ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
VII (1963)

W. SZWARC (Wrocław)

ROZBICIE MACIERZY SYMETRYCZNEJ NA NAJMNIEJSZĄ ILOŚĆ MINORÓW GŁÓWNYCH O ELEMENTACH NIEUJEMNYCH

1. Wstęp. W naukach przyrodniczych często bada się indywidua ze względu na kilka cech naraz. Taki zespół kilku (lub więcej) cech nazywa J. Perkal [3] *zgodnym*(¹), jeśli każda para cech zespołu jest nieujemnie skorelowana. Metodą wskaźników przyrodniczych Perkala można opracowywać tylko zgodny zespół cech [3]. Niekiedy zespół badanych cech nie jest zgodny, ale wystarczy zmienić znaki przy poszczególnych cechach, aby otrzymać zespół zgodny. W innych przypadkach niezgodny zespół cech może się nie dać sprowadzić do zgodnego przez zmianę znaku poszczególnych cech (tzw. *istotnie niezgodny* zespół cech), ale można go rozbić na kilka (mniejszych) zgodnych zespołów. Niniejsza praca, odpowiadając na pytanie Perkala, podaje metodę rozbicia zespołu cech na najmniejszą liczbę zgodnych zespołów.

2. Sformułowanie zagadnienia. Zagadnienie J. Perkala da się sformalizować następująco: Dana jest symetryczna macierz $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, \ldots, n$, gdzie $a_{ii} \geqslant 0$ dla każdego i. Niech $\varepsilon_k = 1$ lub -1 dla $k = 1, \ldots, n$. Mnożąc wszystkie elementy k-tego wiersza, a następnie k-tej kolumny macierzy A przez ε_k, otrzymujemy macierz $\{b_{ij}\}$; $i, j = 1, \ldots, n$, gdzie $b_{ij} = \varepsilon_i \varepsilon_j a_{ij}$. Macierz ta jest nadal symetryczna.

Rozpatrzmy układ rozłącznych, tzn. nie mających wspólnych elementów, minorów głównych macierzy $\{b_{ij}\}$, taki że: 1° elementami każdego minora są liczby nieujemne, 2° każdy wiersz i każda kolumna macierzy zawiera co najmniej jeden element należący do jakiegoś minora tego układu. Układ taki określa podział zbioru $N = 1, 2, \ldots, n$ na rozłączne podzbiory. W podziale tym podzbiorem odpowiadającym danemu minorowi jest zbiór numerów linii, do których należą elementy tego minora.

Dla każdej macierzy $\{b_{ij}\}$ istnieje co najmniej jeden podział zbioru N

(¹) W pracy [4] terminem tym określono ogólniejszą własność, którą w dalszych pracach będziemy nazywali terminem *prawie zgodny*.

odpowiadający jej w wyżej opisanym sensie (podział ten nazwiemy podziałem na macierzy $\{b_{ij}\}$,) np. podział ma n jednoelementowych zbiorów odpowiadający układowi n jednoelementowych minorów głównych.

Z macierzy $\{a_{ij}\}$ można otrzymać 2^{n-1} różnych macierzy $\{b_{ij}\}$ (jedną z nich będzie również macierz $\{a_{ij}\}$ — por. [4]). Oznaczmy zbiór tych macierzy przez $\mathfrak{B}$.

Każdemu podziałowi na $\{b_{ij}\}$ odpowiada wartość (nazwiemy ją *wartością podziału* i oznaczymy symbolem K), która jest sumą elementów minorów należących do układu określającego dany podział. Wśród wszystkich podziałów na $\{b_{ij}\}$ istnieje co najmniej jeden podział złożony z najmniejszej liczby podzbiorów. Wśród podziałów na $\{b_{ij}\}$ o najmniejszej liczbie podzbiorów istnieje co najmniej jeden podział o największej wartości. Podział ten nazywamy *minimalnym podziałem* na $\{b_{ij}\}$. Celem niniejszej pracy jest wyznaczenie takiej macierzy $\{b_{ij}\}\in\mathfrak{B}$, że: 1° liczba podzbiorów minimalnego podziału na $\{b_{ij}\}$ nie jest większa od liczby podzbiorów minimalnego podziału na dowolnej innej macierzy zbioru $\mathfrak{B}$, 2° wartość spełniającego warunek 1° minimalnego podziału na $\{b_{ij}\}$ nie jest mniejsza od wartości równolicznego (o tej samej ilości podzbiorów) z nim minimalnego podziału na dowolnej innej macierzy zbioru $\mathfrak{B}$.

Ponieważ metoda rozwiązania niniejszego zagadnienia wykorzystuje wyniki zawarte w [4], zakładam, że czytelnik zapoznał się z tamtą pracą.

