Ł. BÖTTCHER.

ITERACYE FUNKCYI LINIOWEJ.[1]

7. Trzecia postać wzoru głównego—udział funkcyj trygonometrycznych.

§ 13. W niniejszym rozdziale zbadamy iteracye funkcyi algebraicznej, wymiernej, ułamkowej, liniowej o spółczynnikach rzeczywistych, mającej urojone sprzężone miejsca niezmienne. Rzecz się upraszcza o tyle, że warunek $\left(\frac{A-B}{2}\right)^2+BC<0$, $\left(\frac{A+D}{2}\right)^2-(AD-BC)<0$, ogranicza rzecz do dwóch jednoczesnych warunków: $AD-BC>0$, $B<0$, z wyłączeniem ewentualności $B=0$, lub $C=0$. Połóżmy:

$$\frac{Cr_1+D}{Cr_2+D}=\frac{\frac{A+D}{2}+i\sqrt{(AD-BC)-\left(\frac{A+D}{2}\right)^2}}{\frac{A+D}{2}-i\sqrt{(AD-BC)-\left(\frac{A+D}{2}\right)^2}}=\cos 2q+i\sin 2q,$$

przyczem:

$$\cos q=\frac{\frac{A+D}{2}}{\sqrt{AD-BC}},\quad \sin q=+\sqrt{\frac{(AD-BC)-\left(\frac{A+D}{2}\right)^2}{AD-BC}}$$

---

[1]) Ciąg dalszy i dokończenie. Patrz „Wiad. Matem.“ 8, str. 291–301.

Kąt q przyjmujemy w granicach od 0^0 do 90^0, gdy $\frac{A+D}{2} > 0$, natomiast w granicach od 90^0 do 180^0, gdy $\frac{A+D}{2} < 0$, a więc zawsze dodatni. Wobec tego wzór główny:

$$f_n(z) = \frac{\left(\frac{r_1-r_2}{2} \cdot \frac{\left(\frac{Cr_1+D}{Cr_2+D}\right)^n + 1}{\left(\frac{Cr_1+D}{Cr_2+D}\right)^n - 1} + \frac{r_1+r_2}{2}\right) z - r_1 r_2}{\left(\frac{r_1-r_2}{2} \frac{\left(\frac{Cr_1+D}{Cr_2+D}\right)^n + 1}{\left(\frac{Cr_1+D}{Cr_2+D}\right)^n - 1} - \frac{r_1+r_2}{2}\right) + z},$$

przyjmuje postać:

$$f_n(z) = \frac{\left(\frac{r_1-r_2}{2i} \operatorname{cotg} nq + \frac{r_1+r_2}{2}\right) z - r_1 r_2}{z + \left(\frac{r_1-r_2}{2} \operatorname{cotg} nq - \frac{r_1+r_2}{2}\right)}.$$

Połóżmy:

$$\frac{r_1-r_2}{2i} = \varrho \sin p; \quad \frac{r_1+r_2}{2i} = \varrho \cos p; \quad \varrho = \sqrt{-\frac{B}{C}}.$$

Kąt p przyjmujemy w granicach od 0^0 do 90^0, gdy $\frac{A-D}{2} > 0$, natomiast w granicach od 90^0 do 180^0, gdy $\frac{A-D}{2} < 0$.

Podstawiając to we wzór główny, otrzymamy, po łatwych przeróbkach, wzór:

$$\frac{f_n(z)}{\varrho} = \frac{z \sin(p+nq) + \varrho \sin nq}{z \sin nq + \varrho \sin(p-nq)}.$$

Na podstawie tego mamy odrazu rezultat ogólny:

T w i e r d z e n i e: F u n k c y a a l g e b r a i c z n a, w y m i e r n a, u ł a m k o w a, l i n i o w a: $f(z) = \frac{Az-B}{Cz+D}$, c z y n i ą c a z a-

dość warunkom: $\left(\frac{A-D}{2}\right)^2 - BC < 0$, $C > 0$, B oczywiście > 0, $AD + BC$ oczywiście > 0, B i D liczby dowolne, iteruje się na mocy wzoru:

$$\frac{f_n(z)}{\varrho} = \frac{z \sin(p+nq) + \varrho \sin nq}{z \sin nq + \varrho \sin(p-nq)}, \text{ gdy } p > nq,$$

