MISCELLANEA.

Z DZIEDZINY GEOMETRYI ELEMENTARNEJ TRÓJKĄTA.

W jednym z ostatnich zeszytów czasopisma „Zeitschrift für math. und naturwiss. Unterricht" 7 Iuni 1903, 5 Heft, p. E c k h a r d t z Hamburga podaje następujący bardzo prosty wzór na kwadrat boku trójkąta.

W trójkącie BCA (fig. 1) proste BA_1 i CA_1, przecinające się w punkcie A_1 tak, że $\angle CBA_1 = \angle BCA_1 = \alpha = A$ spotykają prostą ED przechodzącą przez wierzchołek A równolegle do BC odpowiednio w punktach E i D. Oznaczając odcinek ED przez a_1, a boki trójkąta

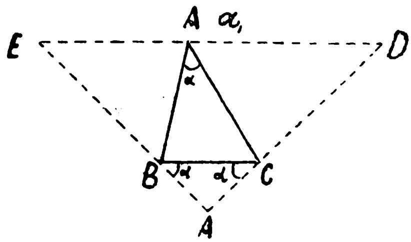

Fig. 1.

odpowiednio przez a, b, c i zważywszy podobieństwo trójkątów: ABC, EBA, ACD, dostaniemy

$$b^2 + c^2 = aa_1.$$

Wzór ten udowodnić można na innej, mniej prostej lecz dość ciekawej drodze. Przypomnijmy najprzód w kilku słowach kilka pojęć z nowszej geometryi elementarnej.

Jeżeli boki dowolnego kąta MON przetniemy prostą dowolną PQ (P na OM i Q na ON) i poprowadzimy P_1Q_1 (P_1 i Q_1 też leżą na bokach MO i ON) tak, że $\angle OPQ = \angle OQ_1P_1$, to prosta P_1Q_1

nazywa się przeciwrównoległą do prostej PQ. Trójkąty POQ i Q_1OP_1 są podobne. Środkowej w trójkącie POQ odpowiada w trójkącie P_1OQ_1 prosta, przechodząca przez środek odcinka P_1Q_1 i nachylona do boku OQ_1 pod tym samym kątem, jak poprzednia do boku OP. W stosunku do trójkąta POQ ta prosta nazywa się symedianą. Symedianę danego boku trójkąta można określić też jako miejsce geometryczne środków odcinków prostych, przeciwrównoległych do danego boku. Trzy symediany przecinają się wszystkie w tak zw. punkcie Lemoine'a.

W trójkącie ABC (fig. 2) poprowadźmy wysokości CH i BW, środkową CM, symedianę CM_0, przeciwrównoległe: BB_1 do boku AB i BB_2 do boku BC ($\angle CB_1B = \angle AB_2B = \angle B$) a także linię CH_1 symetryczną do CB względem CH. Z trójkątów podobnych ABC i BB_2C, a potem z trójkątów ABC i ABB_2 też podobnych dostaniemy:

$$BC^2 = AC \,.\, B_1C \text{ i } AB^2 = AC \,.\, AB_2 \,. \tag{1}$$

Dodając stronami, po uwzględnieniu pewnego prostego przekształcenia, dostaniemy:

$$AB^2 + BC^2 = AC\,(AC \pm B_1B_2)\,. \tag{2}$$

Znak $+$ stosujemy wtedy, gdy $\angle B < \frac{\pi}{2}$, znak $-$, gdy $\angle B > \frac{\pi}{2}$. Odcinek $AC \pm B_1B_2$ nazwijmy b_1 i wtedy wzór (2) przybrać może taką postać:

$$c^2 + a^2 = b \,.\, b_1 \,.$$

Inne podobne wzory napiszemy tak:

$$a^2 + b^2 = c \,.\, c_1\,; \quad b^2 + c^2 = a \,.\, a_1\,.$$

Jeżeli teraz prawe strony powyższych równości pomnożymy odpowiednio przez $\frac{b}{b}, \frac{c}{c}, \frac{a}{a}$, a stosunki $\frac{a_1}{a}, \frac{b_1}{b}, \frac{c_1}{c}$ odpowiednio oznaczymy przez Q_1, Q_2, Q_3, dostaniemy:

$$\left\{\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 Q_3\,, \\ a^2 + c^2 &= b^2 Q_2\,, \\ b^2 + c^2 &= a^2 Q_1 \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Z tych równości mamy, dodawszy odpowiednio c^2, b^2, a^2:

$$\frac{1}{1+Q_1}=\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2},\ \frac{1}{1+Q_2}=\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2},\ \frac{1}{1+Q_1}=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2},$$

czyli $\frac{1}{1+Q_1}+\frac{1}{1+Q_2}+\frac{1}{1+Q_3}=1$, a odejmując tę równość od tożsamości $3=3$ znajdziemy: $\frac{Q_1}{1+Q_1}+\frac{Q_2}{1+Q_2}+\frac{Q_3}{1+Q_3}=2$.

Spółczynnikom Q_1, Q_2, Q_3 można nadać postać geometryczną.

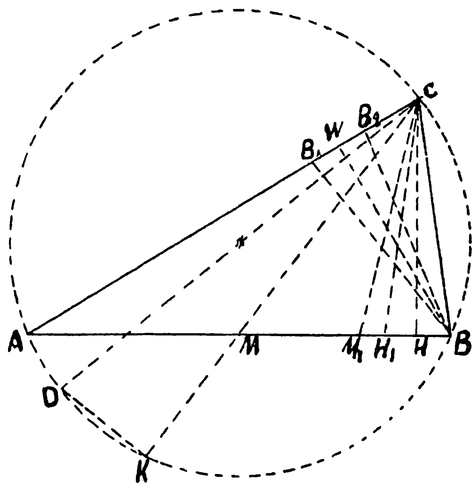

Fig. 2.

