Ł. BÖTTCHER.

ITERACYE FUNKCYI LINIOWEJ.

---

1. Pierwsza metoda rachunku iteracyj funkcyi liniowej, ułamkowej. Rachunek pary punktów niezmiennych.

§ 1. Niechaj będzie funkcya liniowa, ułamkowa: $f(z)=\frac{Az+B}{Cz+D}$. Niechaj a, b, c będą trzy jakiekolwiek różne liczby; oznaczmy: $f(a)=a_1$, $f(b)=b_1$, $f(c)=c_1$. Oczywiście a_1, b_1, c_1 również będą różne pomiędzy sobą. Połóżmy zarazem: $f(z)=z_1$. Wyrażenie:

$$\frac{z-a}{z-b}:\frac{c-a}{c-b},$$

nazywamy **stosunkiem podziału podwójnego czterech liczb**: a, b, c, z i oznaczamy przez (z, c, a, b). Jest to przeniesienie pojęcia stosunku podziału podwójnego czterech punktów na liczby. Dowiedziemy, że:

$$\frac{z_1-a_1}{z_1-b_1}:\frac{c_1-a_1}{c_1-b_1}=\frac{z-a}{z-b}:\frac{c-a}{c-b}, \tag{1}$$

W samej rzeczy:

$$z_1-a_1=\frac{Az+B}{Cz+D}-\frac{Aa+B}{Ca+D}=\frac{(AD-BC)(z-a)}{(Cz+D)(Ca+D)},$$

i podobnie:

$$z_1-a_1=\frac{(AD-BC)(z-a)}{(Cz+D)(Ca+D)},\quad z_1-b_1=\frac{(AD-BC)(z-b)}{(Cz+D)(Cb+D)},$$

(2)

$$c_1-a_1=\frac{(AD-BC)(c-a)}{(Cc+D)(Ca+D)},\quad c_1-b_1)=\frac{(AD\ \ BC)(c-b)}{(Cc+D)(Cb+D)}$$

skąd wynika $\frac{z_1-a_1}{z_1-b_1}:\frac{c_1-a_1}{c_1-b_1}=\frac{z-a}{z-b}:\frac{c-a}{c-b}$.

Mamy zatem:

T w i e r d z e n i e: Jeżeli liczby a, b, c, z są połączone z liczbami a_1, b_1, c_1, z_1 za pomocą wzorów $f(a)=a_1$, $f(b)=b_1$, $f(c)=c_1$, $f(z)=z_1$, $f(z)=\frac{Az+B}{Cz+D}$, wówczas:

$$\frac{z_1-a_1}{z_1-b_1}=\frac{\frac{c_1-a_1}{c_1-b_1}}{\frac{c-a}{c-b}}\cdot\frac{z-a}{z-b}.$$

§ 2. Zbadajmy, jaką postać przyjmie wzór otrzymany, gdy przyjmiemy, że a_1, b_1, a więc również a, b różnią się nieskończenie mało, (byleby $Aa+D$ było różne od zera). W tym celu napiszmy $b_1=a_1+da_1$, $b=a+da$; będzie:

$$\frac{z_1-a_1}{z_1-a_1-da_1}=\frac{c_1-a_1}{c_1-a_1-da_1}\cdot\frac{c-a-da}{c-a}\cdot\frac{z-a}{z-a-da},$$

a więc:

$$\frac{1}{1-\frac{da_1}{z_1-a_1}}=\frac{1}{1-\frac{da_1}{c_1-a_1}}\cdot\left(1-\frac{da}{c-a}\right)\frac{1}{1-\frac{da}{z-a}},$$

skąd, po opuszczeniu różniczek rzędów wyższych, otrzymujemy:

$$\frac{da_1}{z_1-a_1}-\frac{da_1}{c_1-a_1}=\frac{da}{z-a}-\frac{da}{c-a}.$$

Ponieważ $a_1=f(a)$, więc $da_1=f'(a)da$. Stąd:

$$\frac{f'(a)}{z_1-a_1}=\frac{1}{z-a}+\frac{f'(a)}{c_1-a_1}-\frac{1}{c-a}.$$

T w i e r d z e n i e. Jeżeli liczby a, c, z są połączone z liczbami a_1, c_1, z_1 za pomocą wzorów $f(a)=a_1$, $f(c)=c_1$, $f(z)=z_1$, przyczem $f(z)=\frac{Az+B}{Cz+D}$, wówczas:

$$\frac{f'(a)}{z_1-a_1}=\frac{1}{z-a}+\frac{f'(a)}{c_1-a_1}-\frac{1}{c-a}. \tag{3}$$

§ 3. Twierdzenia te zastosujemy, biorąc za liczby a i b w § 1 oba niezmienne miejsca r_1 i r_2 funkcyi $f(z)$, określone przez równanie $f(r)=r$,

$$r=\frac{Ar+B}{Cr+D},\ \text{czyli}\ Cr^2+(D-A)r-B=0,$$

jeżeli one są różne pomiędzy sobą, lub też za liczbę a w § 2 weźmiemy jedno niezmienne miejsce r, gdy oba pierwiastki równania:

$$Cr^2+(D-A)r-B=0,$$

są równe, a więc oba niezmienne miejsca r_1 i r_2 zejdą się w jednem miejscu r.