$$\frac{f_n(z)}{\varrho} = \frac{z \sin(nq+p) + \varrho \sin nq}{z \sin nq - \varrho \sin(nq-p)}, \text{ gdy } p < nq, \ \varrho = +\sqrt{\frac{B}{C}},$$

$$\cos q = \frac{\frac{A+D}{2}}{\sqrt{AD+BC}}, \ \sin q = +\sqrt{\frac{(AD+BC) - \left(\frac{A+D}{2}\right)^2}{AD+BC}},$$

przyczem pamiętać należy, że $0^0 < q < 90^0$, gdy $A + D > 0$, zaś $90^0 < q < 180^0$, gdy $A + D < 0$.

$$\sin p = \frac{\sqrt{BC - \left(\frac{A-D}{2}\right)^2}}{\varrho}, \quad \cos p = \frac{\frac{A-D}{2}}{\varrho};$$

tu znowu $0^0 < p < 90^0$, gdy $A - D > 0$, zaś $90^0 < p < 180^0$ gdy $A - D < 0$.

8. Zastosowanie twierdzenia Hoppego do przypadku, gdy oba miejsca niezmienne zlewają się.

§ 14. Według twierdzenia Hoppego n^{ta} iteracya danej funkcyi liniowej, ułamkowej da się przedstawić w postaci:

$$f_n(z) = \frac{(R_n + a)z + B}{Cz + (R_n - a)}, \quad R_{n+1} = \frac{R_1 R_n + (BC + a^2)}{R_1 + R_n}.$$

Obecnie przychodzimy do przypadku, gdy $BC + a^2 = 0$, t.j. gdy miejsca niezmienne zlewają się. W tym przypadku, nasza funkcya liniowa określa podstawienie paraboliczne. Wzór na R_{n+1} daje:

$$R_{n+1} = \frac{R_1 R_n}{R_1 + R_n},$$

a więc:

$$\frac{1}{R_{n+1}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_n},$$

stąd wynika:

$$\frac{1}{R_n} = \frac{n}{R_1},$$

czyli

$$R_n = \frac{R_1}{n}.$$

Wiemy jednak, że $R_1 = \frac{A+D}{2}$, a zatem $R_n = \frac{A+D}{2n}$.

T w i e r d z e n i e. Funkcya algebraiczna, wymierna, ułamkowa, liniowa $f(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$ iteruje się na mocy wzoru:

$$f_n(z) = \frac{(R_n + a)z + B}{Cz + (R_n - a)},$$

przyczem $a = \frac{A-D}{2}$, a w razie $a^2 + BC$ równego zeru, mamy $R_n = \frac{A+D}{2n}$. A zatem:

$$f_n(z) = \frac{\left(\frac{A+D}{2n} + \frac{A-D}{2}\right)z + B}{Cz + \left(\frac{A+D}{2n} - \frac{A-D}{2}\right)}.$$

9. Rachunek iteracyj funkcyi ułamkowej liniowej za pomocą wzorów zwrotnych.

§ 15. Napiszmy ogólnie:

$$f_n(z) = \frac{A_n z + B_n}{C_n z + D_n},$$

i znajdźmy związek, jaki zachodzi pomiędzy A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}, a A_n, B_n, C_n, D_n. W tym celu wykonajmy podstawienie:

$$f_{n+1}(z) = f_n(z_1) = \frac{A_n z_1 + B_n}{C_n z_1 + D_n} = \frac{A_n \dfrac{Az+B}{Cz+D} + B_n}{C_n \dfrac{Az+B}{Cz+D} + D_n}$$

$$= \frac{(AA_n + CB_n)\,z + (BA_n + DB_n)}{(AC_n + CD_n)\,z + (BC_n + DD_n)}.$$

Stąd wynika:

$$A_{n+1} = AA_n + CB_n; \quad B_{n+1} = BA_n + DB_n,$$
$$C_{n+1} = AC_n + CD_n; \quad D_{n+1} = BC_n + DD_n,$$

i zarazem prawidło: Aby obliczyć n-tą iteracyę funkcy $f(z) = \dfrac{Az+B}{Cz+D}$ w postaci $f_n(z) = \dfrac{A_n z + B_n}{C_n z + D_n}$ musimy przeprowadzić rachunek za pomocą wzorów zwrotnych postaci:

