L. HORDYŃSKI.

O wyznacznikach częściowo przetworzonych.

Prace, odnoszące się do teoryi wyznaczników, uwzględniają przy danym wyznaczniku, wyznaczniki, powstające z danego w ten sposób, że w nim wszystkie elementy bez wyjątku zastępują się podwyznacznikami tych elementów [1].

Tu zajmiemy się wyznacznikiem, utworzonym z danego wyznacznika w ten sposób, że tylko pewną liczbę wierszy (kolumn) pozostawimy nienaruszoną, a elementy pozostałych wierszy (kolumn) zastąpimy przez odpowiednie pierwsze podwyznaczniki danego wyznacznika: Tak powstający wyznacznik z wyznacznika D_n o n^2 elementach, gdy r wierszy (kolumn) pozostawimy, nazywać będziemy wyznacznikiem przetworzonym w $(n-r)$ wierszach (kolumnach).

Według tego, wyznacznik, złożony z samych pierwszych podwyznaczników będzie wyznacznikiem przetworzonym w n wierszach (kolumnach), czyli całkowicie przetworzonym wyznacznikiem.

W dalszym ciągu zajmiemy się pytaniem, jakim przetworzeniom (podstawieniom) uledz muszą elementy samego danego wyznacznika, aby dać szereg przetworzonych po kolei wyznaczników.

[1]) Por.: Studnigka, Časopis pro pěstovani mathematiky a Fysiky I, str. 6—10; IX str. 97. Sylvester, Crelle's Journal LXXXIII, str. 49—68. Mehmke, Mathematische Annalen XXVI, str. 209.

1. Określony we wstępie wyznacznik, przetworzony w $(n-r)$ wierszach (kolumnach) z danego wyznacznika D_n o n^2 elementach, oznaczamy przez $\Delta_{n,r}$; a więc w szczególności jest $\Delta_{n,n}$ wprost $= D_n$. Celem uproszczenia pisania, pozostawiać zawsze będziemy r pierwszych wierszy (kolumn), a przetwarzać $(n-r)$ końcowych wierszy (kolumn), gdyż przez stosownie dobrany znak można zawsze przejść do tego przypadku.

Jeżeli elementy danego wyznacznika D_n są $a_{r,s}$, a podwyznaczniki A_{rs} należące do a_{rs} tworzą wyznacznik $\Delta_{n,o}$, podwyznaczniki A'_{rs} należące do A_{rs} tworzą wyznacznik $\Delta'_{n,o}$, podwyznaczniki A''_{rs} należące do A'_{rs} tworzą wyznacznik $\Delta''_{n,o}$ i t. d., to wiadomo, że zachodzą związki:

(1) $$\Delta_{n,o} = D_n^{n-1},$$

(2) $$A'_{rs} = a_{rs} \,.\, D_n^{n-2}.$$

Zadaniem naszem teraz będzie analogicznie znaleść związek między wyznacznikiem:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots a_{rn} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \ldots a_{r+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{a wyznacznikiem } \Delta_{n,r} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots a_{rn} \\ A_{r+1,1} & A_{r+1,1} & \ldots A_{r+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots A_{nn} \end{vmatrix}$$

$$r = 0, 1, 2, \ldots n$$

Połóżmy:

(3) $$a_{s2}\, a_{t1} + a_{s2}\, a_{t2} + \ldots + a_{sn}\, a_{tn} = \sum_{k=2}^{n} a_{sk}\, a_{tk} \qquad \begin{matrix} s = 1, 2, \ldots, n \\ t = 1, 2, \ldots r \end{matrix}$$

(4) $$a_{s1}\, A_{11} + a_{s2}\, A_{t2} + \ldots + a_{sn}\, A_{tn} = \sum_{k=1}^{n} a_{sk}\, A_{tk} \qquad \begin{matrix} s = 1, 2 \ldots n \\ t = r+1, r+2, \ldots n \end{matrix}$$

będzie:

(5) $$\sum_{k=1}^{n} a_{sk}\, A_{tk} = \begin{cases} D \text{ dla } s = t \\ 0 \text{ dla } s \neq t \end{cases}.$$