3. Definicje i twierdzenia. W tej pracy *grafem* nazywać będziemy niepusty zbiór węzłów i zbiór połączeń, przy czym każde połączenie łączy dokładnie dwa różne węzły i dla każdej pary węzłów istnieje najwyżej jedno połączenie. (Czytelnika zainteresowanego teorią grafów odsyłam do monografii D. Königa [1].)

Definiujemy teraz graf przyporządkowany macierzy $\{b_{ij}\}\in\mathfrak{B}$. Umawiamy się, że: 1° *węzłami* grafu są liczby $1, \ldots, n$ — numery wierszy i kolumn macierzy $\{b_{ij}\}$, 2° *połączenie* między węzłami p i q (p i q — końce połączenia) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $b_{pq} \geqslant 0$. Dwa połączenia są *rozłączne*, jeśli oba ich końce są różne.

Niech dana będzie macierz $B = \{b_{ij}\}\in\Gamma$. Umawiamy się, że kreska w wyrażeniu $\bar{B}$ (bądź $\{\bar{b}_{ij}\}$), oznacza operator przekształcający macierz $B = \{b_{ij}\}$ w macierz $\bar{B} = \{\bar{b}_{ij}\}$ tego samego stopnia $n\times n$, której elementy definiujemy przez

$$\bar{b}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli} \quad b_{ij} \geqslant 0, \\ -1, & \text{jeśli} \quad b_{ij} < 0. \end{cases}$$

Jeśli przez $G(B)$ i $G(\bar{B})$ oznaczymy grafy odpowiadające macierzom B i $\bar{B}$, to oba te grafy są identyczne (mają ten sam zbiór węzłów i połączeń).

Przez Γ oznaczymy zbiór grafów $G(B)$ (bądź $G(\bar{B})$), gdzie wskaźnik B przebiega zbiór $\mathfrak{B}$. Grafy — elementy zbioru Γ — mają ten sam zbiór węzłów, ale różne zbiory połączeń(2).

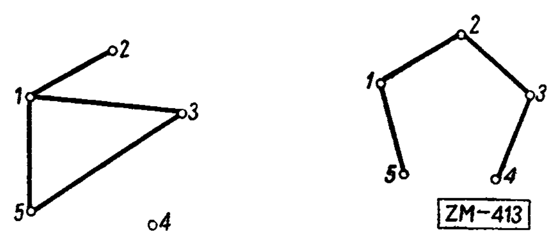
Graf H jest *podgrafem* grafu G (co piszemy w postaci $H \subset G$) jeśli: 1° $G \in \Gamma$, 2° zarówno zbiór węzłów, jak i zbiór połączeń grafu H są odpowiednio podzbiorami zbioru węzłów i zbioru połączeń grafu G. Podgraf H o zbiorze węzłów α oznaczać będziemy czasami przez H_α. Podgraf H_α grafu G jest *zupełny*, jeśli dla każdej pary węzłów zbioru α istnieje połączenie grafu G, łączące te węzły. Podgraf o jednym węźle uważamy również za zupełny.

Dwa podgrafy H_α i H_β grafu G są *rozłączne* jeśli: 1° zbiory α i β są rozłączne, 2° w grafie G nie ma połączenia łączącego węzeł zbioru α z węzłem zbioru β.

Węzły grafu wygodnie jest przedstawiać w postaci punktów na płaszczyźnie, a połączenia — w postaci odcinków łączących te punkty(3).

$$A = \begin{array}{|r|r|r|r|r|}\hline 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 3 & -1 & 4 & -2 & 1 \\ \hline -1 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ \hline 2 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \bar{A} = \begin{array}{|r|r|r|r|r|}\hline 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

(a) (b)



(c) (d)

Rys. 1

Rysunek 1(c) przedstawia graf $G(A)$ (bądź $G(\bar{A})$).

Przypuśćmy, że używając oznaczeń z pracy [3], dokonaliśmy na macierzy A operacji (3), to znaczy, że $\varepsilon_3 = -1$, a pozostałe liczby ε_i są równe 1 ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1$)(4). Ogólnie: *Operacja* α oznacza, że $\varepsilon_l = -1$ dla $l \in \alpha$ i $\varepsilon_l = 1$ dla $l \in N - \alpha$. Jak widać z rysunku 1(d), po do-

(2) Liczność zarówno zbioru $\mathfrak{B}$ jak i zbioru Γ jest 2^{n-1}.

(3) Na ogół rozmieszczamy węzły tak, by były wierzchołkami wypukłego n-boku, a następnie przeprowadzamy połączenia.

(4) W pracy [4] zarówno symbol A jak i A_α oznaczał półmacierz. Nie będzie to prowadziło do nieporozumień ze względu na oczywistą odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną między macierzą a jej półmacierzą.

konaniu na A operacji (3) znikły wszystkie połączenia wychodzące z węzła 3 na rysunku 1(c), a jednocześnie pojawiły się wszystkie możliwe połączenia biegnące do węzła 3, których nie ma na rysunku 1(c). Operacji α będziemy dokonywać bądź na macierzy A, (lub na półmacierzy macierzy A), bądź wprost na grafie $G(A)$ (lub na grafie $G(\bar{A})$).

