ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
VII (1963)

W. POGORZELSKI † (Warszawa)

*SUR UN PROBLÈME DE LA THÉORIE DES PROCESSUS STOCHASTIQUES**

Dans ce travail nous étudierons un problème aux limites qu'on rencontre dans la théorie du réglage automatique d'un système électrique.

Rappelons d'abord quelques notions de la théorie des processus stochastiques données récemment par Ito [1]. Soit un processus stos chastique

$$(1)\qquad Y(t) = [y_1(t), \ldots, y_n(t)]$$

composé de n processus stochastiques simples $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ dans l'intervalle de temps $0 \leqslant t \leqslant T$ et soit E_n un espace euclidien à n dimensions composé des points $Y = (y_1, \ldots, y_n)$. Désignons par $Q(Y, t)$ la densité de la probabilité pour que le processus stochastique (1) se trouve au voisinage du point Y au moment t. Cette fonction vérifie la seconde équation de Kolmogorov

$$(2)\qquad \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_\mu \partial y_\nu} [A_{\mu\nu}(Y, \tau)Q] - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_\nu} [B_\nu(Y, \tau)Q] - \frac{\partial Q}{\partial \tau} = 0,$$

$A_{\mu\nu}(Y, \tau)$ et $B_\nu(Y, \tau)$ étant certaines fonctions caractéristiques du processus (1), définies dans la région $[Y \epsilon E_n,\ 0 \leqslant t \leqslant T]$.

Considérons un processus stochastique $Y(t) = [y_1(t), \ldots, y_n(t)]$ dont les composants vérifient un système d'équations différentielles

$$(3)\qquad \frac{dy_\nu}{dt} = F_\nu(y_1, \ldots, y_n, t) + a_\nu \xi(t)$$

$(\nu = 1, \ldots, n)$ où $F_\nu(y_1, \ldots, y_n, t)$ sont des fonctions données dérivables définies dans la région $[Y \epsilon E_n,\ 0 \leqslant t \leqslant T]$, a_ν sont des constantes, la

*Mr Witold Pogorzelski est decedé le 3 Janvier 1963. Son article que nous publions actuellement est lié avec deux domaines d'activité de l'Auteur: les équations intégrales et la théorie des probabilités. L'Auteur a laissé son travail sous forme d'un manuscrit complétement achevé et il l'a destiné pour notre journal. M-me Krystyna Salwa s'est chargée de la préparation rédactionelle de l'article

La Rédaction

variable aléatoire $\xi(t)$ est soumise à la loi normale de Gauss. On rencontre le système (3) dans l'étude d'un système dynamique soumis à l'action de forces alléatoircs. Dans ce cas l'équation de Kolmogorov (2) prend la forme d'une équation parabolique

$$(4) \qquad \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_\mu a_\nu \frac{\partial^2 Q}{\partial y_\mu \partial y_\nu} - \sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_\nu}(F_\nu Q) - \frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

Soit dans l'espace E_n une surface S limitant le domaine Ω. En s'appuyant sur l'équation (4) et sur le théorème de Green-Ostrogradski on déduit l'équation intégrale suivante

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega} Q(Y,t)\,dY = -\iint_{S} R_N\,d\sigma,$$

$\boldsymbol{R}$ étant un vecteur dont les composantes sont données par les formules

$$(6) \qquad R_{y_\nu}(Y,t) = F_\nu(Y,t)Q(Y,t) - \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu a_\nu \frac{\partial Q}{\partial y_\nu};$$

où R_N désigne la composante normale du vecteur $\boldsymbol{R}$.

On appelle le vecteur $\boldsymbol{R}(Y,\tau)$ densité du courant de probabilité du processus stochastique $Y(t)$ au point (Y,t).

L'analyse du réglage automatique d'un système électrique conduit à l'étude du processus stochastique $y(t)$ vérifiant l'équation différentielle

$$(7) \qquad \frac{dy}{dt} + \frac{y + A\,\mathrm{sgn}\,y}{T} = \frac{m(t)}{T} + \frac{a}{T}\xi(t),$$

qui est un cas particulier du système (3). De même que précédemment, le processus stochastique $\xi(t)$ obéit à la loi de Gauss, $m(t)$ est une fonction dérivable donnée, T, A et a sont des constantes positives. Le plan $y = 0$ est donc un plan de discontinuité du processus. L'équation de Kolmogorov pour la probabilité $Q(y,t)$ du processus sera, en vertu de l'équation (4),

$$(8) \qquad \frac{a^2}{2T^2}\cdot\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{m(t)-y-A}{T}Q\right] - \frac{\partial Q}{\partial t} = 0, \qquad \text{pour} \qquad y > 0,$$

$$(8') \qquad \frac{a^2}{2T^2}\cdot\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{m(t)-y+A}{T}Q\right] - \frac{\partial Q}{\partial t} = 0, \qquad \text{pour} \qquad y < 0.$$

