circ}a_{33}(\eta_2, \eta_3).
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

${}^{\circ}a_{22}$ i ${}^{\circ}a_{33}$ są dwiema dowolnymi funkcjami zmiennych η_2 i η_3; stanowią one składowe pierwszego tensora podstawowego powierzchni $\eta_1 = 0$, zanurzonej w ${}^{\circ}R_3$.

Linie przecięcia się powierzchni $\eta_2 = \text{const}$ i $\eta_3 = \text{const}$ są prostymi i tworzą kongruencję normalną do powierzchni $\eta_1 = 0$. Równanie wektorowe tej kongruencji ma postać ([4], str. 113)

$$
{}^{\circ}\boldsymbol{R} = {}^{\circ}\boldsymbol{r}(\eta_2, \eta_3) + \eta_1 {}^{\circ}\boldsymbol{m}(\eta_2, \eta_3), \tag{4.12}
$$

gdzie ${}^{\circ}\boldsymbol{m}$ jest wektorem normalnym do $\eta_1 = 0$. Różniczkując wektor ${}^{\circ}\boldsymbol{R}$ i korzystając ze znanych w teorii powierzchni wzorów Weingartena ([4], str. 194), otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
{}^{\circ}\boldsymbol{R}_{,2} &= {}^{\circ}\boldsymbol{r}_{,2} - {}^{\circ}b_2^2\, {}^{\circ}\boldsymbol{r}_{,2}\eta_1,\\
{}^{\circ}\boldsymbol{R}_{,3} &= {}^{\circ}\boldsymbol{r}_{,3} - {}^{\circ}b_3^3\, {}^{\circ}\boldsymbol{r}_{,3}\eta_1,
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

gdzie ${}^{\circ}b_2^2$ i ${}^{\circ}b_3^3$ są składowymi mieszanymi drugiego tensora podstawowego powierzchni $\eta_1 = 0$ zanurzonej w ośrodku nieodkształconym. Relacje (4.13) pozwalają na określenie składowych tensora metrycznego przestrzeni ${}^{\circ}R_3$:

$$
\begin{aligned}
{}^{\circ}g_{11} &= 1,\\
{}^{\circ}g_{22} &= {}^{\circ}\boldsymbol{R}_{,2}\cdot{}^{\circ}\boldsymbol{R}_{,2} = (1-{}^{\circ}b_2^2\eta_1)^2\, {}^{\circ}a_{22},\\
{}^{\circ}g_{33} &= {}^{\circ}\boldsymbol{R}_{,3}\cdot{}^{\circ}\boldsymbol{R}_{,3} = (1-{}^{\circ}b_3^3\eta_1)^2\, {}^{\circ}a_{33}.
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

Symbolami ${}^{\circ}a_{22} = {}^{\circ}\boldsymbol{r}_{,2}\cdot{}^{\circ}\boldsymbol{r}_{,2}$ i ${}^{\circ}a_{33} = {}^{\circ}\boldsymbol{r}_{,3}\cdot{}^{\circ}\boldsymbol{r}_{,3}$ oznaczono, jak poprzednio, składowe pierwszego tensora podstawowego powierzchni $\eta_1 = 0$. Porównując (4.11) z dwoma ostatnimi związkami (4.14) widzimy, że

$$
{}^{\circ}b_2^2 = {}^{\circ}b_3^3 = \frac{1}{\varrho}. \tag{4.15}
$$

Z (4.15) wynika, że powierzchnia $\eta_1 = 0$ jest powierzchnią kuli, ϱ^{-1} — jej krzywizną główną. Tym samym wprowadzony na początku tego rozdziału układ współrzędnych, w którym $\sigma = \sigma(\eta_1)$ jest układem sferycznym. Warunek (3.8) ma więc postać

$$
\mu\left(\sigma_{,11} - {}^{\circ}g^{22}\begin{Bmatrix}1\\2\;2\end{Bmatrix}\sigma_{,1} - {}^{\circ}g^{33}\begin{Bmatrix}1\\3\;3\end{Bmatrix}\sigma_{,1}\right) + \left(\mu + \frac{1}{k}\frac{d\mu}{dT}\right)(\sigma_{,1})^2 = Ue^{2\sigma}, \tag{4.16}
$$

która z uwagi na (4.5), (4.6) i (4.9) sprowadza się do

$$\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{4}{k}\frac{d\mu}{dT}\right)(\sigma_{,1})^2 = Ue^{2\sigma}. \tag{4.17}$$