2. Rachunek iteracyj funkcyi liniowej, ułamkowej w pierwszym przypadku.

§ 4. Aby znaleść miejsca niezmienne funkcyi $f(z)$, t. j. liczby r, czyniące zadość warunkowi $f(r)=r$, a więc i warunkom:

$$r=f(r)=f_2(r)=f_3(r)=\ldots\ldots$$

musimy rozwiązać równanie kwadratowe:

$\frac{Ar+B}{Cr+D}=r$, czyli $Cr^2+(D-A)r-B=0$; równanie to daje nam:

$$r_1=\frac{(A-D)+\sqrt{(A-D)^2+4AC}}{2C},\ r_2=\frac{(A-D)-\sqrt{(A-D)^2+4BC}}{2C}.$$

Weźmy teraz znów pod uwagę wzór (1) § 1, połóżmy w nim $a=r_1$, $b=r_2$, a więc $a_1=r_1$, $b_1=r_2$, przyczem c jest liczbą dowolną, a otrzymamy:

$$\frac{z_1-r_1}{z_1-r_2}=\frac{c_1-r_1}{c_1-r_2}\cdot\frac{c-r_2}{c-r_1}\cdot\frac{z-r_1}{z-r_2}.$$

Korzystając z dowolności wyboru liczby c, możemy wyznaczyć stały stosunek:

$$\frac{z_1-r_1}{z_1-r_2}:\frac{z-r_1}{z-r_2}.$$

Postąpimy jednak nieco inaczej. Z wzoru (2) w § 1 otrzymujemy:

$$\frac{z_1-a_1}{z_1-b_1}:\frac{z-a}{z-b}=\frac{Cb+D}{Ca+D};$$

kładąc $a=r_1$, $b=r_2$, znajdziemy:

$$\frac{z_1-r_1}{z_1-r_2}:\frac{z-r_1}{z-r_2}=\frac{Cr_2+D}{Cr_1+D},$$

a więc:

$$\frac{z_1-r_1}{z_1-r_2}=\frac{Cr_2+D}{Cr_1+D}\cdot\frac{z-r_1}{z-r_2}. \tag{4}$$

T w i e r d z e n i e. Stosunek podziału podwójnego którejkolwiek pary odpowiednich liczb z i z_1, oraz pary miejsc niezmiennych jest wartością stałą.

Z wzorów (4), na podstawie zasady łączności iteracyjnej, będzie:

$$\frac{z_n-r_1}{z_n-r_2}=\left(\frac{Cr_2+D}{Cr_1+D}\right)^n\cdot\frac{z-r_1}{z-r_2},$$

skąd wynika:

$$z_n=\frac{r_2\left(\frac{Cr_2+D}{Cr_1+D}\right)^n\cdot\frac{z-r_1}{z-r_2}-r_1}{\left(\frac{Cr_2+D}{Cr_1+D}\right)^n\cdot\frac{z-r_1}{z-r_2}-1},$$

ostatecznie:

$$z_n = \frac{r_2(Cr_2+D)^n(z-r_1)-r_1(Cr_1+D)^n(z-r_2)}{(Cr_2+D)^n(z-r_1)-(Cr_1+D)^n(z-r_2)},$$

a po otwarciu nawiasów:

$$z_n = \frac{\{r_2(Cr_2+D)^n-r_1(Cr_1+D)^n\}z-\{(Cr_2+D)^n-(Cr_1+D)^n\}r_1r_2}{\{(Cr_2+D)^n-(Cr_1+D)^n\}z-\{r_1(Cr_2+D)^n-r_2(Cr_1+D)^n\}}.$$

T w i e r d z e n i e. Funkcya algebraiczna, wymierna, ułamkowa, liniowa $f(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$, mająca dwa różne miejsca niezmienne:

$$r_1 = \frac{(A-D)+\sqrt{(A-D)^2+4AC}}{2C},\ r_2 = \frac{(A-D)-\sqrt{(A-D)^2+4AC}}{2C},$$

iteruje się na mocy dowolnego z następujących wzorów:

$$\frac{z_n-r_1}{z_n-r_2} = \left(\frac{Cr_2+D}{Cr_1+D}\right)^n \frac{z-r_1}{z-r_2},$$