Pomnóżmy D_n przez $\Delta_{n,r}$; uwzględniając (3), (4), (5) i odnosząc wszystkie sumy do $k=1,2\ldots n$, otrzymamy:

$$D_n \cdot \Delta_{n,r} = \begin{vmatrix} \Sigma a^2_{1n}, & \Sigma a_{1h}\, a_{2k}, & \Sigma a_{1k}\, a_{3k} & \ldots\ldots, & \Sigma a_{1k}\, a_{rk} & 0\,0\ldots 0 \\ \Sigma a_{2k}\, a_{1k}, & \Sigma a^2_{2k}, & \Sigma a_{2k}\, a_{3k} & \ldots\ldots, & \Sigma a_{2k}\, a_{rk} & 0\,0.,.0 \\ \Sigma a_{3k}\, a_{1k}, & \Sigma a_{3k}\, a_{2k}, & \Sigma a^2_{3k} & \ldots\ldots, & \Sigma a_{3k}\, a_{rk} & 0\,0\ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma_{rk}\, a_{1k}, & \Sigma_{rk}\, a_{2k}, & \Sigma a_{rk}\, a_{3k} & \ldots\ldots, & \Sigma a^2_{rk} & 0\,0\ldots 0 \\ \Sigma a_{r+1,k} a_{1k}, & \Sigma a_{r+1,k} a_{2k}, & \Sigma a_{r+1,k} a_{3k} & \ldots, & \Sigma a_{r+1,k} a_{rk} & D_n 0\ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma a_{nk}\, a_{1k}, & \Sigma a_{nk}\, a_{2k}, & \Sigma a_{nk}\, a_{3k} & \ldots, & \Sigma a_{nk}\, a_{rk} & 0\,0\ldots D_n \end{vmatrix}.$$

kolumn r kolumn $(n-r)$

Zauważmy, że:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{sk}\, a_{tk} = \sum_{k=1}^{n} a_{tk}\, a_{sk}; \qquad \begin{matrix} s=1,2,\ldots,n \\ t=1,2,\ldots r \end{matrix}$$

stosując prawidło L a p l a c e'a, obliczania wyznaczników, otrzymamy:

$$(6) \qquad \Delta_{n,r} = D_n^{n-r-1} \begin{vmatrix} \Sigma a^2_{1k}, & \Sigma a_{1k}\, a_{2k}, & \Sigma a_{1k}\, \Sigma_{3k}, & \ldots & \Sigma a_{1k}\, a_{rk} \\ \Sigma a_{1k}\, a_{2k}, & \Sigma a^2_{2k}, & \Sigma a_{2k}\, a_{3k}, & \ldots & \Sigma a_{2k}\, a_{rk} \\ \Sigma a_{1k}\, a_{3k}, & \Sigma a_{2k}\, a_{3k}, & \Sigma a^2_{3k}, & \ldots & \Sigma a_{3k}\, a_{rk} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma a_{1k}\, a_{rk}, & \Sigma a_{2k}\, a_{rk}, & \Sigma a_{3k}\, a_{rk} & \ldots, & \Sigma a^2_{rk} \end{vmatrix}$$

$$= D_n^{n-r-1} \cdot P_r. \qquad r=0,1,2,\ldots,n.$$

Dochodzimy zatem do takiego twierdzenia:

Wyznacznik przetworzony z danego wyznacznika o n^2 elementach w $(n-r)$ wierszach (kolumnach) równa się iloczynowi $(n-r-1)$-szej potęgi danego wyznacznika i pewnego wyznacznika symetrycznego o r^2 elementach. Na przekątnej głównej mamy w nim sumy $\sum\limits_{k=1}^{n} a^2_{1k}, \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}, \ldots, \sum\limits_{k=1}^{n} a^2_{rk}$; pozostałe elementy są postaci $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{sk}\, a_{tk}$, gdzie $s \neq t = 1, 2, \ldots, r$, a $n > r = 0, 1, 2, \ldots, n$, a wszystkie a_{rs} wchodzące w P_r, są temi elementami wyznacznika D_n, które nie były zastąpione przez podwyznaczniki. Dla $r = 0$ dostajemy z ostatniego wzoru wprost wzór (1). Dla $r = n$ mamy:

$$\Delta_{n,n} = D_n^{-1} \begin{vmatrix} \sum a^2_{1k}, \sum a_{1k}\, a_{2k}, & \ldots, & \sum a_{1k}\, a_{nk} \\ \sum a_{1k}\, a_{2k}, \sum a^2_{2k}, & \ldots, & \sum a_{2k}\, a_{nk} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum a_{1k}\, a_{nk}, \sum a_{2k}\, a_{nk}, & \ldots, & \sum a^2_{nk} \end{vmatrix}$$

(sumy odnoszą się zawsze do $k = 1, 2, \ldots, n$);

a że widocznie drugi czynnik jest tu $= D^2_n$, dostajemy zatem:

$$\Delta_{n,n} = D_n^{-1} \cdot D^2_n = D_n,$$

jak już na początku wspomniano.