Podstawiając do (4.17) prawą stronę (4.10), dochodzimy do relacji określającej rozkład źródeł ciepła w ośrodku

$$U = \frac{1}{\varrho^2}\left(1-\frac{\eta_1}{\varrho}\right)^2\left(2\mu+\frac{4}{k(T)}\frac{d\mu}{dT}\right). \tag{4.18}$$

Na zakończenie tego rozdziału zwróćmy uwagę, że funkcja $\sigma = \sigma(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ przyjmuje wartości niewielkie wobec jedności (współczynnik rozszerzalności termicznej jest bowiem wielkością rzędu 10^{-5} stop^{-1}). Za kres górny modułów $|\sigma|$ można orientacyjnie przyjąć 0,06; zgodnie z (4.10), kresem górnym modułów $|\eta_1\varrho^{-1}|$ jest wtedy wielkość 0,03. Z zupełnie wystarczającą dokładnością można więc napisać $(1-\eta_1\varrho^{-1})^{-1} \cong \cong (1+\eta_1\varrho^{-1})$, zastępując (4.10) związkiem

$$\sigma = \ln\left(1+\frac{\eta_1}{\varrho}\right)^2. \tag{4.19}$$

Równania (4.18) i (4.19) określają rozkład źródeł ciepła oraz rozkład temperatury w ośrodku nieodkształconym $°R_3$, parametryzowanym współrzędnymi sferycznymi η_1, η_2, η_3. Rozkład ten, zależąc tylko od η_1, jest więc biegunowo symetryczny.

5. Korzystając z relacji (1.5), z funkcji σ przyjętej w postaci (4.19) oraz ze związków (4.11), otrzymamy poniższe wyrażenia na składowe tensora metrycznego ośrodka odkształconego

$$\begin{aligned} g_{11} &= e^{2\sigma}\, {}^{\circ}g_{11} = \left(1+\frac{\eta_1}{\varrho}\right)^4, \\ g_{22} &= e^{2\sigma}\, {}^{\circ}g_{22} = \left(1+\frac{\eta_1}{\varrho}\right)^2 {}^{\circ}a_{22}, \\ g_{33} &= e^{2\sigma}\, {}^{\circ}g_{33} = \left(1+\frac{\eta_1}{\varrho}\right)^2 {}^{\circ}a_{33}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Kongruencja (4.12) przechodzi w kongruencję

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(\eta_2, \eta_3)+\int\limits_0^{\eta_1}\sqrt{g_{11}}\,d\eta_1\,\boldsymbol{m}(\eta_2, \eta_3).$$

Różniczkując wektor $\boldsymbol{R}$ względem η_2 i η_3, korzystając z wzorów Weingartena i stosując omówione poprzednio uproszczenia, otrzymujemy składowe tensora metrycznego powierzchni $\eta_1 = \text{const}$ zanurzonej w ośrodku odkształconym R_3:

$$g_{22} = \boldsymbol{R}_{,2}\cdot\boldsymbol{R}_{,2} = (1-b_2^2\eta_1)a_{22},$$
$$g_{33} = \boldsymbol{R}_{,3}\cdot\boldsymbol{R}_{,3} = (1-b_3^3\eta_1)a_{33}. \tag{5.2}$$

Symbolami b_2^2 i b_3^3 oznaczono składowe mieszane drugiego tensora podstawowego powierzchni $\eta_1 = 0$ po odkształceniu, symbolami a_{22} i a_{33} — składowe kowariantne jej pierwszego tensora. Ponieważ dla $\eta_1 = 0$ zachodzi $\sigma = 0$, przeto $a_{22} = {}^\circ a_{22}$ oraz $a_{33} = {}^\circ a_{33}$. Porównując teraz stronami (5.1) i (5.2), otrzymujemy

$$b_2^2 = b_3^3 = -\frac{1}{\varrho}. \tag{5.3}$$

Z (4.15) i (5.3) wynika, że przy odkształceniu termicznym ośrodka, parametryzowanego układem współrzędnych sferycznych, krzywizna powierzchni $\eta_1 = 0$ zmienia znak (powierzchnia z wypukłej staje się wklęsłą lub odwrotnie). Powierzchnie $\eta_1 = \text{const}$, które w ${}^\circ R_3$ były oddalone od powierzchni $\eta_1 = 0$ o wielkość d_0, w ośrodku R_3 są powierzchniami kulistymi, odległymi od $\eta_1 = 0$ o wielkość d

$$d = \int_0^{d_0} \sqrt{g_{11}}\, d\eta_1 \cong d_0\left(1+\frac{d_0}{\varrho}\right). \tag{5.4}$$