(5)

$$z_n = \frac{\{r_1(Cr_1+D)^n-r_2(Cr_2+D)^n\}z-\{(Cr_1+D)^n-(Cr_2+D)^n\}r_1r_2}{\{(Cr_1+D)^n-(Cr_2+D)^n\}z-\{r_2(Cr_1+D)^n-r_1(Cr_2+D)^n\}},$$

$$z_n = \frac{r_2\left(\frac{Cr_2+D}{Cr_1+D}\right)^n\frac{z-r_1}{z-r_2}-r_1}{\left(\frac{Cr_2+D}{Cr_1+D}\right)^n\frac{z-r_1}{z-r_2}-1},$$

$$z_n = \frac{r_2(Cr_2+D)^n(z-r_1)-r_1(Cr_1+D)^n(z-r_2)}{(Cr_2+D)^n(z-r_1)-(Cr_1+D)^n(z-r_2)},$$

przyczem:

$$Cr_1+D = \frac{(A+D)+\sqrt{(A+D)^2-4(AD-BC)}}{2},$$

$$Cr_2+D = \frac{(A+D)-\sqrt{(A+D)^2-4(AD-BC)}}{2},$$

§ 4. Z powyższego wynika, że wszystkie iteracye funkcyi liniowej, ułamkowej są również funkcyami liniowemi, ułamkowemi, mającemi też same miejsca niezmienne.

Jeżeli wyrażenie $\frac{Cr_2+D}{Cr_1+D}$ jest liczbą rzeczywistą, dodatnią, różną od jedności, wówczas funkcya $f(z)=\frac{Az+B}{Cz+D}$ określa podstawienie zwane hyperbolicznem; jeżeli jest liczbą urojoną o module różnym od jedności, albo liczbą ujemną, różną od -1, wówczas funkcya określa podstawienie zwane loksodromicznem; jeżeli, wreszcie jest liczbą urojoną, o module równym jedności, albo równą -1, wówczas funkcya określa podstawienie zwane eliptycznem. Otóż funkcya liniowa jest w tym ostatnim przypadku iteracyjnie peryodyczną o okresie wymiernym (całkowitym) lub niewymiernym, stosownie do tego, czy wyrażenie:

$$\frac{\arg.\,(Cr_2+D)-\arg.\,(Cr_1+D)}{2\pi},$$

jest liczbą wymierną czy niewymierną.

Uwaga 1. Jeżeli funkcya $f(z)=\frac{Az+B}{Cz+D}$ posiada same tylko rzeczywiste spółczynniki A, B, C, D, wówczas równanie $Cr^2+(D-A)\,r-B=0$, posiadając dwa różne pierwiastki, wyznacza albo dwie liczby rzeczywiste, albo dwie liczby urojone, sprzężone Cr_2+D, Cr_1+D. Stosunek zatem tych liczb, gdy A, B, C, D są wszystkie liczbami rzeczywistemi jest, albo liczbą rzeczywistą, albo liczbą urojoną o module równym jedności. W tym więc przypadku możliwe jest tylko podstawienie eliptyczne i hyperboliczne; co się zaś tyczy podstawienia loksodromicznego, to jedyne możliwe zachodzi, gdy ten stosunek jest liczbą ujemną.

Uwaga 2. Wśród różnych innych typów funkcyj liniowych, ułamkowych, wymienimy postać:

$$f(z)=\frac{(a+bi)\,z+(c+di)}{(-c+di)\,z+(a-bi)};$$

$$A=a+bi,\quad B=c+di,\quad C=-c+di,\quad D=a-bi;$$

$$AD-BC=(a+bi)(a-bi)-(-c+di)(c+di);$$

$$AD-BC=a^2+b^2+c^2+d^2;\quad A+D=2a;$$

$$(A+D)^2-4(AD-BC)=4a^2-4(a^2+b^2+c^2+d^2)=-4(b^2+c^2+d^2).$$

Mamy więc:

$$\frac{Cr_2 + D}{Cr_1 + D} = \frac{a - i\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}{a + i\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}}.$$

W obrębie tego typu funkcyj liniowych ułamkowych jedynie możliwe jest podstawienie eliptyczne. Wszystkie tego rodzaju funkcye są iteracyjnie peryodycznemi, o okresie wymiernym (całkowitym), lub niewymiernym [1].

3. Rachunek iteracyj funkcyi liniowej. ułamkowej w drugim przypadku.

§ 6. Niechaj miejsca niezmienne funkcyi liniowej, ułamkowej schodzą się w jednym punkcie r. Stosujemy wzór podany (3), kładąc w nim $a = r$.

