C. STÉPHANOS.

O pewnej kategoryi równań funkcyjnych.

Jeżeli postawimy sobie następujące zagadnienie: J a k i j e s t w a r u n e k k o n i e c z n y i d o s t a t e c z n y n a t o, a b y f u n k c y a $F(x,y)$ d w ó c h z m i e n n y c h x, y, d a ł a s i ę p r z e d s t a w i ć p r z e z w z ó r p o s t a c i:

$$F(x,y) = \Sigma\, \varphi_i(x)\, \psi_i(y), \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

otrzymamy wynik taki:

W a r u n k i e m t y m j e s t z n i k a n i e t o ż s a m o ś c i o w e w y z n a c z n i k a

$$\begin{vmatrix} F, & \dfrac{\partial F}{\partial x}, & \ldots\ldots, & \dfrac{\partial^m F}{\partial x^m} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}, & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}, & \ldots\ldots, & \dfrac{\partial^{m+1} F}{\partial x^m \partial y} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial^m F}{\partial y^m}, & \dfrac{\partial^{m+1} F}{\partial x\, \partial y^m}, & \ldots\ldots, & \dfrac{\partial^{2m} F}{\partial x^m \partial y^m} \end{vmatrix}.$$

[1]) Komunikat, przedstawiony na posiedzeniu Sekcyi Arytmetyki i Algebry kongresu międzynarodowego matematycznego w Heidelbergu dnia 12 sierpnia 1904, ogłoszony w „Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo“ (1904).

Oto niektóre zastosowania tego twierdzenia ogólnego do zagadnień szczególnych.

1. Jeżeli pytamy, jakie są funkcye $f(x)$, czyniące zadość wzorowi dodawania postaci:

$$f(x+y) = \Sigma\, \varphi_i(x)\psi_i(y)\,, \qquad i=1,2,\ldots m$$

znajdujemy, że funkcye te powinny czynić zadość warunkowi:

$$\Sigma \pm f\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \cdots\cdots \frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}} = 0,$$

t. j. równaniu różniczkowemu jednorodnemu o spółczynnikach stałych.

Widać stąd, że, poza wielomianami całkowitemi oraz funkcyami wykładniczemi e^{ax}, jedynemi funkcyami, mającemi własność, o której mowa (dla odpowiedniej wartości na m), są funkcye postaci:

$$f_1 . e^{a_1 x} + f_2 . e^{a_2 x} + \ldots\ldots + f_\varrho . e^{a_\varrho x}\,,$$

gdzie $f_1, f_2, \ldots, f_\varrho$ są wielomiany całkowite zmiennej x.

2. Z drugiej strony, wziąwszy funkcyę wymierną $f(x)=f_1(x):f_2(x)$, będącą ilorazem dwóch wielomianów rzędu m, poznamy, że iloraz $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ daje się zawsze wyrazić jako suma m iloczynów $\varphi_i(x)\psi_i(y)$.

Zbadanie bliższe twierdzenia odwrotnego prowadzi do następującego wyniku:

Poza funkcyami wymiernemi, utworzonemi przez iloraz dwóch wielomianów rzędu m, niema innych funkcyj $f(x)$ takich, aby iloraz $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ dał się wyrazić jako suma m iloczynów $\varphi_i(x)\,\psi_i(y)$.

Stąd można wnieść, w jakim przypadku zachodzi związek postaci:

$$\frac{1}{y-x}\int_x^y \omega(t)\, dt = \Sigma\, \varphi_i(x)\, \psi_i(y) \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

3. Niechaj będzie funkcya wymierna $f(x)=f_1(x):f_2(x)$, jako iloraz dwóch wielomianów rzędu m i dajmy, że $f_2(x)=(x-a)(x-a_2)\ldots$ $\ldots(x-a_m)$; można dowieść, że zachodzi wzór [1]:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\sum\psi_i\frac{(x-y)^{i-1}}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_i)}\,,\qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

gdzie

$$\psi_i=\psi_i(y)=\frac{y-a_i}{i!}\,\frac{\partial^i[f(y)(y-a_1)(y-a_2)\ldots,(y-a_{i-1})}{\partial y^i}\,.$$

Odwrotnie, jeżeli zapytamy, jaką powinna być funkcya $f(x)$, aby było

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\Sigma\,\varphi_i(x)\,\psi_i(y)(x-y)^i\,,\qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

poznamy łatwo na mocy № 2, że funkcya $f(x)$ może być tylko ilorazem dwóch wielomianów najwyżej rzędu $\frac{m(m+1)}{2}$.

Jeżeli w szczególności pytamy, w jakim przypadku rozwinięcie wyrażenia $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ przy pomocy wzoru Lagrange'a prowadzi do wyrażenia złożonego z m wyrazów:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\Sigma\psi_i\frac{(x-y)^i}{[\varphi(x)]^i}\,,\qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

gdzie

$$\psi_i=\psi_i(y)=\frac{1}{i!}\,\frac{\partial^{i-1}[f'(y)\varphi(y)^i]}{\partial y^{i-1}}\,,$$

znajdziemy, że może to zachodzić tylko w przypadku, w którym $f(x)$ jest ilorazem wielomianu rzędu m, przez potęgę m-tą dwumianu $ax+b$.

---

[1]) Ten właśnie wzór doprowadził autora do wyników, podanych w niniejszym komunikacie.

4. Wyniki № 2 mogą być uogólnione dla funkcyj $F(x, y)$, czyniących zadość znanemu równaniu różniczkowemu:

$$\nu \frac{\partial F}{\partial x} - \mu \frac{\partial F}{\partial y} + (x - y \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0,$$

i wyrażalnych przez sumę m iloczynów $\varphi_i(x)\,\psi_i(y)$.