Tak więc krzywizna dowolnej powierzchni $\eta_1 = \text{const}$ zmienia znak na przeciwny, a jej promień z wielkości ${}^\circ R = |\varrho|+d_0$ zmienia się na $R = |\varrho|+d_0(1+d_0\varrho^{-1})$.

Przykład. Rozpatrzmy otwartą powłokę kulistą, o grubości ścianki δ, rozdzielającą dwa ośrodki o różnych temperaturach. Temperatury wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni tej powłoki oznaczmy kolejno przez T_w i T_z. Należy określić, przy jakim promieniu krzywizny ϱ_w wewnętrznej powierzchni tej powłoki, nie powstaną w niej po odkształceniu naprężenia termiczne.

Załóżmy, że temperatura powłoki w stanie początkowym (beznaprężeniowym) wynosi $T_0 = \text{const}$, a średnie wartości współczynnika rozszerzalności termicznej w przedziałach temperatur (T_0, T_w) i (T_0, T_z) oznaczmy odpowiednio przez k_w i k_z. Na podstawie (1.3) i (4.19) otrzymamy

$$k_w(T_w-T_0) = \ln\left(1+\frac{d_w}{\varrho}\right)^2 = \ln\left(\frac{\varrho_w}{\varrho}\right)^2,$$
$$k_z(T_z-T_0) = \ln\left(1+\frac{d_z}{\varrho}\right)^2 = \ln\left(\frac{\varrho_z}{\varrho}\right)^2,$$

gdzie $\varrho_w \overset{\text{df}}{=} \varrho+d_w$ i $\varrho_z \overset{\text{df}}{=} \varrho+d_z$ są promieniami krzywizn wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni powłoki w stanie nieodkształconym. Odejmując stronami powyższe równania otrzymujemy

$$k_w T_w - k_z T_z + T_0(k_z - k_w) = \ln\left(\frac{\varrho_z}{\varrho_w}\right)^2.$$

Ponieważ $\varrho_z = \varrho_w + \delta$, zachodzi związek

$$\ln\left(1+\frac{\delta}{\varrho_w}\right)^2 = k_w T_w - k_z T_z + T_0(k_z - k_w),$$

pozwalający na wyznaczenie wielkości ϱ_w. Z uwagi na małe wartości, które przyjmuje współczynnik rozszerzalności termicznej, iloraz δ/ϱ_w jest również niewielki wobec jedności. Możemy więc napisać

$$\varrho_w \cong 2\delta[k_w T_w - k_z T_z + T_0(k_w - k_z)]^{-1}.$$

Dla powłoki stalowej, przy różnicy temperatur na obu jej powierzchniach $T_w - T_z = 200°\mathrm{C}$, oraz dla grubości ścianki $\delta = 10$ mm, przyjmując $k_w = k_z = 1{,}2\cdot 10^{-5}\dfrac{1}{°\mathrm{C}}$ otrzymamy $\varrho_w \cong 830$ cm. Stan beznaprężeniowy może zachodzić tylko wtedy, gdy temperatura na wewnętrznej powierzchni tej powłoki jest większa niż na powierzchni zewnętrznej: $T_w > T_z$. Należy dodać, że według teorii liniowej w rozpatrywanej powłoce zawsze będzie panować stan naprężeniowy, bowiem w ujęciu klasycznym stany beznaprężeniowe zachodzą tylko dla liniowego rozkładu temperatury $T = C_1\eta_1 + C_2\eta_2 + C_3\eta_3 + D$, który otrzymamy z (2.5) i (3.8) po pominięciu członów nieliniowych i przyjęciu $k = \mathrm{const}$. W przytoczonym przykładzie, rozpatrując zagadnienie z punktu widzenia teorii klasycznej, otrzymalibyśmy więc zamiast powłoki — płytę. Różnica obu tych rezultatów będzie tym większa, im większe będą wymiary powierzchni rozpatrywanej powłoki.