W przypadku $r = 1$ powyższe twierdzenie da się w łatwiejszy sposób udowodnić. W tym przypadku $\Delta_{n,1}$ przedstawia się tak:

$$\Delta_{n,1} = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{22}, & \ldots, & a_{1n} \\ A_{21}, A_{22}, & \ldots, & A_{2n} \\ A_{31}, A_{32}, & \ldots, & A_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1}, A_{n2}, & \ldots, & A_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A'_{12} + a_{12}A'_{12} + \ldots \\ \ldots + a_{1n}\, A'_{1n}.$$

Stosując wzór (2), mamy:

$$\Delta_{n,1} = a^2_{11}\, D_n^{n-2} + a^2_{12}\, D_n^{n-2} + \ldots + \Delta^2_{1n}\, D_n^{n-2} = D_n^{n-2} \sum_{k=1}^{n} a^2_{1k}$$

Przyjmijmy, że $D_n = 1$ lub $= e^{\frac{2h\pi i}{n-2}}$ dla pewnego oznaczonego całkowitego h, będzie stąd:

$$\Delta_{n,1} = \sum_{k=1}^{n} a^2_{1k};$$

zatem:

Wyznacznik D_n, który ma wartość jednego z $(n-2)$-gich pierwiastków jedności, daje zawsze na przetworzony wyznacznik $\Delta_{n,1}$ sumę kwadratów elementów swego pierwszego wiersza (kolumny). Jeżeli przytem $\sum_{k=1}^{n} a^2_{1k} = 1$, to widoczna, że $\Delta_{n,1} = 1$. Tak się ma rzecz np. z wyznacznikiem:

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_2 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = 1,$$

w którym $(a_1b_2c_1)$, $a_2b_2c_2)$, $(a_3b_3c_3)$ są dostawami kątów, jakie trzy do siebie prostopadłe proste tworzą z osiami (xx), (yy), (zz) układu Descartes'a. Widocznie bowiem w tym razie mamy:

$$\Delta_{3,1} = a^2_1 + b^2_1 + c^2_1.$$

a że $a^2_1 + b^2_1 + c^2_1 = 1$ więc tak, że $\Delta_{3,1} = 1$.

To samo odnieść trzeba do wyznacznika każdego przekształcenia prostokątnego n zmiennych $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Wiemy teraz:

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}$$

i utwórzmy:

$$\Delta_{32} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ A_{31}, & A_{32}, & A_{33} \end{vmatrix},$$

gdzie A_{31}, A_{32}, A_{33} są podwyznacznikami elementów a_{31}, a_{32}, a_{33}; rozwijając wyznacznik podług elementów ostatniego wiersza, mamy przedewszystkiem:

$$\Delta_{3,2} = A^2_{31} + A^2_{32} + A^2_{33}$$
$$= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})^2 + (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})^2 - (a_{13}a_{21} - a_{23}a_{11})^2.$$

Z drugiej strony, na mocy wzoru (6), będzie:

$$\Delta_{3,2} = D^0 \begin{vmatrix} a^2_{11} + a^2_{12} + a^2_{13}, & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23}; & a^2_{21} + a^2_{22} + a^2_{23} \end{vmatrix}$$
$$= (a^2_{11} + a^2_{12} + a^2_{13})(a^2_{21} + a^2_{22} + a^2_{23}) - (a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23})^2,$$

a stąd:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})^2 + (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})^2 + (a_{13}a_{21} - a_{23}a_{11})^2$$
$$= (a^2_{11} + a^2_{12} + a^2_{13})\, a^2_{21} + a^2_{22} + a^2_{23}) - (a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23})^2.$$

Jest to znana tożsamość L a g r a n g e'a.

Połóżmy we wzorze (6) $r = n - 1$, otrzymamy:

$$\Delta_{n, n-1} = P_{n-1},$$

gdzie P_{n-1} jest wyznacznikiem symetrycznym o $(n-1)^2$ elementach. Z drugiej strony, jeżeli podwyznaczniki, należące do elementów ostatniego wiersza $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3} \ldots\ldots a_{nn}$ w wyznaczniku D_n oznaczymy przez $A_{n1}, A_{n2}, A_{n3} \ldots\ldots A_{nn}$ i rozwiniemy $\Delta_{n,n-1}$ podług tych właśnie podwyznaczników, otrzymamy:

$$\Delta_{n,n-1} = A^2_{n1} + A^2_{n2} + \ldots\ldots + A^2_{nn},$$

a więc:

$$A^2_{n1} + A^2_{n2} + \ldots\ldots + A^2_{nn} = P_{n-1},$$

Równanie to można uważać za ogólniejszą formę tożsamości L a g r a n g e'a.