W pierwszym przypadku oznaczymy otrzymaną macierz symbolem $A_{\alpha}^{(2)}$. Na rysunku 1(c) występują następujące podgrafy zupełne: $H_{(1,3,5)}$, $H_{(1,3)}$, $H_{(1,5)}$, $H_{(3,5)}$, $H_{(1,2)}$, $H_{(1)}$, $H_{(2)}$, $H_{(3)}$, $H_{(4)}$ i $H_{(5)}$.

Niech H_{α} będzie zupełnym podgrafem grafu G. Dokonajmy na grafie G operacji α otrzymując graf G^1. Łatwo zauważyć, że H_{α} jest podgrafem zupełnym grafu G^1.

Niech będzie dany zbiór węzłów $\alpha \subset N$. Mówimy, że α jest *zgodnym zbiorem węzłów*, jeśli istnieje graf $G \in \Gamma$, taki że jego podgraf H_{α} jest zupełny. W przeciwnym razie nazwiemy α *niezgodnym zbiorem węzłów*. Zachodzi następujące

TWIERDZENIE. *Zbiór α jest zgodnym zbiorem węzłów wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego grafu należącego do zbioru Γ, jego podgraf H_{α} jest bądź zupełny, bądź składa się z dwóch rozłącznych i zupełnych podgrafów tego grafu.*

Dowód. Wykażemy konieczność warunku. Ponieważ α, jak wynika z założenia, jest zbiorem zgodnym, istnieje graf $G \in \Gamma$, taki że H_{α} jest zupełnym podgrafem tego grafu. Rozpatrzmy dowolny element G^* zbioru Γ. Jest oczywiste, że dla każdego grafu $G \in \Gamma$ istnieje operacja przekształcająca graf G w graf G^*(5). Niech to będzie operacja β.

Jeśli $\alpha \wedge \beta = 0$, to podgraf $H_{\alpha} \subset G$ po dokonaniu operacji β na grafie G pozostanie bez zmiany, a więc będzie zupełnym podgrafem grafu G^*.

Jeśli $\alpha \wedge \beta = \beta_1 \neq 0$, to po dokonaniu na G operacji β powstały graf G^* zawierać będzie dwa rozłączne podgrafy zupełne $H_{\beta_1}^*$ i $H_{\alpha-\beta_1}^*$.

Aby wykazać dostateczność warunku, wystarczy ograniczyć się do przypadku, gdy H_{α} jest sumą dwóch rozłącznych i zupełnych podgrafów grafu $G \in \Gamma$. Niech to będą podgrafy H_{α_1} i H_{α_2}. Wykażemy, że dokonując operacji α_1 na grafie G, otrzymuje się nowy graf $G' \in \Gamma$, taki, że podgraf H_{α}' grafu G jest zupełny.

Po dokonaniu na grafie G operacji α_1 graf H_{α_2} nie ulegnie zmianie, bo wszystkie połączenia tego grafu (i zbiór węzłów) zostaną zachowane. Zmiany nastąpią jedynie w połączeniach łączących zbiór α_2 ze zbiorem $N-\alpha_2$. Połączenia grafu H_{α_1} (a więc i graf H_{α_1}) również pozostaną nie zmienione, co wynika z zupełności grafu H_{α_1}. Powstanie natomiast zbiór

(5) Zawsze istnieją dwie takie operacje — Jeśli bowiem operacja Γ przekształca graf G w graf G^* to operacja $N-\pi$ przekształca również graf G w graf G^* (por. [4]).

poprzednio nie występujących połączeń. Zbiór ten zawiera połączenia łączące każdy węzeł zbioru a_1 z każdym węzłem zbioru a_2. Wobec tego podgraf $H'_a \subset G'$ jest zupełny. Twierdzenie zostało więc udowodnione.

Z powyższego twierdzenia wynikają następujące wnioski:

1. Jeśli podgraf H_a pewnego grafu $G \epsilon \Gamma$ ani nie jest zupełny, ani nie składa się z dwóch rozłącznych i zupełnych podgrafów grafu G, to a jest niezgodnym zbiorem węzłów.

2. Jeśli H_{a_1} i H_{a_2} są dwoma zupełnymi i rozłącznymi podgrafami grafu G, to każdy właściwy nadzbiór zbioru a_1+a_2 (a_1+a_2 jest zgodnym zbiorem węzłów) jest niezgodnym zbiorem węzłów.

3. Zbiór N jest zgodnym zbiorem węzłów wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny graf $G \epsilon \Gamma$ jest bądź zupełny, bądź składa się z dwóch zupełnych i rozłącznych podgrafów([6]).