Jeżeli równanie $f(z) - z = 0$ posiada pierwiastek wielokrotny r, to jest on wspólnem rozwiązaniem dwu równań: $f(z) - z = 0$, $\{f(z) - z\} = 0$, czyli dwu równań: $f(z) - z = 0$, $f'(z) - 1 = 0$. Ponieważ tu r jest pierwiastkiem podwójnym, więc $f(r) = r$, $f'(r) = 1$; otrzymujemy więc:

$$\frac{1}{z_1 - r} = \frac{1}{z - r} + \frac{1}{c_1 - r} - \frac{1}{c - r}.$$

Kładąc $b = \infty$, a więc $c_1 = \frac{A}{C}$, znajdziemy:

$$\frac{1}{z_1 - r} = \frac{1}{z - r} + \frac{C}{A - Cr}.$$

Z równania $Cr^2 + (D - A)r - B = 0$ wiemy, że ten podwójny pierwiastek ma wartość $r = \frac{A - D}{2C}$, a więc:

$$\frac{C}{A - Cr} = \frac{2C}{A + D}, \text{ i ostatecznie: } \frac{1}{z_1 - r} = \frac{1}{z - r} + \frac{2C}{A + D}.$$

[1]) Szczegółowy wykład znajdziemy u Kleina: Vorl. ü. d. Ikosaeder, Leipzig, Teubner 1884, str. 29—36; Klein und Fricke: Vorl. ü. d. Theorie der elipt. Modulfunktionen, 2 tomy; Vorl. ü. d. Theorie der automorphen Funktionen. 2 tomy.

Stosując zasadę łączności iteracyjnej, otrzymujemy:

$$\frac{1}{z_n - r} = \frac{1}{z-r} + \frac{2nC}{A+D},$$

wynika stąd:

$$z_n = \frac{(A+D)\,r + (A+D+2nCr)(z-r)}{(A+D) + 2nC(z-r)}.$$

A ponieważ $r = \frac{A-D}{2C}$, $r^2 = -\frac{B}{C}$, będzie także:

$$z_n = \frac{\{(A+D) + n(A-D)\}\,z + 2nB}{2nCz + \{(A+D) - n(A-D)\}},$$

lub

$$z_n = \frac{\{(n+1)A + (n-1)D\}\,z + 2nB}{2nCz + \{(n+1)D - (n-1)A\}},$$

T w i e r d z e n i e. Funkcya algebraiczna, wymierna, ułamkowa, liniowa $f(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$, mająca jedno miejsce niezmienne dwukrotne: $r = \frac{A-D}{2C}$, $r^2 = -\frac{B}{C}$, iteruje się na mocy dowolnego z wzorów:

$$\frac{1}{z_n - r} = \frac{1}{z-r} + \frac{2nC}{A+D},$$

$$z_n = \frac{\{(A+D) + n(A-D)\}(z-r) + (A+D)\,r}{2nC(z-r) + (A+D)},$$

$$z_n = \frac{\{(A+D) + n(A-D)\}\,z + 2nB}{2nCz + \{(A+D) - n(A-D)\}},$$

$$z_n = \frac{\{(n+1)A + (n-1)D\}\,z + 2nB}{2nCz + \{(n+1)D - (n-1)A\}}.$$

Funkcya tego rodzaju $f(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$, czyniąca zadość warunkowi: $\left(\frac{A-D}{2}\right)^2 + BC = 0$, lub, co na jedno wychodzi, warunkowi: $\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 - (AD-BC) = 0$, określa podstawienie, zwane parabolicznem.

4. Druga metoda rachunku iteracyj funkcyi liniowej, ułamkowej. Twierdzenie Hoppego.

§ 8. R. Hoppe w artykule p. t. „Wiederholung, Interpolation und Inversion einer Funktion unter gemeinschaftlicher Form“ (Zeitschrift für Mathematik und Physik, tom V, 1860, str. 136—139) podał wytworny rachunek iteracyj funkcyi liniowej, ułamkowej, oparłszy go na następującem prawie:

Twierdzenie. Jeżeli $f(z)$ jest funkcyą algebraiczną, wymierną, ułamkową, liniową typu $f(z)=\frac{Az+B}{Cz+D}$, wówczas każda jej iteracya jest również funkcyą algebraiczną, wymierną, liniową, dającą się przedstawić w postaci:

$$f_n(z)=\frac{(R_n+a)\,z+B}{Cz+(R_n-a)}\,;\quad a=\frac{A-D}{2}\,,\quad R_1=\frac{A+D}{2}\,,$$