Symediana w punkcie przecięcia się z bokiem trójkąta wyznacza na nim odcinki, które są w stosunku kwadratów boków przyległych. Dowieść tego można krócej, używając rachunku pól, lecz łatwo też, opierając się na znajomości podobieństwa figur. Więc:

$$\frac{AM_1}{BM_1}=\frac{AC^2}{BC^2}.$$

Stąd:

$$\frac{AM_1+BM_1}{AM_1-BM_1}=\frac{AB}{2MM_1}=\frac{AC^2+BC^2}{AC^2-BC^2}$$

Z wzoru (2), gdy $\angle B = \frac{\pi}{2}$ (fig. 2) wypada, ponieważ w tym przypadku $B_1B_2 = 0$, znane twierdzenie o trójkącie prostokątnym:

$$AC^2 - BC^2 = AH^2 - HB^2 = 2AB.MH.$$

W takim razie:

$$(4) \qquad \frac{AB}{2MM_1} = \frac{AB^2 + BC^2}{2AB.MH}, \text{ czyli } AC^2 + AC^2 = AB^2 \frac{MH}{MM_1}.$$

Stąd $Q_3 = \frac{MH}{MM_1}$. Gdy $\angle C = \frac{\pi}{2}$, $Q_3 = 1$ i symediana staje się wysokością, spuszczoną na przeciwprostokątną AB, o czem się można przekonać także inaczej, przy pomocy własności symediany.

Gdy bok trójkąta jest niezmienny, wartość odpowiedniego mu spółczynnika Q może się zmieniać w granicach $\frac{1}{2}$ i ∞. Nie może być, jednocześnie np. $Q_1 = Q_2 \lesseqgtr 1$ lub tembardziej $Q_1 = Q_2 = Q_3 \leqq 1$. Jeżeli dwa trójkąty mają po dwa równe boki, a kąty między niemi spełniające się do π, to odpowiadające tym kątom odwrotności liczb Q spełniają się wzajemnie do 2. O tem się można przekonać z twierdzenia o sumie kwadratów boków równoległego boku. Środkowa i symediana trójkąta bez trudności dają się wyrazić w funkcyi odpowiednich boków trójkąta i ilości Q. Środkowe boków oznaczmy przez m_a, m_b, m_c, a symediany przez m'_a, m'_b, m'_c. Z ogólnie znanego wzoru na środkową wypada, wziąwszy pod uwagę równości (3):

$$m_a = \frac{a}{2}\sqrt{2Q_1 - 1},\quad m_b = \frac{b}{2}\sqrt{2Q_2 - 1},\quad m_c = \frac{c}{2}\sqrt{2Q_3 - 1}.$$

Q jest stałe, gdy środkowa i bok się zmieniają. Poprowadźmy teraz średnicę CD koła, opisanego na trójkącie, i oznaczmy przez K—punkt przecięcia się środkowej z tem kołem; $\Delta\Delta$ CDK i CM_1H są podobne, więc:

$$(5) \qquad CD.CH = CM_1.CK = ab.$$

Stąd:

$$CM_1 = \frac{ab}{CK} = \frac{ab}{m_c + MK},$$

a ponieważ $m_c . MK = \left(\frac{c}{2}\right)^2$, to $MK = \frac{c^2}{4m_c}$, więc

$$CK = m_c + \frac{c^2}{4m_c} = \frac{cQ_3}{\sqrt{2Q_3-1}},$$

(6)
$$CM_1 = m'_c = \frac{ab\sqrt{2Q_3-1}}{cQ_3}.$$

Łatwo też widzieć między innemi, że $CK . CM = \frac{b^2+a^2}{2}$.

Na podstawie wzorów (1) i (2) można wyprowadzić znane ogólnie:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \pm 2\,AB . HB,$$

i
$$(AC^2 - CT^2) . TB + (BC^2 - CT^2)\,AT = AB . AT . TB,$$

gdzie CT jest dowolna poprzeczna, przechodząca przez wierzchołek i spotykająca bok AB w punkcie T.

Rzeczywiście, trójkąty ACH_1 i ABB_1 są podobne, więc:

$$AC . AB_1 = AB . AH_1,$$

a z równości: $BC^2 = AC . B_1C$ mamy:

$$AC^2 - BC^2 = AC . AB_1.$$

Możemy tedy napisać takie równości z trójkątów ACT i TCB (CT nie podane jest na fig. 2):

$$AC^2 - CT^2 = AT\,(AB \pm BH_2),$$

$$BC^2 - CT^2 = \mp BH_2 . TB,$$

gdzie punkt H_2, na figurze nie podany, jest symetryczny do punktu T względem CH.

Pierwszą równość mnożymy przez TB, drugą przez AT i dodajemy je, wtedy:

$$(AC^2 - CT^2)\,TB + (BC^2 - CT^2)\,AT = AB . AT . TB \text{ c. b. d. o.}$$

Trójkąt BB_1B_2 jest równoramienny, a trójkąty WBB_2 i HBC są podobne, więc:

$$\frac{B_1B_2}{2HB}=\frac{BW}{CH}=\frac{AB}{AC} \text{ czyli } B_1B_2=\frac{2AB.HB}{AC}.$$

Stąd z (2) $$AB^2+BC^2=AC^2\mp 2AB.HB.$$

Jest to wzór ogólnie znany.

L. Zarzecki