4. Postępowanie. Zagadnienie postawione w rozdziale 1 i 2 sprowadza się głównie do rozbicia zbioru węzłów N na najmniejszą ilość zbiorów zgodnych. Metoda rozwiązania, która opiera się na twierdzeniu i wnioskach z rozdziału 2, składa się z trzech kroków.

Krok I. Wyznaczenie w zbiorze Γ grafu o możliwie małej ilości połączeń (daje to ułatwienia w postępowaniu opisanym w kroku II).

Uwaga. Krok I nie jest konieczny, można zacząć postępowanie od kroku II.

Krok II. Rozbicie zbioru węzłów N na najmniejszą ilość zbiorów zgodnych. (Niech to będzie układ s zbiorów zgodnych $a^1, a^2, \ldots, a^s$.)

Krok III. Znalezienie operacji γ (a więc liczb $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$), jakiej należy dokonać na grafie $G(A)$, aby otrzymać graf $G(B)$, taki że H_{a^1}, $H_{a^2}, \ldots, H_{a^s}$ są jego podgrafami zupełnymi.

Rozwiązaniem zagadnienia będzie więc układ $a^1, \ldots, a^s$ oraz operacja γ (a więc liczby $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$) przekształcająca macierz $\{a_{ij}\}$ w macierz $\{b_{ij}\}$.

Opis kroku I. Rozpatrzmy macierz $\{a_{ij}\}$. Mnożąc wszystkie elementy k-tego wiersza i k-tej kolumny macierzy $\{a_{ij}\}$ przez ε_k ($\varepsilon_k = 1$ lub -1) otrzymamy macierz $\{\overline{b}'_{ij}\}$, gdzie $\overline{b}'_{ij} = \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j a_{ij}$. Szukamy takich $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, które minimizują wyrażenie $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{b}'_{ij}$.

Zagadnienie to można rozwiązać stosując postępowanie analogiczne do postępowania z pracy [4]. (Różnica polega jedynie na tym, że dokonujemy każdorazowo operacji o najmniejszym W. Postępowanie kończy się, gdy najmniejsze W jest nieujemne.) Praktycznie wystarczy

([6]) Wniosek ten jest odpowiedzią na pytanie F. Szczotki, jakie warunki ma spełnić macierz $\{a_{ij}\}$, aby istniała macierz $\{b_{ij}\} \epsilon \mathfrak{B}$ o wszystkich elementach nieujemnych.

jednak ograniczyć się do przybliżonego rozwiązania tego zagadnienia, dokonując na macierzy $\{a_{ij}\}$ kolejnych operacji jednoelementowych dopóty, dopóki żadna operacja jednoelementowa na powstałej macierzy nie zmniejszy sumy elementów tej macierzy. Wówczas dla każdej operacji jednoelementowej na tej macierzy jest $W \geqslant 0$, czyli wyrażenie $0-\frac{1}{2}S_i$ jest nieujemne dla każdego $i = 1, \ldots, n$, co jest równoważne nieujemności wszystkich liczb S_i.

Oznaczmy przez a operację (jest to iloczyn wszystkich dokonanych operacji jednoelementowych), która przekształciła macierz $\{\bar{a}_{ij}\}$ w macierz $\{b'_{ij}\} = \bar{B}'$.

Uwaga. Krok I można pominąć, jeśli przeważającą ilość elementów macierzy A stanowią liczby ujemne. Odpada wówczas potrzeba posługiwania się macierzą $\bar{A}$. Wówczas rozpoczynamy postępowanie od kroku II, przy czym macierz $B' = A$, a a jest operacją zerową.

Opis kroku II. Wyznaczamy wszystkie zgodne podgrafy grafu $G(B')$ identycznego z grafem $G(\bar{B}')$. Korzystając z faktu, że węzły każdych dwóch rozłącznych i zupełnych podgrafów grafu $G(B')$ tworzą zbiór zgodny, rozbijamy zbiór N na wszystkie możliwe układy zbiorów zgodnych. Następnie wybieramy układ o najmniejszej ilości zbiorów zgodnych. Niech to będzie układ s zbiorów zgodnych $a^1, a^2, \ldots, a^s$ (są one, jak wiadomo, rozłączne, natomiast podgrafy $H_{a^1}, H_{a^2}, \ldots, H_{a^s}$ grafu $G(B')$ nie muszą być rozłączne).

Jeśli kilka układów składa się z s zbiorów zgodnych, za optymalny uważamy ten spośród nich, dla którego wyrażenie

$$L = \sum_{t=1}^{s} \sum_{i \epsilon a^t} \sum_{j \epsilon a^t} b'_{ij} = \sum_{t=1}^{s} \sum_{j \epsilon a^t} \sum_{j \epsilon a^t} |a_{ij}|$$

jest największe. Układ ten będzie naszym rozwiązaniem.