Wyznacznik przetworzony $\Delta_{n,r}$ rozdzielmy na dwie następujące macierze prostokątne:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}, & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{r1}, & a_{r2}, & \ldots\ldots & a_{rn} \end{matrix} \right\| \qquad \left\| \begin{matrix} A_{r+1,1}, & A_{r+1,2} & \ldots\ldots & A_{r+1,n} \\ A_{r+1,1}, & A_{r+2,2} & \ldots\ldots & A_{r+2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ A_{n1}, & A_{n2} & \ldots\ldots & A_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

Biorąc z pierwszej macierzy wyznaczniki $\Delta_{k_1, k_2 \ldots k_r}$ o r^2 elementach, z drugiej wyznaczniki $\Delta_{k_{r+1}, k_{r+2}, \ldots k_n}$ o $(n-r)^2$ elementach, tworząc iloczyny i dając im znak $\varepsilon = +1, -1$ według potrzeby, otrzymamy $\Delta_{n,r}$ w postaci:

$$\Delta_{n,r} = \sum_{k_1, k_2, \ldots k_r} \varepsilon \,.\, \Delta_{k_1, k_2, \ldots k_r} \,.\, \Delta_{k_{r+1}, k_{r+2}, \ldots, k_n} \,.$$

Z drugiej strony, na mocy wzoru, (6) będzie:

$$\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_u} \varepsilon \,.\, \Delta_{k_1, k_2, \ldots k_r} \,.\, \Delta_{k_{r+1}, k_{r+2}, \ldots, kn} = D_n^{n-r-1} P_r, \quad r=0,1,2,\ldots,n$$

a te równania uważać można za szereg tożsamości, uogólniających wspomnianą już wyżej tożsamość L a g r a n g e'a

Dla $n=4$, $r=3$, gdy elementami wyznacznika D_4 są a_{rs}, a podwyznaczniki są A_{rs}, rozwijając $\Delta_{4,3}$ podług elementów ostatniego wiersza, zawierającego A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44} dochodzimy do związku:

$$\Delta_{4,3} = A^2_{41} + A^2_{42} + A^2_{43} + A^2_{44} \,.$$

Z drugiej strony mamy wzór (6), przez połączenie otrzymamy równość:

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{24} \\ a_{22} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^2 =$$

$$\begin{vmatrix} a^2_{11}+a^2_{12}+a^2_{13}+a^2_{14}, & a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}+a_{14}a_{24}, & a_{11}a_{31}+a_{12}a_{32}+a_{13}a_{33}+a_{14}a_{34}, \\ a_{21}a_{11}+a_{22}a_{12}+a_{23}a_{13}+a_{24}a_{14}, & a^2_{21}+a^2_{22}+a^2_{23}+a^2_{24}, & a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33}+a_{24}a_{34}, \\ a_{31}a_{11}+a_{32}a_{12}+a_{33}a_{13}+a_{34}a_{14}, & a_{31}a_{21}+a_{32}a_{22}+a_{33}a_{23}+a_{34}a_{24}, & a^2_{31}+a^2_{32}+a^2_{33}+a^2_{34} \end{vmatrix} .$$

Weźmy dwa wyznaczniki D_n i $\overline{D}_n$ o r wierszach identycznych:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{r1} & a_{1,r+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{3r} & a_{2,r+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \ldots & a_{rn} \\ a_{r+1,1} & a_{r+1,2} & \ldots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \ldots & a_{r+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{n1} & \ldots & a_{nr} & a_{n,r+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overline{D}_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \ldots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{rn} & \ldots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \ldots & a_{rn} \\ \beta_{r+1,1} & \beta_{r+1,2} & \ldots & \beta_{r+1,1} & \beta_{r+1,r+1} & \ldots & \beta_{r+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nr} & \beta_{n,r+1} & \ldots & \beta_{nn} \end{vmatrix}$$