On se propose de déterminer une fonction $Q(y,t)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1) la fonction $Q(y,t)$ vérifie l'équation parabolique (8) dans la région $(y>0,\ t>0)$ et l'équation (8′) dans la région $(y<0,\ t>0)$;

2) la fonction $Q(y,t)$ vérifie dans le plan $y=0$ la condition de continuité

$$\lim_{y\to-0} Q(y,t) = \lim_{y\to+0} Q(y,t), \qquad t>0 \tag{9}$$

et la condition de continuité de la composante normale de la densité du courant de probabilité $\boldsymbol{R}$ donnée par les formules (6); dans le cas actuel cette condition s'exprime par l'égalité

$$\lim_{y\to-0}\left[\frac{\partial Q(y,t)}{\partial y}\right] - \lim_{y\to+0}\left[\frac{\partial Q(y,t)}{\partial y}\right] = \frac{4\pi A}{a^2} Q(y,t), \qquad t>0; \tag{10}$$

3) la fonction $Q(y,t)$ vérifie la condition initiale

$$\lim_{t\to0} Q(y,t) = f(y) \tag{11}$$

en tout point $y\neq0$.

On admet que la fonction donnée $f(y)$ est continue en tout point $y=0$ de l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et admet des limites unilatérales au point $y\neq0$. En outre la fonction $f(y)$ admet une dérivée en tout point $y\neq0$ d'un voisinage arbitraire $(-\varepsilon, \varepsilon)$ du point $y=0$ et des dérivées unilatérales au point $y=0$ même. Enfin on suppose que la fonction $f(y)$ vérifie l'inégalité

$$|f(y)| < Ce^{c|y|}, \tag{12}$$

C et c étant des constantes positives.

Le problème posé a été récemment étudié par M. Khasen [2] et Barret [3]. Dans cet article nous résoudrons ce problème par une autre méthode, plus simple et exacte. Nous cherchons notamment la solution du problème sous la forme de sommes des potentiels de simple couche de densités inconnues φ_1 et φ_2 étendues sur le segment $(0,t)$ et des intégrales de Poisson-Weierstrass

$$Q(y,t) = \int_0^t \Gamma_1(y,t;0,\tau)\varphi_1(\tau)d\tau + \int_0^\infty \Gamma_1(y,t;\eta,0)f(\eta)d\eta \quad \text{si} \quad y>0, \tag{13}$$

$$Q(y,t) = \int_0^t \Gamma_2(y,t;0,\tau)\varphi_2(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^0 \Gamma_2(y,t;\eta,0)f(\eta)d\eta \quad \text{si} \quad y<0. \tag{14}$$

On a désigné par $\Gamma_1(y,t;\eta,\tau)$ et $\Gamma_2(y,t;\eta,\tau)$ les solutions fondamentales (normalisées) des équations paraboliques (8) et (8′).

On sait, d'après les recherches de l'auteur [4], que ces solutions fondamentales s'expriment par les formules

$$(15)\quad \Gamma_1(y,t;\eta,\tau) = w(y,t;\eta,\tau) + \int_\tau^t\int_0^\infty w(y,t;\zeta,\theta)\Phi_1(\zeta,\theta;\eta,\tau)d\zeta d\theta,$$

$$(16)\quad \Gamma_2(y,t;\eta,\tau) = w(y,t;\eta,\tau) + \int_\tau^t\int_{-\infty}^0 w(y,t;\zeta,\theta)\Phi_2(\zeta,\theta;\eta,\tau)d\zeta d\theta,$$

où la fonction $w(y,t;\eta,\tau)$ est la solution fondamentale de l'équation

$$(17)\quad \frac{a^2}{2T^2}\cdot\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} - \frac{\partial Q}{\partial t} = 0,$$

donnée par la formule

$$(18)\quad w(y,t;\eta,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\tau)}}\exp\left[\frac{2T^2(y-\eta)^2}{a^2(t-\tau)}\right],$$

où $0<\tau<t$; les fonctions Φ_1 et Φ_2, à singularité faible, sont les solutions de certaines équations singulières de Volterra.