Uwaga. Wygodniej było posłużyć się zamiast K wyrażeniem L. Między K i L bowiem dla tego samego podziału na macierzy $\{b_{ij}\} \epsilon \mathfrak{B}$ zachodzi relacja $K = 2L + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$, gdzie drugi składnik jest stale równy $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, niezależnie od macierzy zbioru $\mathfrak{B}$.

Opis kroku III. W kroku tym skorzystamy z wniosku, który łatwo wynika z rozdziału 3. Jeśli F_{a_1} i F_{a_2} są dwoma rozłącznymi i zupełnymi podgrafami grafu G, to dokonując na G operacji a_1 (lub a_2) otrzymamy graf G' (lub G''), taki że $F'_{a_1+a_2}$ jest zupełnym podgrafem grafu G' (lub grafu G''). Jak wiadomo (patrz twierdzenie z rozdziału 3), każdy z grafów $H_{a^1}, H_{a^2}, \ldots, H_{a^s}$ jest bądź zupełnym podgrafem grafu $G(B')$, bądź składa się z dwóch rozłącznych podgrafów zupełnych tego grafu. Niech ω będzie zbiorem tych v $(1 \leqslant v \leqslant s)$, dla których graf H_a^v składa się z dwóch rozłącznych podgrafów zupełnych $H_{a_1}^v$, $H_{a_2}^v$ grafu $G(B')$.

Dokonując na $G(B')$ dowolnej operacji postaci $\prod_{v\in\omega}(a_u^v)$, gdzie $u = 1$ lub $u = 2$, otrzymamy graf, w którym dla każdego $t = 1, 2, \ldots, s$ graf o zbiorze węzłów α^t jest podgrafem zupełnym otrzymanego grafu([7]). Niech to będzie operacja β. Oznaczmy przez $G(B)$ graf, który powstał z $G(B')$ przez dokonanie na $G(B')$ operacji β. Wówczas operacja $\alpha\cdot\beta = \gamma$ przekształca graf $G(A)$ w graf $G(B)$ (albo macierz A w macierz B).

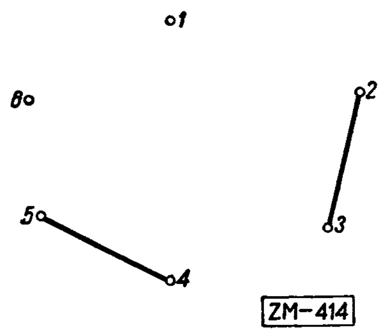
Operacja γ określa szukane liczby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$.

5. Przykłady.

1. Rozpatrzmy macierz korelacji $A = \{a_{ij}\}$ między sześcioma wskaźnikami przyrodniczymi (materiał zaczerpnąłem z pracy [2]). Zamiast macierzy A wypisana jest na rysunku (2a) półmacierz tej macierzy (patrz [4]).

−0,11				
−0,18	0,06			
−0,23	−0,30	−0,25		
−0,29	−0,31	−0,33	0,14	
−0,13	−0,15	−0,19	−0,31	−0,22

(a)



(b)

Rys. 2

W tym przypadku nie ma potrzeby stosowania kroku pierwszego, ponieważ graf $G(A)$ ma tylko dwa połączenia. Zgodnie z krokiem drugim wyznaczamy układy zbiorów węzłów zgodnych. Mamy tu następujące układy o najmniejszej (wynoszącej 2) liczbie zbiorów: $[(1,2,3),(4,5,6)]$, $[(1,4,5),(2,3,6)]$ i $[(1,6),(2,3,4,5)]$. Naszym rozwiązaniem będzie układ $[(1,6),(2,3,4,5)]$, ponieważ L dla tego układu jest największe i wynosi $[0{,}13+(0{,}06+0{,}30+0{,}31+0{,}25+0{,}33+0{,}14)] = 1{,}52$. Stosując krok III stwierdzamy, że operacja $\beta = (1)(2,3) = (1,2,3)$([8]) przekształca graf $G(A)$ tak, że podgrafy o zbiorach węzłów $(1,6)$ i $(2,3,4,5)$ są zupełnymi podgrafami powstałego grafu. Ponieważ α jest operacją zerową, $\gamma = \alpha\cdot\beta = \beta = (1,2,3)$. Wskutek tego $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$ i $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 1$

2. Na rysunku 3(a) występuje półmacierz macierzy znaków współczynników korelacji między 12 cechami psychologicznymi i fizjologicz-

([7]) Liczba różnych operacji jest 2^v, ale liczba różnych grafów, które mogą powstać z grafu $G(B')$, jest mniejsza niż 2^v.