$$\begin{aligned}
A_1 &= A, & B_1 &= B,\\
A_2 &= AA_1 + CB_1, & B_2 &= BA_1 + DB_1,\\
A_3 &= AA_2 + CB_2, & B_3 &= BA_2 + DB_2,\\
A_4 &= AA_3 + CB_3, & B_4 &= BA_3 + DB_3,\\
A_5 &= AA_4 + CB_4, & B_5 &= BA_4 + DB_4,\\
&\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\\
A_n &= AA_{n-1} + CB_{n-1}, & B_n &= BA_{n-1} + DB_{n-1},\\
C_1 &= C, & D_1 &= D,\\
C_2 &= AC_1 + CD_1, & D_2 &= BC_1 + DD_1,\\
C_3 &= AC_2 + CD_2, & D_3 &= BC_2 + DD_2,\\
C_4 &= AC_3 + CD_3, & D_4 &= BC_3 + DD_3,\\
C_5 &= AC_4 + CD_4, & D_5 &= BC_4 + DD_4,\\
&\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\\
C_n &= AC_{n-1} + CD_{n-1}, & D_n &= BC_{n-1} + DD_{n-1}.
\end{aligned}$$

Wzory te mają oczywiście wartość jedynie dla całkowitych, dodatnich wartości wykładnika iteracyi n.

§ 16. Wzory te możemy znacznie uprościć. Znajdźmy związek pomiędzy wyrazami:

$$A_{m+n}, \; B_{m+n}, \; C_{m+n}, \; D_{m+n}; \quad A_m, \; B_m, \; C_m, \; D_m;$$
$$A_n, \; B_n, \; C_n, \; D_n.$$

W tym celu wykonajmy podstawienie:

$$f_{m+n}(z) = f_m f_n(z) = \frac{A_m z_n + B_m}{C_m z_n + D_m} = \frac{A_m \dfrac{A_n z + B_n}{C_n z + D_n} + B_m}{C_m \dfrac{A_n z + B_n}{C_n z + D_n} + D_m}$$

$$= \frac{(A_m A_n + B_m C_n) z + (A_m B_n + B_m D_n)}{(C_m A_n + D_m C_n) z + (C_m B_n + D_m D_n)},$$

Stąd wynika:

$$A_{m+n} = A_m A_n + B_m C_n = A_n A_m + B_n C_m,$$
$$B_{m+n} = A_m B_n + B_m D_n = A_n B_m + B_n D_m,$$
$$C_{m+n} = C_m A_n + D_m C_n = C_n A_m + D_n C_m,$$
$$D_{m+n} = C_m B_n + D_m D_n = C_n B_m + D_n D_m.$$

Chcąc zatem obliczyć A_M, B_M, C_M, D_M rozkładamy M na sumę dwu liczb: m i n, przez co rachunek znacznie uprości się, gdyż w razie $m > n$ zamiast $m+n$ wzorów rachunkowych, mamy tylko $m+1$. Pierwsze m wzorów po drodze daje już A_n, B_n, C_n, D_n, a w rezultacie daje A_m, B_m, C_m, D_m, ostatni $(m+1)$-szy wzór daje A_{m+n}, B_{m+n}, C_{m+n}, D_{m+n}.

§ 17. Inny rodzaj uproszczenia rachunku podamy w postaci:

$$A_2 = A_1^2 + B_1 C_1, \quad B_2 = (A_1 + D_1) B_1,$$
$$A_4 = A_2^2 + B_2 C_2, \quad B_4 = (A_2 + D_2) B_2,$$
$$A_8 = A_4^2 + B_4 C_4, \quad B_8 = (A_4 + D_4) B_4,$$
$$A_{16} = A_8^2 + B_8 C_8, \quad B_{16} = (A_8 + D_8) B_8,$$

$$C_2 = (A_1 + D_1)\, C_1, \quad D_2 = B_1 C_1 + D_1^2,$$
$$C_4 = (A_2 + D_2)\, C_2, \quad D_4 = B_2 C_2 + D_2^2,$$
$$C_8 = (A_4 + D_4)\, C_4, \quad D_8 = B_4 C_4 + D_4^2,$$
$$C_{16} = (A_8 + D_8)\, C_8, \quad D_{16} = B_8 C_8 + D_8^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Teraz tak postępujemy: piszemy $M = 2^{p_1} + n_1$, przyczem p_1 jest to największa potęga liczby 2, jaka się w M zawiera: $2^{p_1+1} > M > 2^{p_1}$.