En demandant que les fonctions (13) et (14) vérifient les conditions (9) et (10) et en s'appuyant sur les propriétés connues des potentiels de chaleur, on arrive au système suivant d'équations intégrales

$$(19)\quad \int_0^t\Gamma_1(0,t;0,\tau)\varphi_1(\tau)d\tau - \int_0^t\Gamma_2(0,t;0,\tau)\varphi_2(\tau)d\tau = F_1(t),$$

$$(20)\quad \frac{1}{2}\varphi_1(t)+\frac{1}{2}\varphi_2(t) - \int_0^t\Gamma'_{1y}(0,t;0,\tau)\varphi_1(\tau)d\tau + \int_0^t\Gamma'_{2y}(0,t;0,\tau)\varphi_2(\tau)d\tau - \\ -\frac{4\pi A}{a^2}\int_0^t\Gamma_1(0,t;0,\tau)\varphi_1(\tau)d\tau = F_2(t)$$

à deux fonctions inconnues $\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$. Les fonctions connues $F_1(t)$ et $F_2(t)$ sont données par les formules

$$(21)\quad F_1(t) = \int_0^\infty\Gamma_1(0,t;\eta,0)f(\eta)d\eta + \int_{-\infty}^0\Gamma_2(0,t;\eta,0)f(\eta)d\eta,$$

$$(22)\quad F_2(t) = \int_0^\infty\Gamma'_{1y}(0,t;\eta,0)f(\eta)d\eta - \int_{-\infty}^0\Gamma'_{2y}(0,t;\eta,0)f(\eta)d\eta + \\ +\frac{4\pi A}{a^2}\int_0^\infty\Gamma_1(0,t;\eta,0)f(\eta)d\eta.$$

D'après l'hypothèse concernant la fonction $f(y)$, la fonction $F(t)$ est définie et continue pour $0\leqslant t<\infty$, la dérivée de la fonction $F_1(t)$ est définie et continue pour $0 < t < \infty$ et admet une singularité faible si $t \to 0$. La fonction $F_2(t)$ est définie et continue pour $0 \leqslant t < \infty$. Observons maintenant, en vertu des formules (15) et (16), que les fonctions $\Gamma_1(0, t; 0, \tau)$ et $\Gamma_2(0, t; 0, \tau)$ dans l'équation (19) ont la partie principale $1/\sqrt{t-\tau}$; nous allons donc transformer cette équation en une équation équivalente par le procédé bien connu, utilisé pour la résolution de l'équation intégrale d'Abel. On multiplie donc les deux membres de l'équation (19) par $1/\sqrt{\theta-\tau}$, on intègre par rapport à t et ensuite on dérive par rapport à θ. En changeant les variables, on arrive ainsi à une équation intégrale de la forme

$$\varphi_1(t)-\varphi_2(t)+\int_0^t K_1(t, \tau)\varphi_1(\tau)d\tau+\int_0^t K_2(t, \tau)\varphi_2(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{F_1'(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \tag{23}$$

tout à fait équivalente à l'équation (19). Le système d'équations (20), (23) peut immédiatement être ramené au système équivalent de la forme

$$\varphi_a(t) = \bar{f}_a(t)+\int_0^t \sum_{\beta=1}^{2} N_{a\beta}(t, \tau)\varphi_\beta(\tau)d\tau, \qquad a = 1, 2, \tag{24}$$

où les noyaux $N_{a\beta}(t, \tau)$ ont une singularité faible si $t-\tau \to 0$ et les fonctions données $\bar{f}_a(t)$ ont une singularité faible si $t \to \tau$.

La solution du système (24) par les méthodes classiques a la forme

$$\varphi_a(t) = \bar{f}_a(t)+\int_0^t \sum_{\beta=1}^{2} \mathfrak{N}_{a\beta}(t, \tau)\bar{f}_\beta(\tau)d\tau, \tag{25}$$

où les noyaux résolvants sont les sommes de séries absolument convergentes de noyaux itérés

$$\mathfrak{N}_{a\beta}(t, \tau) = N_{a\beta}(t, \tau)+N_{a\beta}^{(1)}(t, \tau)+\ldots+N_{a\beta}^{(n)}(t, \tau)+\ldots \tag{26}$$

définies par la formule de récurrence

$$N_{a\beta}^{(\nu+1)}(t, \tau) = \sum_{\gamma=1}^{2}\int_\tau^t N_{a\gamma}(t, s)N_{\gamma\beta}^{(\nu)}(s, \tau)ds. \tag{27}$$

En substituant les fonctions trouvées (25) dans les formules (13) et (14), on aura la densité de probabilité cherchée $Q(y, t)$ du problème posé, vérifiant les conditions demandées 1), 2), 3).

Travaux cités

[1] К. Ито, *Стохастические дифференциальные уравнения,* Математика, 1957, т. I.

[2] М. Хазен, *Определение плотности распределения вероятности для случайных процесов,* Теория вероятности и ее применения т. VI, вып. II, 1961.

[3] J. F. Barret, *Application of Kolmogorov equations*, Conf. I. F. A. 1961 (A. H. C. C. C. P.).

[4] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique*, Ricerche di Matematica, Napoli, 5 (1956), pp. 25-57.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu le 16. 1. 1963

W. POGORZELSKI† (Warszawa)

O PEWNYM ZAGADNIENIU Z TEORII PROCESÓW STOCHASTYCZNYCH

STRESZCZENIE

W pracy autor rozpatruje zagadnienia dotyczące analizy układu dynamicznego pobudzanego siłą przypadkową $\xi(t)$ o rozkładzie gaussowskim.