([8]) Również operacje (6) (2, 3), (6) (5, 4) i (1) (5, 4) mają tę samą własność.

nymi chorych na histerię (przykład zaczerpnięty z pracy [3]). Nie znając wartości współczynników korelacji, rozpatrujemy macierz powstałą w następujący sposób: zastępujemy w macierzy znaków współczynników korelacji znaki + przez 1, a znaki − przez −1. Otrzymana macierz, nazwijmy ją $\{\bar{a}_{ij}\}$, jest symetryczna i jej półmacierz występuje na rysunku 3(b).

Przystępujemy do kroku I. W tym celu obliczamy i wypisujemy pod półmacierzą macierzy $\{\bar{a}_{ij}\}$ sumy S_i odpowiednich linii. Mamy $S_1 = 1$, $S_2 = -1$, $S_3 = 1$, $S_4 = -1$, $S_5 = 1$, $S_6 = 3$, $S_7 = 1$, $S_8 = -1$, $S_9 = -1$,

+										
−	−									
−	−	+								
−	−	+	+							
+	+	+	+	+						
+	+	−	−	+	−					
−	−	+	+	+	−	−				
−	−	+	+	+	−	+	+			
+	+	−	−	−	−	+	−	−		
+	+	−	−	−	+	+	−	−	+	
+	−	+	−	−	+	−	+	−	+	+

(a)

$\{\bar{a}_{ij}\} =$

1										
−1	−1									
−1	−1	1								
−1	−1	1	1							
1	1	1	1	1						
1	1	−1	−1	1	−1					
−1	−1	1	1	1	−1	−1				
−1	−1	1	1	1	−1	1	1			
1	1	−1	−1	−1	−1	1	−1	−1		
1	1	−1	−1	−1	1	1	−1	−1	1	
1	−1	1	−1	−1	1	−1	1	−1	1	1

1 −1 1 −1 1 3 1 −1 −1 −1 1 1

(b)

ZM−415

Rys. 3

$S_{10} = -1$, $S_{11} = 1$, $S_{12} = 1$. (W praktyce wypisujemy tylko dodatnie S_i — występują one w liniach, gdzie jest co najmniej sześć liczb +1.)

Operacją rzędu pierwszego o najmniejszym W jest operacja (6), dla której $W = 0-\frac{1}{3}\cdot 3 = -\frac{3}{2}$ (innymi słowy, wybieramy linię, gdzie „przewaga" liczb 1 nad liczbami -1 jest największa). Po dokonaniu na $\bar{A}$ operacji (6) otrzymujemy następującą półmacierz:

1										
−1	−1									
−1	−1	1								
−1	−1	1	1							
−1	−1	−1	−1	−1						
1	1	−1	−1	1	1					
−1	−1	1	1	1	1	−1				
−1	−1	1	1	1	1	1	1			
1	1	−1	−1	−1	1	1	−1	−1		
1	1	−1	−1	−1	−1	1	−1	−1	1	
1	−1	1	−1	−1	−1	−1	1	−1	1	1
						3	1	1	1	

Po dokonaniu kolejnych jednoelementowych operacji (7), (8), (10) i (3) otrzymujemy następującą półmacierz:

$\{\bar{b}'_{ij}\} =$

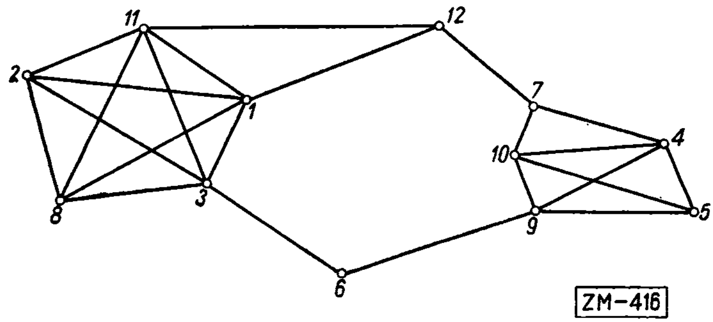
1											
1	1										
−1	−1	−1									
−1	−1	−1	1								
−1	−1	1	−1	−1							
−1	−1	−1	1	−1	−1						
1	1	1	−1	−1	−1	−1					
−1	−1	−1	1	1	1	−1	−1				
−1	−1	−1	1	1	−1	1	−1	1			
1	1	1	−1	−1	−1	−1	1	−1	−1		
1	−1	−1	−1	−1	−1	1	−1	−1	−1	1	
−1	−3	−1	−3	−5	−7	−5	−3	−3	−3	−1	−5

Postępowanie kończy się, ponieważ wszystkie S_i są ujemne. Budujemy teraz graf $G(B')$([9]); patrz rysunek 4.

Z rysunku 4 widać, że jedynym rozwiązaniem jest układ $[(6, 7, 12), (4, 5, 9, 10, 13, 8, 2, 11)]$. Dokonując na grafie $G(\bar{B}')$ operacji $\beta =$

([9]) Najpierw skonstruowano graf tak, by jego węzły były wierzchołkami wypukłego n-boku. Następnie, dla przejrzystości, rozmieszczono węzły grafu tak, żeby było możliwie mało przecinających się połączeń.