Takie dwa wyznaczniki nazwać można podobnemi w r tym stopniu. W sposób znany utwórzmy z nich odpowiednio $\Delta_{n,r}$ i $\overline{\Delta}_{n,r}$. Zastosujmy wzór (6), to dostaniemy:

$$\Delta_{n,r} = D_n^{n-r-1} \begin{vmatrix} \Sigma a^2_{1k}, & \ldots, & \Sigma a_{1k}\, a_{rk} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma a_{rk}\, a_{1k}, & \ldots, & \Sigma a^2_{rk} \end{vmatrix} \quad \text{i}$$

$$\overline{\Delta}_{n,r} = \overline{D}_n^{n-r-1} \begin{vmatrix} \Sigma a^2_{1k}, & \ldots, & \Sigma a_{1k}\, a_{rk} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma a_{rk}\, a_{1k}, & \ldots, & \Sigma a^2_{rk} \end{vmatrix},$$

(sumy odnoszą się zawsze do znaczku $k = 1, 2, \ldots, n$).

a więc:

$$\Delta_{n,r} : \overline{\Delta}_{n,r} = D_n^{n-r-1} : \overline{D}_n^{n-r-1},$$

czyli.

$$\Delta_{n,r} : \bar{\Delta}_{n,r} = [D_n : \bar{D}_n]^{n-r-1} .$$

Stąd twierdzenie:

Stosunek wyznaczników przetworzonych w $(n-r)$ końcowych wierszach z wyznaczników podobnych w r tym stopniu równa się $(n-r-1)$-szej potędze stosunku samych danych podobnych wyznaczników.

Gdy $D_n = \bar{D}_n$ lub $= \bar{D} \,.\, e^{\frac{2h\pi i}{n-r-1}}$ dla pewnego oznaczonego całkowitego h, to widoczna, że:

$$\Delta_{n,r} = \bar{\Delta}_{n,r} .$$

W wyznacznikach D_n i $\bar{D}_n$ pozostawmy ϱ wierszy pierwszych nienaruszonych, gdzie ϱ oznacza jednę z liczb $0, 1, 2, \ldots, r$, to oczywiście, że także:

$$\Delta_{n,\varrho} : \bar{\Delta}_{n,\varrho} = [D_n : \bar{D}_n]^{n-\varrho-1} . \qquad {\scriptstyle \varrho=0,1,2,\ldots,r}$$

Stąd wnosimy, że gdy $D_n = \bar{D}_n$, to także:

$$\Delta_{n.\varrho} = \bar{\Delta}_{n,\varrho} . \qquad {\scriptstyle \varrho=0,1,2,\ldots r}$$

2. Weźmy znowu wyznacznik:

$$D_n = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \,.\,.\,.\,.\,.\, a_{nn}$$

i jego wyznacznik przetworzony:

$$\Delta_{n,r} = \pm a_{11}\, a_{22} \,.\,.\,.\, a_{rr}\, A_{r+1,r+1} \,.\,.\,.\, A_{nn}, \qquad {\scriptstyle r=0,1,2,\ldots n} \;;$$

uwidocznia, że z D_n przechodzimy do $\Delta_{n,r}$ zapomocą podstawienia:

$$S_{n-r} = \begin{pmatrix} a_{\lambda\mu} \,.\,.\,.\,.\,. \\ A_{\lambda\mu} \,.\,.\,.\,.\,. \end{pmatrix} \qquad {\scriptstyle \lambda=r+1,\, r+2,\ldots n \atop \mu=1,2,\ldots,n}$$

Znaczek $(n-r)$ oznacza, że tylko elementy $n-r$ końcowych wierszy (kolumn) zastępują się przez ich podwyznaczniki. Analogicznie, by z wyznacznika $\Delta_{n,r}$ utworzyć wyznacznik

$$\Delta'_{n,r} = \Sigma \pm a_{11}a_{22} \ldots a_{rr} A'_{r+1,r+1} \ldots A'_{nn}, \qquad r=0,1,2,\ldots n$$

użyjemy podstawienia:

$$T_{n-r} = \begin{pmatrix} A_{\lambda\mu} & \ldots \\ A'_{\lambda\mu} & \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda=r+1,r+1,\ldots n \\ \mu=1,2,\ldots n \end{matrix}$$

a do przejścia z $\Delta'_{n,r}$ do

$$\Delta''_{n,r} = \Sigma \pm a_{11}a_{22} \ldots a_{rr} A''_{r+1,r+1} \ldots A''_{nn}, \qquad r=0,1,2,\ldots,$$

użyjemy podstawienia:

$$T'_{n-r} = \begin{pmatrix} A'_{\lambda\mu} & \ldots \\ A''_{\lambda\mu} & \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda=r+1,r+2\ldots n \\ \mu=1,2,\ldots,n \end{matrix}$$