Twierdzenie to, oczywiście prawdziwe dla $n=1$ i łatwe do sprawdzenia dla $n=2,3,\ldots$, udowodnić można na drodze indukcyjnej, przyjąwszy, że jest prawdziwem dla $n=m$, i dowodząc jego prawdziwości dla $n=m+1$. Otóż przyjmujemy, że, istotnie:

$$f_m(z)=\frac{(R_m+a)\,z+B}{Cz+(R_m-a)}\,,$$

a chcemy dowieść, że:

$$f_{m+1}(z)=\frac{(R_{m+1}+a)\,z+B}{Cz+(R_{m+1}-a)}\,.$$

W tym celu piszemy: $f_{m+1}(z)=f_m f(z)=f_m(z_1)$, a zatem,

$$f_{m+1}(z)=\frac{(R_m+a)\,z_1+B}{Cz_1+(R_m-a)}=\frac{(R_m+a)\,\dfrac{(R_1+a)\,z+B}{Cz+(R_1-a)}+B}{C.\,\dfrac{(R_1+a)z+B}{Cz+(R_1-a)}+(R_m-a)}$$

$$=\frac{\{(R_m+a)\,(R_1+a)+BC\}\,z+(R_m+a+R_1-a)\,B}{C\,(R_m-a+R_1+a)\,z+\{(R_m-a)\,(R_1-a)+BC\}}$$

$$=\frac{\dfrac{(R_m+a)\,(R_1+a)+BC}{R_1+R_m}\,z+B}{Cz+\dfrac{(R_m-a)\,(R_1-a)+BC}{R_1+R_m}},$$

skąd wypada:

$$f_{m+1}(z)=\frac{\left\{\dfrac{R_1R_m+(BC+a^2)}{R_1+R_m}+a\right\}z+B}{Cz+\left\{\dfrac{R_1R_m+(BC+a^2)}{R_1+R_m}-a\right\}}.$$

Kładąc:

$$R_{m+1}=\frac{R_1R_m+(BC+a^2)}{R_1+R_m},$$

otrzymujemy:

$$f_{m+1}(z)=\frac{(R_{m+1}+a)\,z+B}{Cz+(R_{m+1}-a)},$$

co miało być udowodnione.

§ 9. Aby przeprowadzić badania w dalszym ciągu, rozróżnimy dwa przypadki: 1° $BC+a^2$ od zera różne; 2° $BC+a^2=0$. Zajmijmy się najprzód pierwszym.

T w i e r d z e n i e. J e ż e l i w y r a ż e n i e $BC+a^2$ j e s t r ó ż n e o d z e r a, w ó w c z a s z m i e n n y p a r a m e t r R_n d a j e s i ę o t r z y m a ć w p o s t a c i:

$$R_n=\left(\frac{1+P^n}{1-P^n}\right)\sqrt{a^2+BC}.$$

W samej rzeczy, napiszmy:

$$R_n=\frac{1+P_n}{1-P_n}\sqrt{a^2+BC},$$

skąd:

$$R_{n+1} = \frac{1+P_{n+1}}{1-P_{n+1}} \sqrt{a^2+BC}, \quad R_1 = \frac{1+P_1}{1-P_1} \sqrt{a^2+BC},$$

i znajdźmy związek, jaki zachodzi pomiędzy P_1, P_n, P_{n+1}. W tym celu podstawmy powyższe wzory w równanie:

$$R_{m+1} = \frac{R_1 R_m + (BC + a^2)}{R_1 + R_m},$$

a otrzymamy:

$$R_{m+1} = \frac{\frac{1+P_1}{1-P_1} \cdot \frac{1+P_m}{1-P_m}(BC+a^2) + (BC+a^2)}{\left(\frac{1+P_1}{1-P_1} + \frac{1+P_m}{1-P_m}\right)\sqrt{BC+a^2}},$$

$$R_{m+1} = \frac{\frac{1+P_1}{1-P_1} \cdot \frac{1+P_m}{1-P_m} + 1}{\frac{1+P_1}{1-P_1} + \frac{1+P_m}{1-P_m}} \sqrt{BC+a^2};$$

po dokonaniu łatwych uproszczeń, znajdziemy:

$$R_{m+1} = \frac{1+P_{m+1}}{1-P_{m+1}} \sqrt{a^2+BC} = \frac{1+P_1 P_m}{1-P_1 P_m} \sqrt{a^2+BC}. \quad P_{m+1} = P_1 P_m$$

skąd wynika: $P_m = P_1^{\,m}$, co było do udowodnienia.