Piszemy teraz: $A_M = A_{2^{p_1}} . A_n + B_{2^{p_1}} . B_n$ i t. d. jak poprzednio. $A_{2^{p_1}}$, $B_{2^{p_1}}$, ... obliczamy według tabeli dopiero co wskazanej.

Aby obliczyć A_{n_1}, B_{n_1}, C_{n_1}, D_{n_1} piszemy $n_1 = 2^{p_2} + n_2$, $2^{p_2+1} > n_1 > 2^{p_2}$ i i otrzymujemy: $A_{n_1} = A_{2^{p_2}} A_{n_2} + B_{2^{p_2}} B_{n_2}$ i t. d. jak w art. 16; $A_{2^{p_2}}$ $B_{2^{p_2}}$ ..... już obliczyliśmy.

W ten sposób rachunek sprowadzamy do niewielkiej liczby działań.

Przypuśćmy, że mamy obliczyć A_{1725}, B_{1725}, C_{1725}, D_{1725}. Postępując według art. 16 mielibyśmy 4,1725 wzorów, zaś według wskazówek niniejszego artykułu, obliczamy: A_2..., A_4.., A_8..., A_{16}..., A_{32}.., A_{64}.., A_{128}..., A_{256}..., A_{512}..., A_{1024}..., następnie piszemy:

$$A_{1725} = A_{1024} A_{701} + B_{1024} C_{701} \text{ i t. d.},$$
$$A_{701} = A_{512}\, A_{189} + B_{512}\, C_{189} \text{ i t. d.},$$
$$A_{189} = A_{128}\, A_{61} + B_{128} C_{61}, \quad B_{189} = A_{128} B_{61} + B_{128} D_{61},$$
$$A_{61} = A_{32}\, A_{29} + B_{32} C_{29}, \quad B_{61} = A_{32} B_{29} + B_{32} D_{29},$$
$$A_{29} = A_{16} A_{13} + B_{16} C_{13}, \quad B_{29} = A_{16} B_{13} + B_{16} D_{13},$$
$$A_{13} = A_8 A_5 + B_8 C_5, \quad B_{13} = A_8 B_5 + B_8 D_5,$$
$$A_5 = A_4 A_1 + B_4 C_1, \quad B_5 = A_4 B_1 + B_4 D_1,$$

$$C_{189} = C_{28} A_{61} + D_{28}\, C_{61} \text{ i t. d.},$$
$$C_{62} = C_{32} A_{29} + D_{32} C_{29} \text{ i t. d.},$$
$$C_{29} = C_{16} B_{13} + D_{16} C_{13} \text{ i t. d.},$$
$$C_{13} = C_8 B_5 + D_8 C_5, \quad D_{13} = C_8 B_5 + D_8 D_5,$$
$$C_5 = C_4 B_1 + D_4 C_1, \quad D_5 = C_4 B_1 + D_4 D_1,$$

a więc tylko 4 . 17 wzorów.

10. Rachunek iteracyj funkcyi algebraicznej, wymiernej, ułamkowej liniowej za pomocą funkcyj symetrycznych obu miejsc niezmiennych.

§ 18. Wiemy, że n-tą iteracyą funkcyi $f(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$, mającą miejsca niezmienne r_1 i r_2, możemy przedstawić w postaci:

$$f_n(z) = \frac{[r_1(Cr_1+D)^n - r_2(Cr_2+D)^n]z - [(Cr_1+D)^n \cdot (Cr_2+D)^n]r_1r_2}{[(Cr_1+D)^n - (Cr_2+D)^n]z - [r_2(Cr_1+D)^n - r_1(Cr_2+D)^n]}.$$

Połóżmy:

$$Cr_1 + D = \varrho_1, \quad Cr_2 + D = \varrho_2;$$

otrzymamy po łatwych przekształceniach:

$$f_n(z) = \frac{\{\varrho_1^n(\varrho_1 - D) - \varrho_2^n(\varrho_2 - D)\} Cz - \{\varrho_1^n - \varrho_2^n\}(\varrho_1 - D)(\varrho_2 - D)}{(\varrho_1^n - \varrho_2^n) C^2 z - \{(\varrho_2 - D)\varrho_1^n - (\varrho_1 - D)\varrho_2^n\} C}.$$