W ogólności, aby przejść z $\Delta^{(k-1)}_{n,r}$ do

$$\Delta^{(k)}_{n,r} = \Sigma \pm a_{11}a_{22} \ldots a_{rr} A^{(k)}_{r+1,r+1} \ldots A^{(k)}_{nn} \qquad r=0,1,2,\ldots,n$$

użyjemy podstawienia:

$$T^{(k-1)}_{n-r} = \begin{pmatrix} A^{(k-1)}_{\lambda\mu} & \ldots \\ A^{(k)}_{\lambda\mu} & \ldots\ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda=r+1,r+2,\ldots n \\ \mu=1,2,\ldots n \end{matrix}$$

Otrzymamy więc wzory:

$$(7) \quad S_{n-r} D_n = \Delta_{n,r}, \quad T_{n-r}\Delta_{n,r} = \Delta'_{n,r}, \quad T'_{n-r}\Delta'_{n,r} = \Delta''_{n,r} \ldots$$

$$\ldots\ldots T^{(k-2)}_{n-r}\Delta^{(k-2)}_{n,r} = \Delta^{(k-2)}_{n,r}, \quad T^{(k-1)}_{n-r}\Delta^{(k-1)}_{n,r} = \Delta^{(k)}_{n,r}, \quad T^{(k)}_{n-r}\Delta^{(k)}_{n,r} = \Delta^{(k+1)}_{n,r}.$$
$$r=0,1,2,\ldots,n, \quad k=0,1,2,\ldots$$

Na zasadzie wzorów (6) i (7) [ustęp **1**] mamy przedewszystkiem:

$$\Delta'_{n,r} = \Delta^{n-r-1}_{n,r} P_r .$$

P_r pozostaje niezmienione, bo nań podstawienie T_{n-r} nie działa.

Wyrażając $\Delta_{n,r}$ przez D_n i P_r, dostajemy stąd dalej:

$$\Delta'_{n,r} = D_n^{(n-r-1)^2} P_r^{n-r-1+1} = D_n^{(n-r-1)^2} P_r^{(n-r-1)^0(n-r)},$$

Analogicznie:

$$\Delta''_{n,r} = D_n^{(n-r-1)^3} P_r^{(n-r-1)(n-r)+1} = D_n^{(n-r-1)^3} P_r^{(n-r-1)^1(n-r)+(n-r-1)^0},$$

$$\Delta'''_{n,r} = D_n^{(n-r-1)^4} P_r^{(n-r-1)^2(n-r)+(n-r-1)+1} = D_n^{(n-r-1)^4} P_r^{(n-r-1)^2(n-r)+(n-r-1)^1+(n-r-1)^0}$$

. . . .

$$\Delta_{n,r}^{(k)} = D_n^{(n-r-1)^{k+1}} P_r^{(n-r-1)^{k-1}(n-r)+(n-r-1)^{k-2}+\ldots\ldots+(n-r-1)^0}.$$

Kładąc:

$$(n-r-1)^{k-2} + (n-r-1)^{k-1} + \ldots + (n-r-1)^0 = \sum_{\nu=0}^{k-2}(n-r-1)^\nu,$$

dochodzimy do wzoru ogólnego:

$$\Delta_{n,r}^{(k)} = D_n^{(n-r-1)^{k+1}} . P_r^{(n-r-1)^{k-1}(n-r) + \sum_{\nu=0}^{k-2}(n-r-1)^\nu}. \tag{8}$$

$$r=0,1,2,\ldots,n, \qquad k=1,2,\ldots.$$

Mając to, uwzględnimy teraz podstawienia S_{n-r}, T_{n-r}, T'_{n-r}, $T''_{n-r}\ldots$ Dla $k=0$ mamy:

(podług 8) $\qquad T_{n-r}\,\Delta_{n,r} = \Delta'_{n,r} = D_n^{(n-r-1)^2} P_r^{n-r}$,

(podług 7) $\qquad S_{n-r}\,\Delta_{n,r} = S_{n-r}\,D_n^{n-r-1} P_r = D_n^{(n-r-1)^2} P_r^{n-r}$

$\qquad S_{n-r}\,\Delta_{n,r} = S^2_{n-r}\,D_n$,

zatem:

$$T_{n-r}\,\Delta_{n,r} = S^2_{n-r}\,D_n. \tag{9}$$

Dla $k=1$ mamy:

(podług 8) $\qquad T'_{n-r}\,\Delta'_{n,r} = \Delta''_{n,r} = D_n^{(n-r-1)^3} P_r^{(n-r-\ \ (n-r)+1}$.