T w i e r d z e n i e. Funkcya algebraiczna, wymierna, ułamkowa liniowa $f(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$ iteruje się przy pomocy wzoru:

$$f_n(z) = \frac{(R_n + a)z + B}{Cz + (R - a)},$$

przyczem $a = \frac{A-D}{2}$, a w razie $a^2 + BC$ różnego od zera, mamy:

$$R_n = \frac{1+P^n}{1-P^n} \sqrt{a^2+BC}, \qquad P = \frac{(A+D) - \sqrt{(A-D)^2 + 4BC}}{(A+D) + \sqrt{(A-D)^2 + 4BC}},$$

5. Pierwsza postać wzoru głównego; udział funkcyi potęgowych

§ 10. Zobaczmy, jaki związek zachodzi między wzorami, otrzymanemi w § 4, a obecnie otrzymanemi wzorami. W tym celu, przedstawmy wzór (5) § 1 w postaci:

$$f_n(z)=\frac{\dfrac{r_1(Cr_1+D)^n-r_2(Cr_2+D)^n}{(Cr_1+D)^n-(Cr_2+D)^n}\,z-r_1r_2}{z+\dfrac{r_1(Cr_1+D)^n-r_2(Cr_1+D)}{(Cr_1+D)^n-(Cr_2+D)^n}}$$

$$=\frac{\left\{\dfrac{r_1-r_2}{2}\cdot\dfrac{(Cr_1+D)^n+(Cr_2+D)^n}{(Cr_1+D)^n-(Cr_2+D)^n}+\dfrac{r_1+r_2}{2}\right\}z-r_1r_2}{z+\left\{\dfrac{r_1-r_2}{2}\,\dfrac{(Cr_1+D)^n+(Cr_2+D)^n}{(Cr_1+D)^n-(Cr_2+D)^n}-\dfrac{r_1+r_2}{2}\right\}}.$$

Z równania $Cr^2+(D-A)r-B=0$ wiemy, że:

$$r_1r_2=-\frac{B}{C},\quad r_1-r_2=\frac{\sqrt{(A-D)^2+4BC}}{C},\quad r_1+r_2=\frac{A-D}{C};$$

położmy;

$$\frac{A-D}{2}=\alpha;\quad +\sqrt{\left(\frac{A-D}{2}\right)^2+BC}=\beta,$$

a otrzymamy

$$r_1r_2=-\frac{B}{C},\quad r_1-r_2=\frac{2\beta}{C},\quad r_1+r_2=\frac{2\alpha}{C}.$$

Podstawiając to we wzór główny, otrzymujemy, mnożąc licznik i mianownik przez C:

$$f_n(z)=\frac{\left\{\beta\,\dfrac{(Cr_1+D)^n+(Cr_2+D)^n}{(Cr_1+D)^n-(Cr_2+D)^n}+\alpha\right\}z+B}{Cz+\left\{\beta\,\dfrac{(Cr_1+D)^n+(Cr_2+D)^n}{(Cr_1+D)^n-(Cr_2+D)^n}-\alpha\right\}},$$

T w i e r d z e n i e. F u n k c y a a l g e b r a i c z n a, w y m i e r n a, u ł a m k o w a, l i n i o w a $f(z)=\dfrac{Az+B}{Cz+D}$, m a j ą c a d w a różne miejsca niezmienne r_1, r_2, iteruje się przy pomocy wzoru:

$$f_n(z) = \frac{(R_n + a) z + B}{C_2 + (R_n - a)},$$

przyczem:

$$\frac{a}{C} = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \frac{\beta}{C} = \frac{r_1 - r_2}{2}, \quad R_n = \beta \cdot \frac{(Cr_1 + D)^n + (Cr_2 + D)^n}{(Cr_1 + D)^n - (Cr_2 + D)^n},$$

albo też,

$$R_n = \beta \, \frac{1 + P^n}{1 - P^n}, \quad P = \left(\frac{Cr_1 + D}{Cr_2 + D}\right).$$

Parametr P jest więc stosunkiem podziału podwójnego dowolnej pary odpowiednich liczb z, $z_1 = f(z)$, oraz pary punktów niezmiennych.

6. Druga postać wzoru głównego—udział funkcyj hyperbolicznych.

§ 11. Wzory, wyprowadzone przez nas w §§ poprzednich, mogą być znacznie uproszczone, jeżeli zamiast funkcyj potęgowych wprowadzimy funkcye hyperboliczne lub funkcye kołowe. Uproszczenia te okażą się szczególnie dogodnemi, gdy mamy do czynienia z funkcyami ułamkowemi liniowemi o spółczynnikach rzeczywistych. Stosujemy wtedy funkcye hyperboliczne, gdy funkcye te posiadają rzeczywiste miejsca niezmienne; natomiast stosujemy funkcye kołowe, gdy funkcye te posiadają urojone sprzężone miejsca niezmienne. Przyjmujemy najprzód, że te oba niezmienne miejsca r_1 i r_2 funkcyi $f(z)$ o spółczynnikach rzeczywistych A, B, C, D są rzeczywiste, a więc że $a^2 + BC > 0$.