Kładąc $\frac{\varrho_1^n - \varrho_2^n}{\varrho_1 - \varrho_2} = T_n$, znajdziemy:

$$f_n(v) = \frac{(T_{n+1} - DT_n) z + BT_n}{CT_n z - \{(AD - BC) T_{n+1} - DT_n\}}.$$

Twierdzenie. Jeżeli przez T_n oznaczymy funkcyę symetryczną miejsc niezmiennych r_1 i r_2 funkcyi

$$f(z) = \frac{Az+B}{Cz+D},$$

i napiszemy ją w postaci:

$$T_n = (Cr_1+D)^{n-1} + (Cr_1+D)^{n-2}(Cr_2+D) + \ldots$$
$$\ldots + (Cr_1+D)(Cr_2+D)^{n-2} + (Cr_2+D)^{n-1},$$

lub w postaci:

$$T_n = \varrho_1^{n-1} + \varrho_1^{n-2}\varrho_2 + \ldots\ldots + \varrho_1\varrho_2^{n-2} + \varrho_2^{n-1},$$

to otrzymamy:

$$f_n(z) = \frac{(T_{n+1} - DT_n) z + BT_n}{CT_n z + \{DT_n - (AD - BC) T_{n-1}\}}.$$

Elementy T_0, T_1, T_2, T_3, ... są funkcyami a l e f równania kwadratowego.

11. Rachunek iteracyj funkcyi algebraicznej, wymiernej, ułamkowej, liniowej za pomocą ułamków ciągłych.

§ 19. Rozpatrzmy wzór:

$$f(z) = \frac{Az+B}{Cz+D} = \frac{A\left(z+\frac{B}{A}\right)}{C\left(z+\frac{D}{C}\right)},$$

w postaci:

$$f(z) = \frac{A}{B} + \frac{\frac{BC-AD}{C^2}}{\frac{D}{C}+z},$$

a otrzymamy:

T w i e r d z e n i e. F u n k c y a a l g e b r a i c z n a, w y m i e r n a, u ł a m k o w a, l i n i o w a:

$$f(z) = \frac{Az+B}{Cz+D},$$

i t e r u j e s i ę z a p o m o c ą u ł a m k ó w c i ą g ł y c h n a m o c y w z o r ó w:

$$f(z) = \left(\frac{A}{C}\right) + \frac{\left(\frac{BC-AD}{C^2}\right)}{\left(\frac{D}{C}\right)+z};$$

$$f_2(z) = \left(\frac{A}{C}\right) = \frac{\left(\frac{BC-AD}{C^2}\right)}{\left(\frac{A+D}{C}\right) + \frac{\left(\frac{BC-AD}{C^2}\right)}{\left(\frac{D}{C}\right)+z}};$$

$$f_3(z) = \left(\frac{A}{C}\right) + \cfrac{\left(\frac{BC-AD}{C^2}\right)}{\left(\frac{A-D}{C}\right) + \cfrac{\left(\frac{BC-AD}{C^2}\right)}{\left(\frac{A+D}{C}\right) + \cfrac{\left(\frac{BC-AD}{C^2}\right)}{\left(\frac{D}{C}\right) + z}}} \text{ i t. d.}$$

Twierdzenie. Jeżeli przez:

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \ldots\ldots$$

oznaczymy kolejne redukty ułamku ciągłego, peryodycznego:

$$\frac{A}{C} + \cfrac{\frac{BC-AD}{C^2}}{\frac{A+D}{C} + \cfrac{\frac{BC-AD}{C^2}}{\frac{A+D}{C} + \cfrac{\frac{BC-AD}{C^2}}{\frac{A+D}{C} + \ddots}}},$$

Wówczas funkcya $f(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$ iteruje się na mocy wzoru:

$$f_n(z) = \frac{P_{n-1}\, z + \left(\frac{D}{C}\, P_{n-1} + \frac{BC-AD}{C^2}\, P_{n-2}\right)}{Q_{n-1}\, z + \left(\frac{D}{C}\, Q_{n-1} + \frac{BC-AD}{C^2}\, Q_{n-2}\right)}.$$