WŁ. LEWICKI.

O MIEJSCACH ZEROWYCH FUNKCYI $\zeta(s)$.

Na kongresie matematyków w Paryżu w r. 1900 wymienił D. Hilbert cały szereg problematów, które, według jego zdania, matematyka w niedalekiej przyszłości musi koniecznie rozwiązać, jeżeli ma dalej rozwinąć się jeszcze wspanialej jak dotychczas. Ósmym problematem jest przeprowadzenie dowodu twierdzenia, wypowiedzianego przez Riemanna w roku 1859, a do dziś nieudowodnionego, a mianowicie twierdzenia, że wszystkie miejsca zerowe funkcyi:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots\cdot$$

mają postać $s = \frac{1}{2} + ti$. Dowód twierdzenia tego rzuciłby jasne światło na nierozstrzygniętą po dziś kwestyę liczby liczb bezwzględnie pierwszych. Kwestya tego dowodu należy do jednej z najtrudniejszych kwestyj w analizie; postęp tworzą gruntowe badania Goldschmidta, Hadamarda, de la Vallée-Poussina i innych, a w najnowszych czasach E. Landaua.

W dzisiejszej nocie mam zamiar wskazać pewien punkt, który, mem zdaniem, może kwestyę tę posunąć dalej, oraz jednę z dróg, mogących doprowadzić do udowodnienia powyższego twierdzenia.

W tym celu wyjdźmy z formy, jakiej użył Riemann w swych badaniach nad liczbą liczb pierwszych [2]; forma ta opiewa:

---

[1]) Por. np. Nachrichten der k. Geselsch. der Wissensch. Göttingen 1900. Math- Physik. Klasse, Heft 3. Wiad. mat. t. 7, str. 184.

[1]) Werke, str. 136.

$$(1)\quad \Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)\Pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx,$$

gdzie Π jest funkcyą Γ Eulera:

$$\Gamma(s)=\Pi(s-1),$$

a:

$$\psi(x)=\sum_1^\infty e^{-n^2\pi x};\qquad s=a+ti.$$

Z równań (1) wynika:

$$(2)\quad \zeta(s)=\frac{1}{\Pi(\frac{s}{2}-1)}\,\Pi^{\frac{s}{2}}\left[\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}}\right]dx.\right.$$

Chcąc znaleść miejsca zerowe funkcyi $\zeta(s)$, a więc rozwiązać równanie:

$$\zeta(s)=0,$$

trzeba rozwiązać równanie:

$$(3)\qquad \frac{1}{s(s-1)}+\int_1^\infty \psi(x)\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1+s}{2}}\right)dx=0.$$

Czynnik
$$\frac{1}{\Pi\left(\frac{s}{2}-1\right)}=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}$$

nie wpływa na miejsca zerowe funkcyi $\zeta(s)$, gdyż — jak z badań Weierstrassa wynika[1]-funkcya $\Gamma\left(\frac{s}{2}-\frac{1}{2}\right)$ jest nieskończonością (a więc odwrotność jej zerem) tylko dla wartości argumentu:

$$\frac{s-1}{2}=0,\ -1,\ -2,\ldots.$$

[1]) Por. np. Pascal, Repertoryum matematyki wyższej. Warszawa 1900, I, 433.

czyli dla

$$s = 1, \ -1, \ -3, \ldots ;$$

$s = 1$ jako biegun funkcyi $\zeta(s)$ należy odrzucić, a tak samo $s = -1$, $-3, \ldots$, bo dla tych wartości $\zeta(s)$ zamieniłaby się na sumę całkowitych dodatnich potęg, która to suma byłaby nieskończenie wielką.

Z równania (3) wynika:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\infty} e^{-n^2\pi x} \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}}\right) dx = \frac{1}{s(1-s)} \,.$$

A że, jak to widoczne:

$$s - s^2 = a - a^2 + t^2 + (1-2a)\, ti,$$

$$\frac{1}{s(1-s)} = \frac{(a-a^2+t^2) + (2a-1)\, ti}{(a-a^2+t^2)^2 + (1-2a)^2 t^2} \,,$$

$$x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{1+s}{2}} = \cos \frac{t \log x}{2} \left(e^{\left(\frac{a}{2}-1\right)\log x} + e^{-\frac{1+a}{2}\log x} \right)$$

$$+ \, i \sin \frac{t \log x}{2} \left(e^{\left(\frac{a}{2}-1\right)\log x} - e^{-\frac{1+a}{2}\log x} \right),$$

przeto przyrównawszy części rzeczywistą i urojoną do zera, otrzymamy następujące równania:

$$(4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\infty} e^{-n^2\pi x} \cos \frac{t \log x}{2} \left(x^{\frac{a}{2}-1} + x^{-\frac{1+a}{2}} \right) dx = \frac{a - a^2 + t^2}{(a-a^2+t^2)^2 + (1-2a)^2 t^2} \,,$$

i

$$(5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\infty} e^{-n^2\pi x} \sin \frac{t \log x}{2} \left(x^{\frac{a}{2}-1} - x^{-\frac{1+a}{2}} \right) dx = \frac{(2a-1)\, t}{(a-a^2+t^2)^2 + (1-2a)^2 t^2} \,.$$

Miejsca zerowe funkcyi $\zeta(s)$ dla argumentu zespolonego muszą przeto spełniać powyższe dwa równania, czyli wszystkie miejsca zerowe:

$$s = a + ti,$$

muszą być utworzone z pierwiastków obu równań (4) i (5). Odrazu widać, że dla jakiegokolwiek t równanie (5) spełnia się dla $a = \frac{1}{2}$, gdyż dla tej wartości obie strony równania stają się zerem; a wtedy równanie (4) przejdzie na:

$$(6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\int_{1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}\cos\frac{t\log x}{2}\, x^{-\frac{3}{4}}dx = \frac{2}{1+4t^2}\,.$$

Gdyby przeto udało się udowodnić prawdziwość równania (6), czyli gdyby rzeczywiście suma tych całek równała się prawej stronie, tobyśmy mieli dowód, że istotnie część rzeczywista pierwiastka równania $\zeta(s)$ wynosi $\frac{1}{2}$. Dowód twierdzenia Riemanna byłby jednak wtedy tylko zupełny, gdyby się udało dowieść, że $a = \frac{1}{2}$ jest nietylko jedną, ale i jedyną wartością, rozwiązującą równania (4) i (5).

Lwów w kwietniu 1904.