Wprowadzimy tu pewne klasyfikacye funkcyj wymiernych ułamkowych liniowych. Jako podstawę tej klasyfikacyi bierzemy wyrażenie $AD - BC$, o którem zakładamy, że jest różne od zera. Otóż uwzględnimy dwie klasy funkcyj badanego typu:

1° Klasa pierwsza, gdy wyrażenie $AD - BC$ jest dodatnie;

2° Klasa druga, gdy $AD - BC$ jest ujemne.

W obecnym przypadku, gdy mówimy o funkcyach, posiadających oba niezmienne miejsca rzeczywiste, możliwe są obydwie klasy. Każdą z nich rozpatrzymy z osobna. We wszystkich przypadkach możemy przyjąć, że C jest liczbą dodatnią.

Klasa pierwsza funkcyj liniowych: $AD-BC>0$, $C>0$. Rozważmy wzór główny, napisany w postaci:

$$f_n(z)=\frac{\left\{\frac{r_1-r_2}{2}\cdot\frac{\left(\frac{Cr_1+D}{Cr_2+D}\right)^n+1}{\left(\frac{Cr_1+D}{Cr_2+D}\right)^n-1}+\frac{r_1+r_2}{2}\right\}z-r_1r_2}{z-\left\{\frac{r_1-r_2}{2}\cdot\frac{\left(\frac{Cr_1+D}{Cr_2+D}\right)^n+1}{\left(\frac{Cr_1+D}{Cr_2+D}\right)^n-1}-\frac{r_1+r_2}{2}\right\}}.$$

Ponieważ:

$$\frac{Cr_1+D}{Cr_2+D}=\frac{\frac{A+D}{2}+\sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2-(AD-BC)}}{\frac{A+D}{2}-\sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2-(AD-BC)}},$$

wyrażenie zaś $AD-BC$ jest dodatnie, iloraz ten będzie zawsze dodatni, niezależnie od tego, czy $A+D$ będzie liczbą dodatnią, czy ujemną. Tylko, że w pierwszym razie będzie on większy od jedności, w drugim zaś mniejszy od jedności. W obu kładziemy we wzorze głównym:

$$\frac{Cr_1+D}{Cr_2+D}=e^{2q};\ \text{czyli}\ e^{2q}=\frac{\frac{A+D}{2}+\sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2-(AD-BC)}}{\frac{A+D}{2}-\sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2-(AD-BC)}}.$$

Gdy $\frac{A+D}{2}>0$, jest też $q>0$; gdy zaś $\frac{A+D}{2}<0$, jest też $q<0$.

Gdy $\frac{A+D}{2}>0$, kładziemy:

$$\cosh q=+\frac{\frac{A+D}{2}}{\sqrt{AD-BC}};\ \sinh q=+\sqrt{\frac{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2-(AD-BC)}{AD-BC}},\ q>0.$$

a gdy $\frac{A+D}{2} < 0$, piszemy:

$$\cosh q = -\frac{\frac{A+D}{2}}{\sqrt{AD-BC}}, \quad \sinh q = -\sqrt{\frac{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 - (AD-BC)}{AD-BC}}, \quad q < 0.$$

W obu razach, jak to łatwo jest się przekonać, otrzymamy:

$$f_n(z) = \frac{\left(\frac{r_1-r_2}{2} \operatorname{cotgh} nq + \frac{r_1+r_2}{2}\right) z - r_1 r_2,}{z + \left\{\frac{r_1-r_2}{2} \operatorname{cotgh} nq - \frac{r_1+r_2}{2}\right\}},$$

czyniąc przy tej sposobności uwagę, że tak w jednym, jak i w drugim razie mamy:

$$\operatorname{tgh} q = +\frac{\sqrt{\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 - (AD-BC)}}{\frac{A+D}{2}},$$

(dodatnie gdy $A+D<0$, ujemne zaś, gdy $A+D \leqslant 0$).

We wszystkich tych wzorach: $\cosh q$ ma statecznie znak $+$, jest liczbą dodatnią, $\operatorname{tgh} q$, wskutek postawienia przed znakiem pierwiastka $(+)$, zgadza się co do znaku z $(A+D)$, $\sinh q$, wskutek odpowiedniego znakowania pierwiastka, również zgadza się co do znaku z wyrazem $A+D$. W ten sposób znak ilości q zgadza się ze znakiem wyrażenia $A+D$ [1].