Rozpatrując relację (4.18) załóżmy, że w danym przedziale temperatury można przyjąć $\mu = \mathrm{const}$, tj.

$$U \cong \frac{2a}{k\varrho^2}\left(1-\frac{\eta_1}{\varrho}\right)^2.$$

Dla $T_z = T_0$ otrzymamy $\varrho = \varrho_w$; kładąc ponadto dla stali $a = 0{,}5$ kcal/cm godz °C, otrzymamy $U \cong 0{,}12$ kcal/cm³ godz. Postępując analogicznie jak w [1] (str. 48 wydania rosyjskiego), przyjmijmy

$$U = 2a_1\delta^{-1}(\theta_{śr} - T_{śr}),$$

gdzie $T_{śr}$ jest średnią temperaturą powłoki, $\theta_{śr}$ — średnią temperaturą ośrodków, które rozdziela powłoka, a_1 — współczynnikiem zewnętrznego przewodnictwa cieplnego pomiędzy powłoką a ośrodkiem. Kładąc orientacyjnie $a_1 = 3{,}0$ kcal/cm² godz °C, otrzymamy $\theta_{śr} - T_{śr} = 0{,}7$°C; praktycznie można przyjąć $\theta_{śr} \cong T_{śr}$ i $U \cong 0$, z wystarczającą dokładnością uznając pole temperatury za bezźródłowe. Relacji (4.18) można więc nie brać pod uwagę przy analizie stanów beznaprężeniowych.

Na zakończenie nadmieńmy jeszcze o stanie przemieszczenia rozpatrywanej powłoki. W postaci nieodkształconej musi być ona skierowana wypukłością w stronę ośrodka o niższej temperaturze. Po odkształceniu beznaprężeniowym dozna ona przegięcia w stronę ośrodka o temperaturze wyższej. Zmiana grubości powłoki i zmiany jej wymiarów są niewielkie i mogą być rozpatrywane w ramach teorii klasycznej. Natomiast przemieszczenia punktów powłoki są porównywalne co do wielkości z jej wymiarami; do opisu stanu przemieszczenia stosować więc można tylko teorię nieliniową, której elementy przedstawiono w tym artykule.

Prace cytowane

[1] E. Melan, H. Parkus, *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder*, Wien 1953.

[2] P. K. Raszewski, *Geometria Riemanna i analiza tensorowa*, przekład z rosyjskiego, Warszawa 1958.

[3] H. S. Carslaw, J. C. Jaeger, *Conduction of heat is solids*, Oxford 1959.

[4] А. П. Норден, *Теория поверхностей*, Москва 1956.

Praca wpłynęła 5. 9. 1962

Ц. ВОЗЬНЯК (Гливице)

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

РЕЗЮМЕ

В статье рассмотрен вопрос распределения температурных полей, не вызывающих напряжения в трехмерной среде. Этот вопрос представлен в нелинейном разрезе для случая больших изменений температуры исследуемой среды, допуская возможность изменения её геометрии и физических свойств. Допущены только условия стационарности температурного поля, однородности и изотропии недеформированной среды. Условия не вызывающие напряжений получены в результате анализа деформации среды, а также из уравнения тепловой проводимости.

Эти условия выражены в виде простых формул. Доказано, что для больших градиентов температуры, полученное решение существенно отличается от классического решения.

CZ. WOŹNIAK (Gliwice)

ON A PROBLEM OF NON-LINEAR THERMOELASTICITY

SUMMARY

The paper discusses the problem of stressless thermal states in a three dimensional medium. The problem is presented non-linearly for great changes of temperature in the medium in question, the possibility of changes in its geometry and physical properties being taken into consideration. The only assumptions made are the steady state of the temperature field and the isotropy of the non-deformed homogeneous medium. The stressless conditions are obtained from the analysis of geometry of deformation of the medium and from the equation of thermal conductivity.

The conditions in question are expressed in the form of simple formulas. It is shown that for large gradients of temperature the solution obtained essentially differs from the classical solution.