(podług 7) $\qquad S_{n-r}\,\Delta'_{n,r} = S_{n-r}\,D_n^{(n-r-1)^2} P_r^{n-r} = D_n^{(n-r-1)^3} P_r^{(n-r-1)(n-r)+1}$,

(podług 9) $\qquad S_{n-r}\,\Delta'_{n,r} = S^3_{n-r}\,D_n$, zatem:

$$(10) \qquad \Delta''_{n,r} = T'_{n-r}\, \Delta'_{n,r} = S^3_{n-r}\, D_n\,,$$

a że

$$\Delta'_{n,r} = T_{n-r}\, \Delta_{n,r}\,,$$

więc

$$(10a) \qquad \Delta''_{n,r} = T'_{n-r}\, T_{n-r}\, \Delta_{n,r} = S^3_{n-r}\, D_n\,,$$

Dla $k=2$ mamy:

(podług 8) $\quad T''_{n,r}\, \Delta''_{n,r} = \Delta'''_{n,r} = D_n^{(n-r-1)^4}\, P_r^{(n-r-1)^2(n-r)+(n-r-1)+1}$

(podług 7) $\quad S_{n-1}\, \Delta''_{n,r} = S_{n-1}\, D_n^{(n-r-1)^3} P_r^{(n-r-1)(n-r)+1}$
$$= D_n^{(n-r-1)^4} P_r^{(n-r-1)^2(n-r)+(n-r-1)+1}\,,$$

(podług 10) $\quad S_{n-r}\, \Delta''_{n,r} = S^4_{n-r}\, D_n\,,$

zatem:

$$(11) \qquad T''_{n-r}\, \Delta_{n,r} = S^4_{n-r}\, D_n\,,$$

i podług (10a)

$$(11a) \qquad \Delta''_{n,r} = T''_{n-r}\, T'_{n-r}\, T_{n-r}\, \Delta_{n,r} = S^4_{n-r}\, D_n\,.$$

Przyjmijmy jako udowodniony dla $k = l-1$ wzór;

$$(12) \qquad T^{(l-1)}_{n-r}\, \Delta^{(l-1)}_{n-r} = S^{l+1}_{n-r}\, D_n \quad \text{i}$$

$$(12a) \qquad T^{(l-1)}_{n-r}\, T^{(l-2)}_{n-r} \ldots,\, T''_{n-r}\, T'_{n-r}\, \Delta_{n,r} = S^{l+1}_{u-r}\, D_n\,,$$

to dla $k=l$ otrzymamy:

(podług 8) $\quad T^{(l)}_{n-r}\, \Delta^{(l)}_{n-r} = \Delta^{(l+1)}_{n,r} = D_n^{(n-r-1)^{l+2}}\, P_r^{(n-r-1)^l(n-r-1)+\sum\limits_{\nu=0}^{l+1}(n-r-1)^\nu}\,,$

(podług 7) $\quad S_{n-r}\Delta^{(l)}_{n,r} = D_n^{(n-r-1)^{l+2}}\, P_r^{(n-r-1)^l(n-r)+\sum\limits_{r=0}^{l-1}(n-r-1)^\nu}\,,$

(podług 12) $\quad S_{n-r}\, \Delta^{(l)}_{n,r} = S^{l+2}_{n-r}\, D_n\,,$

zatem

$$(13) \qquad T^{(l)}_{n-r}\, \Delta^{(l)}_{n,r} = S^{l+2}_{n-r}\, D_n\,,$$

czyli:

(13a) $$T^{(l)}_{n-r}\, T^{(l-1)}_{n-r} \ldots\ldots T'_{n-r}\, T_{n-r}\, \Delta_{n,r} = S^{l+2}_{n-r}\, D_n\,,$$

We wzorach (10a), (11a), (12a), (13a) można jeszcze i $\Delta_{n,r}$ zastąpić przez $S_{n-r}\, D_n$.