§ 12. Aby módz wzór nasz w dalszym ciągu uprościć, musimy wyraźnie odróżnić przypadek, gdy bezwzględna wartość s u m y r_1+r_2 będzie w i ę k s z a od bezwzględnej wartości r ó ż n i c y r_1-r_2, od przypadku, gdy bezwzględna wartość r ó ż n i c y r_1-r_2 będzie w i ę k s z a od bezwzględnej wartości s u m y r_1+r_2. Wzory:

$$\frac{r_1+r_3}{2} = \frac{A-D}{2C}, \quad \frac{r_1-r_2}{2} = +\frac{\sqrt{\left(\frac{A-D}{2}\right)^2 + BC}}{C},$$

[1]) Możemy posiłkować się tablicami funkcyj hyperbolicznych, podanemi przez Ch. G u d e r m a n n a w „Theorie des Potentials oder cyklisch-hyperbolischer Functionen" lub z tablicami K u l i k a (Kraków 1851).

w których C przyjmujemy zawsze dodatnie, a różnicę r_1-r_2 wskutek ustawienia:

$$r_1 = \frac{(A-D)+\sqrt{(A-D)^2+4BC}}{2C},$$

$$r_2 = \frac{(A-D)-\sqrt{(A-D)^2+4BC}}{2C},$$

oraz warunku $C>0$, również przyjmujemy za dodatnią, pouczają nas, że zależy to od tego, czy B będzie ujemne, czy dodatnie. W pierwszym razie, t. j. gdy B jest liczbą dodatnią, podobnież, jak i C, różnica r_1-r_2 jest większą od bezwzględnej wartości sumy r_1+r_2, a więc możemy położyć:

$$\frac{r_1-r_2}{2} = \varrho \cosh p; \quad \frac{r_1+r_2}{2} = \varrho \sinh p; \quad p = \sqrt{\frac{B}{C}},$$

p jest liczbą dodatnią, gdy $A-D>0$, a ujemną, gdy $A-D<0$ Podstawiając to we wzór główny:

$$f_n(z) = \frac{\left(\frac{r_1-r_2}{2} \operatorname{ctgh} nq + \frac{r_1+r_2}{2}\right) z - r_1 r_2}{z + \left(\frac{r_1-r_2}{2} \operatorname{cotgh} nq - \frac{r_1-r_2}{2}\right)},$$

otrzymamy na mocy znanych wzorów

$$\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh\alpha \cosh\beta \pm \sinh\alpha \sinh\beta$$

wzór:

$$\frac{f_n(z)}{\varrho} = \frac{z\cosh(p+nq) - \varrho \sinh nq}{z \sinh nq + \varrho \cosh(p-nq)}.$$

W drugim razie, t. j. gdy B jest liczbą ujemną, różnica r_1-r_2 jest mniejsza od bezwzględnej wartości sumy r_1+r_2, a więc możemy położyć:

$$\frac{r_1-r_2}{2} = +\varrho \sinh p, \quad \frac{r_1+r_2}{2} = +\varrho \cosh p, \quad \varrho = +\sqrt{-\frac{B}{C}},$$

(I) gdy $A-D>0$.

natomiast:

$$\frac{r_1 - r_2}{2} = -\varrho \sinh p; \quad \frac{r_1 + r_2}{2} = -\varrho \cosh p, \quad \varrho = +\sqrt{-\frac{B}{C}}\,.$$

$$\text{(II)} \qquad \text{gdy } A - D < 0.$$

We wszystkich tych wzorach $\cosh p$ jest liczbą dodatnią, a więc, aby utrzymać zgodność znaku ilości $r_1 + r_2$ i $(A-D)$, bo $C>0$, stawiamy w wiadomem miejscu znak $+$, gdy $A - D > 0$, znak $-$, gdy $A - D < 0$ (wzory I, II). W pierwszym jednak przypadku będzie p dodatnie, w drugim zaś ujemne. Co zresztą widać z tego, że $r_1 - r_2 > 0$, oraz z pierwszej pary odpowiednich wzorów.

Podstawiając to we wzór główny:

$$f_n(z) = \frac{\left(\frac{r_1 - r_2}{2} \operatorname{cotgh} nq + \frac{r_1 + r_2}{2}\right) z - r_1 r_2}{z + \left(\frac{r_1 - r_1}{2} \operatorname{cotgh} nq - \frac{r_1 + r_2}{2}\right)}\,.$$

Otrzymamy, na mocy znanych wzorów

$$\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh \alpha \cosh \beta \pm \cosh \alpha \sinh \beta,$$

wzór;

$$\frac{f_n(z)}{\varrho} = \frac{\pm z \sinh(p + nq) + \varrho \sinh nq}{z \sinh nq \pm \varrho \sinh(p - nq)},$$

Znak $+$ stosujemy, gdy $A - D > 0$; znak $-$, gdy $A - D < 0$.

(*D. c. n.*)