Jeśli układ dynamiczny opisany jest układem równań (3) to gęstość rozkładu prawdopodobieństwa $Q(Y, t)$ spełnia równanie Kolmogorowa (4).

W rozpatrywanym przez autora szczególnym przypadku układu elektrycznego opisanego równaniem (7) funkcja $F(y, t) = m(t)/T - (y + A\operatorname{sgn} y)/T$ jest nieciągła w płaszczyźnie $y = 0$.

Zagadnienie polega na znalezieniu gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $Q(y, t)$ spełniającej odpowiednio ($y \neq 0$) równanie (8) dla $y > 0$, a równanie (8') dla $y < 0$. Na płaszczyźnie $y = 0$ żądamy ciągłości funkcji $Q(y, t)$ oraz ciągłości strumienia gęstości prawdopodobieństwa, tzn. ciągłości składowych normalnych wektora (6). Ponadto funkcja ta spełnia warunek początkowy (11). Rozwiązania tak sformułowanego zagadnienia brzegowego autor poszukuje w postaci sumy potencjału warstwy pojedynczej o nieznanej gęstości, różnej dla $y > 0$ i dla $y < 0$, oraz całki Poissona-Weierstrassa. Następnie korzystając z warunków brzegowych sprowadza zagadnienie do rozwiązania układu dwu równań całkowych Volterry słabo-osobliwych, których rozwiązaniem są nieznane gęstości φ_1, φ_2 potencjału warstwy pojedynczej. Układ ten zgodnie z ogólną teorią posiada rozwiązanie w postaci (25).

В. ПОГОЖЕЛЬСКИ† (Варшава)

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ИЗ ТЕОРИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

РЕЗЮМЕ

Автор в своей работе рассматривает вопросы связанные с анализом динамической системы, возбуждаемой случайной силой $\xi(t)$, которую можно представить гауссовским распределением.

Если динамическая система описывается системой уравнений (3), то плотность распределения вероятности $Q(Y,t)$ удовлетворяет уравнению Колмогорова (4).

Автор рассматривает частный случай электрической системы, описанной уравнением (7), где функция $F(y,t) = m(t)/T - (y + A\operatorname{sgn} y)/T$ имеет разрыв в плоскости $y = 0$.

Вопрос заключается в определении плотности распределения вероятности $Q(y,t)$ удовлетворяющего, соответственно (для $y \neq 0$) уравнению (8) для $y > 0$

и уравнению (8′) для $y < 0$. На плоскости $y = 0$ требуем непрерывности функции $Q(y,t)$ и непрерывности потока плотности вероятности, т.е. непрерывности нормальных составляющих вектора (6). Кроме того эта функция удовлетворяет граничному условию (11).

Автор даёт решения, сформулированного таким образом граничного вопроса, в виде суммы потенциала одиночного слоя с неизвестной плотностью, разной для $y-0$ и для $y-0$, и интеграла Пуассона-Веерштрасса. Принимая во внимание граничные условия, сводим вопрос к решению системы двух слабо-сингулярных интегральных уравнений Вольтерры (Volterra), решением которых являются неизвестные плотности φ_1, φ_2 потенциала одиночного слоя. Согласно общей теории, решение этой системы можно представить в форме (25).

W. POGORZELSKI† (Warszawa)

ON A PROBLEM FROM THE THEORY OF STOCHASTIC PROCESSES

SUMMARY

The author considers problems concerning the analysis of a dynamic system incited by a random force $\xi(t)$ with a Gaussian distribution.

If the dynamic system in question is described by a system of equations (3), then the density of the distribution of probability $Q(Y, t)$ satisfies the Kolmogorov equation (4).

The author investigates a particular case of an electric system described by equation (7), in which the function $F(y, t) = m(t)/T - (y + A\operatorname{sgn} y)/T$ is discontinuous in the plane $y = 0$.

The problem consists in finding the density of the probability distribution $Q(y, t)$ satisfying, with $y \neq 0$, equations (8) for $y > 0$ and equation (8′) for $y < 0$. On the plane $y = 0$ we require the continuity of the function $Q(y, t)$ and the continuity of the stream of probability density, i.e. the continuity of the normal components of vector (6). Moreover, the function in question satisfies the initial condition (11).

The author seeks the solution of the boundary problem thus formulated in the form of the sum of the potential of a single layer with unknown density, different for $y > 0$ and for $y < 0$, and of the Poisson-Weierstrass integral. Then, using the boundary conditions, he reduces the problem to the solution of a system of two weakly-singular Volterra integral equations, their solution being the unknown densities φ_1, φ_2 of the potential of the single layer. This system, according to the general theory, has a solution in form (25).