Z tego wnosimy, że podstawienia:

$$S_{n-r}\,,\quad T_{n-r}\,,\quad T'_{n-r}\,,\quad T''_{n-r} \ldots\ldots T^{(l)}_{n-r}\,,$$

stosowane kolejno do wyznaczników:

$$D_n\,,\quad \Delta_{n,r}\,,\quad \Delta'_{n,r}\,,\quad \Delta''_{n,r} \ldots\ldots \Delta^{(l)}_{n,r}\,,$$

celem otrzymania $\Delta^{(l+1)}_{n,r}$ są równoważne z $(l+2)$ - krotnem powtórzeniem jednego podstawienia S_{n-r}, zastosowanego do samego danego wyznacznika D_n.

Dla $n=3$, $r=1$ mamy:

$$D_3 = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$$

$$\Delta_{3,1} = S_{3-1}\, D_3 = \Sigma \pm a_{11} A_{22} A_{33} = D_3\,.\,(a^2_{11} + a^2_{12} + a^2_{13})\,.$$

$$\Delta'_{3,1} = T_{3-1}\Delta_{3,1} = T_{3-1} S_{3-1} D_3 = \Sigma \pm a_{11} A'_{22} A'_{33} = D_3\,.\,(a^2_{11}+a^2_{12}+a^2_{13})^2\,,$$

a że

$$T_{3-1}\, \Delta_{3,1} = S^2_{3-2}\, D_3\,,$$

zatem:

(14) $$S^2_{3-1}\, D_3 = D_3\,.\,(a^2_{11} + a^2_{12} + a^2_{13})^2\,.$$

Obliczmy wprost $S^2_{3-1}\, D_3$. Przedewszystkiem mamy:

$$S_{3-1}\, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}, & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}, & a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32} \\ a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}, & a_{13}a_{21}-a_{11}a_{23}, & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \end{vmatrix}\,,$$

$$S^2_{3-1} D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 \end{vmatrix} = z_4\,(a_{12}z_3 - a_{13}z_2) - z_5\,(a_{11}z_3 - a_{13}z_1) + z_6\,(a_{11}z_2 - a_{52}z_1)\,,$$

gdzie:

$$z_1 = a_{13}(a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33}) - a_{12}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}) = a_{21}(a^2_{12} + a^2_{13})$$
$$- a_{11}(a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23},$$
$$z_2 = a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}) - a_{13}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) = a_{22}(a^2_{11} + a^2_{13})$$
$$- a_{12}(a_{11}a_{21} + a_{13}a_{23}),$$
$$z_3 = a_{12}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) - a_{11}(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) = a_{23}(a^2_{11} + a^2_{13})$$
$$- a_{13}(a_1{}^1a_{21} + a_{12}a_{22}),$$
$$z_4 = a_{12}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) - a_{13}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{32}(a^2_{12} + a^2_{13})$$
$$- a_{11}(a_{12}a_{32} + a_{23}a_{33}),$$
$$z_5 = a_{13}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) - a_{11}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) = a_{32}(a^2_{11} + a^2_{13})$$
$$- a_{12}(a_{11}a_{31} + a_{13}a_{33}),$$
$$z_6 = a_{11}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{12}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) = a_{33}(a^2_{11} + a^2_{12})$$
$$- a_{13}(a_{11}a_{31}) + a_{12}a_{32}),$$

stąd dostajemy:

$$a_{12}z_3 - a_{13}z_2 = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{23})(a^2_{11} + a^2_{12} + a^2_{13}),$$
$$a_{11}z_3 - a_{13}z_1 = (a_{14}a_{23} - a_{13}a_{21})(a^2_{11} + a^2_{13} + a^2_{13})`$$
$$a_{11}z_2 - a_{12}z_1 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a^2_{11} + a^2_{12} + a^2_{13}),$$

a więc:

$$S^2_{3-1}D_3 = (a^2_{11}+a^2_{12}+a^2_{13})\{[a_{31}(a^2_{12}+a^2_{13}) - a_{11}(a_{12}a_{32}+a_{13}a_{33})]$$
$$[a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}] - [a_{32}(a^2_{11}+a^2_{13}) - a_{12}(a_{11}a_{31}+a_{13}a_{33})]$$
$$[a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}] + [a_{33}(a^2_{11}+a^2_{12}) - a_{13}(a_{11}a_{31}+a_{12}a_{32})]$$
$$[a_{11}a_{22} - a_{21}a_{21}]\} = (a^2_{11}+a^2_{12}+a^2_{13})^2[a_{12}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$$
$$+ a_{13}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{23} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}]$$
$$= (a^2_{11} + a^2_{12} + a^2_{12})^2 . D_3 \quad \text{zgodnie z wzorem (14).}$$

Lwów, marzec 1904.