$= (6, 4, 5, 9, 10)$ otrzymujemy graf $G(\bar{B})$, w którym $H_{(6,7,12)}$ i $H_{(1,2,3,4,5,8,9,10,11)}$ są zupełnymi podgrafami grafu $G(\bar{B})$. Ponieważ operacja $\alpha = (6, 7, 8, 10, 3)$,



Rys. 4

przeto operacja

$$\gamma = (3, 6, 7, 8, 10)(4, 5, 6, 9, 10) = (3, 4, 5, 7, 8, 9).$$

Wobec tego

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_7 = \varepsilon_8 = \varepsilon_9 = -1 \text{ i } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_6 = \varepsilon_{10} = \varepsilon_{11} = \varepsilon_{12} = 1.$$

Prace cytowane

[1] D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig 1936.

[2] J. Perkal, *On the analysis of a set of characteristics*, Zastosow. Mat. 5 (1960), str. 35-45.

[3] — *O wektorach zespołu cech*, w przygotowaniu do druku.

[4] W. Szwarc, *O pewnym macierzowym zagadnieniu Perkala*, Zastosow. Mat. 5 (1960), str. 289-297.

KATEDRA MATEMATYKI POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Praca wpłynęła 13. 3. 1962

В. ШВАРЦ (Вроцлав)

РАЗБИЕНИЕ СИММЕТРИЧНОЙ МАТРИЦЫ НА НАИМЕНЬШЕЕ КОЛИЧЕСТВО ГЛАВНЫХ МИНОРОВ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе дается решение следующей проблемы, поставленной Ю. Перкалем. Дана симметричная матрица $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, \ldots, n$ при $a_{ij} \geqslant 0$ для всякого i. Пусть $\varepsilon_k = 1$ или -1 для $k = 1, \ldots, n$. Умножая все элементы k-той строки, а затем k-той колонки матрицы A на ε_k получим матрицу $\{b_{ij}\}$ при

$b_{ij} = \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \cdot a_{ij}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — множество матриц $\{b_{ij}\}$, которое можно получить из матриц $\{a_{ij}\}$.

Всякую матрицу $\{b_{ij}\} \in \mathfrak{B}$ можно разбить на раздельные главные миноры, состоящие лишь из неотрицательных элементов. Назовем *минимальным разбиением* разбиение матрицы $\{b_{ij}\}$ на наименьшее количество главных миноров с неотрицательными элементами.

Требуется определить числа $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ такие, чтобы количество миноров минимального разбиения матрицы $\{b_{ij}\}$ не превысило количества миноров минимального разбиения произвольной другой матрицы множества $\mathfrak{B}$. Решением будет как матрица $\{b_{ij}\}$, определенная числами $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, так и минимальное разбиение этой матрицы. В случае, когда существует больше одного минимального разбиения матрицы множества $\mathfrak{B}$ с тем же минимальным количеством миноров, в качестве решения (оптимальное решение) принимаем разбиение (и связанную с этим разбиением матрицу), сумма элементов миноров которого наибольшая.

Метод решения этого вопроса использует теорию графов. *Графом* называем здесь непустое множество узлов и множество соединений, причем каждое соединение соединяет точно два разные узлы и для всякой пары узлов существует, по большей мере, одно соединение.

Граф, соответствующий матрице $\{b_{ij}\} \in \mathfrak{B}$ определяем следующим образом: а) узлами графа являются числа $1, \ldots, n$ — номера строк и колонок матрицы $\{b_{ij}\}$ и б) соединение между узлами p и q существует тогда, когда $b_{pq} \geqslant 0$. Γ обозначает множество графов, соответствующих матрицам из множества $\mathfrak{B}$. Граф H является подграфом графа G, если а) $G \in \Gamma$, б) как множество узлов, так и множество соединений графа H являются соответственно подмножествами множества узлов и множества соединений графа G. Подграф H_α (α — множество узлов графа H) графа G является полным, если для всякой пары узлов, принадлежащих к α, существует соединение графа G, соединяющее эти узлы. Два подграфа H_α и H_β графа G раздельны, если в графе G нет соединении, соединяющих узел множества α с узлом множества β. Множество α является согласным множеством узлов, если существует граф $G \in \Gamma$ такой, что его подграф H_α полный. В работе (глава 3) доказана следующая

Теорема. *Множество α является согласным множеством узлов тогда и только тогда, когда для произвольного графа, принадлежащего к множеству Γ, его подграф H_α или согласен, или состоит из двух раздельных и полных подграфов этого графа.*

Метод решения (глава 4), использующий теорему и выводы главы 3, заключается в трех шагах.

Шаг I. Определение в множестве Γ графа с возможно малым количеством соединений (шаг I облегчает выполнение шага II).

Шаг II. Разбиение множества узлов $1, \ldots, n$ на наименьшее количество согласных множеств (пусть это будет система s согласных множеств $\alpha^1, \ldots, \alpha^s$).

Шаг III. Нахождение чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ таких, что граф соответствующий определенной этими числами матрице $\{b_{ij}\}$, содержит $H_{\alpha^1}, \ldots, H_{\alpha^s}$ как полные подграфы.

Решением будут поэтому числа $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ и система $\alpha^1, \ldots, \alpha^s$, причем α^p ($1 < p < s$) является множеством номеров линий (строк и колонок) p-того главного минора с неотрецательными элементами, принадлежащего к оптимальному разбиению матрицы $\{b_{ij}\}$, определенной числами $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$.

Метод решения иллюстрируется двумя примерами.

W. SZWARC (Wrocław)

DIVISION OF A SYMMETRIC MATRIX INTO THE LEAST NUMBER OF MAIN MINORS WITH NON-NEGATIVE ELEMENTS

SUMMARY

The present paper gives a solution of the following problem, posed by J. Perkal. Given: a symmetric matrix $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, \ldots, n$, where $a_{ij} > 0$ for every i. Let $\varepsilon_k = 1$ or -1 for $k = 1, \ldots, n$. Multiplying all the elements of the k-th row and then of the k-th column of matrix A by ε_k, we obtain a matrix $\{b_{ij}\}$, where $b_{ij} = \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \cdot a_{ij}$. Let $\mathfrak{B}$ be the set of matrices $\{b_{ij}\}$ which can be obtained from the matrix $\{a_{ij}\}$.

Every matrix $\{b_{ij}\} \in \mathfrak{B}$ can be divided into disjoint main minors with all elements non-negative. The division of a matrix $\{b_{ij}\}$ into the least number of main minors with non-negative elements will be called the *minimal division*.

We are to determine numbers $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ for which the number of minors of the minimal division of the matrix $\{b_{ij}\}$ is not greater than the number of minors of the minimal division of any other matrix of the set $\mathfrak{B}$. The solution will be the matrix $\{b_{ij}\}$ determined by the numbers $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ and its minimal division. In the case where there exist more than one minimal divisions of a matrix of the set $\mathfrak{B}$ with the same least number of minors, we adopt as the solution (the optimal division) that division (and the matrix connected with it) for which the sum of the elements of its minors is greatest.

The method of solving this problem uses the theory of graphs. We use the term *graph* for a non-empty set of nodes and a set of arcs, each arc joining exactly two different nodes and there being at most one arc for each pair of nodes.

A graph associated with a matrix $\{b_{ij}\} \in \mathfrak{B}$ is defined as follows: a) the nodes of the graph are numbers $1, \ldots, n$ — assigned to rows and columns of the matrix $\{b_{ij}\}$ and b) the arc between nodes p and q exists if and only if $b_{pq} \geqslant 0$. By Γ we denote the set of graphs associated with the matrices of the set $\mathfrak{B}$. Graph H is a subgraph of graph G if a) $G \in \Gamma$, b) both the set of nodes and the set of arcs of graph H are subsets of the set of nodes and the set of arcs of graph G, respectively.

A subgraph H_α (α — the set of nodes of graph H) of graph G is complete if for each pair of nodes belonging to α there exists an arc of graph G joining those nodes. Two subgraphs, H_α and H_β, of graph G are disjoint if in graph G there is no arc joining a node of set α with a node of set β. The set α is a consistent set of nodes if there exists a graph $G \in \Gamma$ such that its subgraph H_α is complete. The paper (Chapter 3) gives the proof of the following:

THEOREM. *The set α is a consistent set of nodes if and only if for an arbitrary graph belonging to the set Γ its subgraph H_α either is consistent or consists of two disjoint and complete subgraphs of that graph.*

The method of solution (Chapter 4), which uses the theorem and conclusions from Chapter 3, consists of three steps.

Step I. Determination in set Γ of a graph with a possibly small number of arcs (step I facilitates the procedure in step II).

Step II. Division of the set of nodes $(1, \ldots, n)$ into the least number of consistent sets (let it be a system s of consistent sets $\alpha^1, \ldots, \alpha^s$).

Step III. Finding numbers $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ such that the graph associated with the matrix $\{b_{ij}\}$ determined by those numbers contains $H_{\alpha^1}, \ldots, H_{\alpha^s}$ as complete subgraphs.

Thus the solution will be given by the numbers $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ and the system $\alpha^1, \ldots, \alpha^s$ where α^p $(1 \leqslant p \leqslant s)$ is the set of numbers assigned to the lines, rows and columns of the p-th main minor with non-negative elements belonging to the optimal division of the matrix $\{b_{ij}\}$ determined by the numbers $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$.

The method of solution is illustrated by two examples.